三次非線形 $K-\epsilon$ モデルによる二次元非対称ディフューザ内乱流の数値予測*

岡本正芳*¹, 島 信行*¹

Numerical Prediction of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Asymmetric Diffuser with a Third-Order Nonlinear $K-\epsilon$ Model

Masayoshi OKAMOTO*² and Nobuyuki SHIMA*² Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University,
3-5-1 Johoku, Hamamatsu-shi, Shizuoka, 432-8561 Japan

A third-order nonlinear $K-\epsilon$ model proposed by the authors is applied to turbulent flow through a two-dimensional asymmetric diffuser including separation and reattachment. The numerical results show that the present model predicts profiles of the mean velocities and Reynolds stresses better than a representative linear eddy-viscosity model but does not reproduce the flow separation. The model is improved by incorporating a strain-convection effect derived from a two-scale direct-interaction approximation analysis into the Reynolds stress to capture separation and reattachment.

Key Words: Third-Order Nonlinear $K-\epsilon$ Model, Asymmetric Diffuser, Flow Separation, Turbulence Model, Strain-Convection Effect

1. 緒 言

はく離・再付着を伴う乱流の数値予測は非常に重要であり、バックステップ流れやディフューザ内流れは乱流モデルの検証対象として頻繁に計算されてきた。ディフューザ内乱流の予測ではバックステップ乱流の場合と異なりモデルによりはく離の有無やはく離・再付着点の位置が左右される。特に逆圧力こう配によりはく離が生じる二次元非対称ディフューザ内乱流は最近 ERCOFTAC のワークショップ⁽¹⁾でもテストケースとして取り上げられ、多種の乱流モデルでの計算が実行された。その結果、線形 $K-\omega$ モデルが傾斜壁面からはく離を再現できるのに対して、線形 $K-\epsilon$ モデルははく離を予測できないことが明らかにされた。本研究では著者ら⁽²⁾が提案している低レイノルズ数形三次非線形 $K-\epsilon$ モデルを Obi ら⁽³⁾のはく離・再付着を伴う二次元非対称ディフューザ内乱流の実験に適用してその予測性能を評価し、モデルの改善を模索する。このモデルは Yoshizawa⁽⁴⁾により提案された2スケール直接関連近似理論(TSDIA)の三次解析結果

をもとに開発された平均速度こう配の三乗項までを含む非線形モデルである。著者らは数種の基本的な流れ場において予測能力の検証を実行しており、本研究もその検証の一環として数値予測を行う。

2. 乱流モデル

著者らが提案している三次非線形 $K-\epsilon$ モデルのレイノルズ応力は次式で与えられる。

$$R_{ij} = -\frac{2}{3} K \delta_{ij} + \gamma_1 S_{ij} + \gamma_2 (S_{ia} S_{aj})^* + \gamma_3 (S_{ia} W_{aj} + S_{ja} W_{ai}) + \gamma_4 (S_{ia} S_{ab} S_{bj})^* + \gamma_5 (S_{ia} S_{ab} W_{bj} + S_{ja} S_{ab} W_{bi}) + \gamma_6 (S_{ia} W_{ab} W_{bj} + S_{ja} W_{ab} W_{bi})^* + \gamma_7 (W_{ia} S_{ab} W_{bj})^* \dots (1)$$

ここで、ひずみ・渦度テンソルの定義は

$$S_{ab} = \frac{\partial U_a}{\partial x_b} + \frac{\partial U_b}{\partial x_a}, \dots (2)$$

$$W_{ab} = \frac{\partial U_a}{\partial x_b} - \frac{\partial U_b}{\partial x_a}, \dots (3)$$

である。このモデル表現は計算安定性を重視して Okamoto⁽⁵⁾による TSDIA 理論の三次解析結果におけるラグランジェ時間微分項と平均速度の2階および3階微分項を削除したものに对应する。非線形モデル

* 原稿受付 2003年7月14日。

*¹ 正員, 静岡大学工学部 (〒432-8561 浜松市城北3-5-1)。

E-mail: tmmokam@ipc.shizuoka.ac.jp

には二次項に $W_{im}W_{mj}$ 項を導入しているモデルも存在する。しかし、この項の存在は Speziale⁽⁶⁾⁽⁷⁾ が提唱した物質フレーム不変性に反し、TSDIA 解析から導出されたレイノルズ応力のテンソル表現結果からもこの項の存在は否定されている。式(1)に現れるモデル係数は

$$\gamma_1 = C_1 \frac{K^2}{\varepsilon} f_{LR1} f_{SW}, \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\gamma_{2,3} = C_{2,3} \frac{K^3}{\varepsilon^2} f_{LR2} f_{SW}^2, \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\gamma_{4-7} = C_{4-7} \frac{K^4}{\varepsilon^3} f_{LR3} f_{SW}^3 \quad \dots\dots\dots (6)$$

である。ここでモデル関数およびモデル定数は

$$f_{SW} = \frac{1}{1 + (C_{SS} S_{mn} S_{mn} + C_{WW} W_{mn} W_{mn}) \frac{K^2}{\varepsilon^2} f_{LR1}}, \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$f_{LR1} = 1 - 0.97 \exp(-R_T/160) - 0.0045 R_T \exp\{-(R_T/200)^3\}, \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$f_{LR2} = 1 - 0.90 \exp(-R_T/160) - 0.0045 R_T \exp\{-(R_T/200)^3\}, \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$f_{LR3} = f_{LR1}^2, \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.14, \quad C_2 = -0.009, \quad C_3 = 0.014, \\ C_4 &= 0.0021, \quad C_5 = -0.0035, \quad C_6 = 0.0019, \\ C_7 &= -0.0033, \quad C_{SS} = 0.00825, \quad C_{WW} = 0.00175 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (11)$$

である。ここで ε と R_T は等方性散逸率と乱流レイノルズ数であり、それぞれ以下のように定義される。

$$\varepsilon \equiv \varepsilon - 2\nu \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_j}, \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$R_T \equiv \frac{K^2}{\nu \varepsilon}, \quad \dots\dots\dots (13)$$

等方性散逸率は壁面境界で零になり、数値解析の際に取扱いが簡単な変数である。モデル関数 f_{SW} は Yoshizawa-Nisizima⁽⁸⁾ により指摘された非平衡効果の項と高次から繰込み可能な項をもとに、計算安定性を確保するため生成と散逸の釣り合いを仮定して構築されたひずみ・過度による抑制効果を表すモデル関数である。モデル関数 f_{LR} は低レイノルズ数効果を意味するものである。乱流モデルには壁面近傍に壁関数を用いて壁までの解析を行わないタイプの高レイノルズ数形モデルと壁面まで解析を行う低レイノルズ数形モデルが存在する。このモデルは一般流れ場への適用性を重視して壁面距離を含まない低レイノルズ数形モデルとして開発を行っている。低レイノルズ数効果は近年著者⁽⁹⁾ により分子粘性効果を取り込んだ TSDIA 理論からも導出されているが、壁面効果を直接 TSDIA 理論から導出することは困難であるため Cot-

ton-Kirwin⁽¹⁰⁾ の線形 K - ε モデルに組み込まれたモデル関数を利用している。この関数は壁面近傍における乱流エネルギーのピークおよび漸近挙動を再現できるように構築されている。

次に乱流エネルギーと等方性散逸率の輸送方程式を以下に示す。

$$\begin{aligned} \frac{DK}{Dt} &= P_K - \varepsilon - 2\nu \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_j} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\nu + C_{DK} \frac{K}{\varepsilon} f_{LR1} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right\}, \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} &= C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} P_K f_p + P_\varepsilon - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} f_\varepsilon \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\nu + C_{DE} \frac{K}{\varepsilon} f_{LR1} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\}. \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ここで二次の生成項 P_ε 、モデル関数とモデル定数は

$$P_\varepsilon = C_\varepsilon C_1 \nu \frac{K^2}{\varepsilon} f_{SW} f_{LR1} \frac{\partial^2 U_a}{\partial x_b \partial x_c} \frac{\partial^2 U_a}{\partial x_b \partial x_c}, \quad \dots (16)$$

$$f_\varepsilon = 1 - 0.3 \exp(-R_T^2/5.0), \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$f_p = 1 - 0.15 \min \left(\frac{K^3}{\varepsilon^2 P_K} S_{ab} W_{ac} W_{bc} f_{SW}^2 f_{LR3}, 0 \right), \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} C_{\varepsilon 1} &= 1.4, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.95, \quad C_\varepsilon = 1.2, \\ C_{DK} &= 0.09, \quad C_{DE} = 0.09 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

となる。モデル関数 f_ε はバイパス遷移境界層の予測改善のため導入しており、 f_p は Pope⁽¹¹⁾ により示唆された円形・平面噴流アノマリーを解消する $S_{ij}W_{im}W_{jm}$ 項を組み込んだモデル関数である。

このモデルで著者ら⁽¹⁾⁽¹²⁾ はすでに一様せん断流、チャネル乱流、平面・円形・壁面噴流、正方形ダクト内乱流、正弦関数で表される吹出し吸込みを伴うチャネル乱流などで予測能力の検証を行ってきた。壁面噴流で若干大きめの拡大率を予測し、正方形ダクトでは二次流れを弱く予測する問題は見られるが、全般的に線形渦粘性モデルに対する有効性が確認できている。

3. 数 値 解 析

計算対象は図1のような二次元非対称ディフューザ内流れでデータは Obi ら⁽³⁾ の実験を用いた。レイノルズ数はバルク速度と流入口の高さ H で 20 000 である。数値計算は一般曲線座標系において有限体積法により実行した。対流項の離散化には二次精度中心補間を、圧力解法には SIMPLE 法を適用した。格子配置は非直交コロケート格子で、格子数は沖永・小尾⁽¹³⁾ により作成された 415×100 の不等間隔格子を使用した。先のワークショップ⁽¹⁾ においてより少ない計算格子での格子依存性がないことが報告されているの

Fig. 1 Flow configuration and coordinate system

Fig. 2 Profiles at the inlet boundary condition, (a) mean velocity U , (b) normal stress $\overline{u'u'}$

で、この計算格子を利用した本研究には格子依存性がないものと考えられる。代表的な低レイノルズ数形線形 $k-\epsilon$ モデルとして Launder-Sharma モデル(以下、LS モデルと略す)⁽¹⁴⁾ の計算も実行し比較を行った。計算安定性および計算時間に関して本モデルは LS モデルと大きな違いは見られていない。流入境界条件は Obi らの実験同様、完全発達したチャンネル乱流分布を与えた。流入部における比較データとして平均速度 U と垂直応力 $\overline{u'u'}$ が与えられており、その比較結果は図 2 である。 H_x は各部における壁面間の高さを意味している。諸量は完全発達時の中心速度 U_c で無次元化されている。平均速度は両モデルともよく再現されている。垂直応力では LS モデルは過小予測しているが、本モデルは実験データをよくとらえている。

4. 結果と考察

まずはく離・再付着現象の再現性を調べるため、流線図を図 3 に示す。LS モデルの結果は拡大部で直線

Fig. 3 Streamline, (a) LS model, (b) Third-order model, (c) Third-order model with f_{DS}

的に広がっているのに対して、本モデルでは拡大部後半で流線に曲がりが生じ傾斜壁面付近で膨みが見られる。これは本モデルの結果が LS モデルの結果に比べてはく離しかかっていることを意味しているが、両モデルともはく離現象を再現できていない。そこで、本モデル改善のため Okamoto⁽⁵⁾ の三次 TSDIA 理論解析結果に着目する。TSDIA 理論解析ではエネルギー供給領域を特徴づける長さスケールは

$$l = 1.84 \frac{K^{3/2}}{\epsilon} \dots \dots \dots (20)$$

である。ここに三次解析から導出されるひずみ移流効果を組み込み新たな長さスケール

$$l = 1.84 \frac{K^{3/2}}{\epsilon} - 0.0588 \frac{K^{3/2}}{\epsilon^4} \frac{DS_{ij} S_{ij}}{Dt} \dots \dots \dots (21)$$

を導入して TSDIA 解析を実行すると、モデル係数 γ_n は

$$\gamma_1 = C_1 \frac{K^2}{\epsilon} f_{SW} f_{DS} f_{LR1}, \dots \dots \dots (22)$$

$$\gamma_{2-3} = C_{2-3} \frac{K^3}{\epsilon^2} f_{SW}^2 f_{DS}^5 f_{LR2}, \dots \dots \dots (23)$$

$$\gamma_{4-2} = C_{4-7} \frac{K^4}{\epsilon^3} f_{SW}^3 f_{DS}^2 f_{LR3} \dots \dots \dots (24)$$

になる。ひずみ移流効果に関連したモデル関数 f_{DS} は

$$f_{DS} = 1 - X, \dots \dots \dots (25)$$

$$X = 0.0426 \frac{K^3}{\epsilon^3} \frac{DS_{ij} S_{ij}}{Dt} \dots \dots \dots (26)$$

となる。このモデル関数はひずみテンソルの大きさが時空間的に増加するとレイノルズ応力を抑制する働き

Fig. 4 Mean velocity U Fig. 5 Mean velocity V

がある。この効果は Yoshizawa-Nisizima⁽⁸⁾ により指摘された一様せん断流の際に渦粘性率を抑制する非平衡効果と似たような性質をもっているものと考えられる。ひずみ移流関数を $f_{DS}=1$ とすると、今までの三次非線形 $K-\varepsilon$ モデルに帰着する。式(25)と式(26)で表されるモデル関数は負の渦粘性率等の数値不安定性を引き起こしかねない表現になっているため、数値安定性を確保する目的からひずみテンソルの大きさが増加する際に2割程度の抑制にとどめたモデル関数

$$f_{DS} = \begin{cases} 1 - \min(X, 0.2) & X > 0 \\ 1 & X \leq 0 \end{cases} \quad (27)$$

としてモデルに組み込んだ。この改良を行ったモデルの結果は図3(c)のようにはく離を再現することができた。はく離点と再付着点の位置は実験ではそれぞれ $x/H=7$, $x/H=30$ であるが、ひずみ移流効果を導入した本モデルでははく離点が $x/H=9.67$ で、再付着点が $x/H=24.0$ となり、実験より小さな再循環領域

Fig. 6 Shear stress $\overline{u'v'}$ Fig. 7 Normal stress $\overline{u'u'}$

が予測された。

次にはく離前の $x/H=5.2$ とはく離後の $x/H=15.2, 19.2, 25.2$ の位置における諸量の分布を示す。図4は平均速度 U の分布である。線形の LS モデルははく離前では実験をよく再現するが、はく離後は実験の非傾斜壁面側への偏った分布をとられず、対称に近い分布となっている。一方、本非線形モデルは実験のはく離後の位置における非対称な分布をとらえている。ひずみ移流効果を含まない三次非線形モデル

の結果では逆流は生じていないが、 $x/H=15.2$ および 19.2 でははく離しかかっている傾向が確認できる。ひずみ移流効果を導入した本モデルははく離現象は再現しているが、実験に比べ逆流速度は過小予測となっている。ひずみ移流効果は渦粘性係数を抑制しているため、平均速度分布においてこう配の強いシャープな分布形状をとることを可能にし、全般的な分布においても改善をもたらしている。しかし、はく離前の予測に関しては LS モデルの結果と比較して本モデルには

Fig. 8 Normal stress $\overline{v'v'}$

まだ改善の余地が見られる。図5に平均速度 V の比較結果を与える。この結果では本モデルは全体を通して実験を過小予測する傾向が見られるが、ピーク位置の再現性などから線形モデルに比べて本非線形モデルはよい予測性能を示している。

図6はレイノルズせん断応力分布である。実験データはせん断応力がはく離前では中央部でおりかえす反対称な分布をとり、はく離すると正の領域が拡大し対称性がくずれた分布に変化することを表している。

LSモデルでははく離後の正の領域の拡大を十分には再現できず、正のピークを過小予測している。本モデルは分布形状と正の最大値に関して実験を的確に予測しているが、非傾斜壁面近くの負値のピークが実験より強く現れている。ひずみ移流効果を表現するモデル関数 f_{DS} の導入により、はく離後の結果において傾斜壁側でせん断応力が小さくなる傾向が確認できる。

図7は垂直応力 $\overline{u'u'}$ の分布である。はく離前の位置ではLSモデルが実験を比較的良好に再現しているが、本モデルは過大予測が見られる。はく離後の $x/H = 15.2$ と 19.2 では本モデルは若干過大予測しているが実験のピークの位置と分布形状をよく再現している。LSモデルがほぼ全領域で過小予測しているのに対して本モデルははく離後の実験の全体的な挙動をとらえることができています。図8の垂直応力 $\overline{v'v'}$ の分布では本モデルははく離前で実験データを過大予測しているが線形モデルであるLSモデルに比べると実験に近い値をとっている。はく離後、本モデルは流路中央部でわずかに上下する揺らいだ分布を示しているが全般的な実験レベルはほぼとらえることができています。両垂直応力の結果において本モデルとひずみ移流効果を導入したモデルの間にわずかな相違は確認できたが、実験との比較において両者に優劣をつけられるレベルのものではなかった。

5. 結 言

三次非線形 $K-\epsilon$ モデルを二次元非対称ディフューザ内乱流に適用して数値予測を実行した。本モデルは線形 $K-\epsilon$ モデルに比べ、平均速度とレイノルズ応力の予測に改善が確認できたが、はく離は再現できなかった。理論的に導出されたひずみ移流効果を考慮したモデルでは逆流速度は弱いものはく離現象をとらえることができた。

文 献

- (1) Hellsten, A. and Rautahaimo, P., *Proc. 8th ERCOFTAC/IAHR/COST Workshop on Refined Turbulence Modell.*, 113-207, Helsinki University of Technology, (1999).
- (2) Okamoto, M. and Shima, N., *Proc. 3rd Int. Symp. Turbulent, Heat Mass Transf.*, (200), 386-396.
- (3) Obi, S., Aoki, K. and Masuda, S., *Proc. 9th Symp. Turbulent Shear Flows*, (1993), 305.1-305.4.
- (4) Yoshizawa, A., *Phys. Fluids*, **27** (1984), 1377-1387.
- (5) Okamoto, M., *J. Phys. Soc. Jpn.*, (1994), 2102-2122.
- (6) Speziale, C. G., *Phys. Fluids*, **22** (1979), 1033-1037.
- (7) Speziale, C. G., *Phys. Fluids*, **24** (1981), 1425-1427.
- (8) Yoshizawa, A. and Nisizima, S., *Phys. Fluids*, **A5** (1993), 3302-3304.
- (9) Okamoto, M. and Shima, N., *Theoret. Comput. Fluid*

- Dyn.*, **16** (2003), 369-385.
- (10) Cotton, M. A. and Kirwin, P. J., *Int. J. Heat Fluid Flow*, **16** (1995), 486-492.
- (11) Pope, S. B., *AIAA J.*, **16** (1978), 279-281.
- (12) Okamoto, M. and Shima, N., *Energy*, (2004), accepted, EGY1333.
- (13) 沖永佳史・小尾晋之介, 日本流体力学会年会 99 講演論文集, (1999), 421-422.
- (14) Launder, B. E. and Sharma, B. I., *Lett. Heat Transf.*, **1** (1974), 131-138.
-