SPH 法による非圧縮粘性流体解析手法の研究*

酒井 譲^{*1}, 楊 宗 億^{*2}, 丁 泳 鐘^{*3}

Incompressible Viscous Flow Analysis by SPH

Yuzuru SAKAI^{*4}, Zong Yi YANG and Young Guan JUNG^{*4} Faculty of Education and Human Sciences, Yokohama National University,
79-5 Tokiwadai Hodogaya-ku, Yokohama-shi, Kanagawa, 240-8501 Japan

Using SPH method a new formulaion is introduced for incompressible viscous flow analysis. The method uses SMAC algorithm well known in finite difference scheme to solve time integral of Lagrangian form Navier-Stokes equation which is expressed by particle systems. The results show more excellent incompressibility than earlier approaches of SPH (PSPH and WSPH) within Reynolds number of 1.0 to about 1000. For low Re number (Re below 1.0) the results show good accordance with theoretical values. Moreover the method successfully introduced stress tensors to the viscous term of Navier-Stokes equation instead of using artificial viscosity treatment used in earlier approaches, which enables to solve incompressible viscous flow phenomena more realistic and exactly. The large deformation of free surface flow (typically in wave problem) can be analyzed with sufficient smoothness and naturalness.

Key Words: Particle Method, SPH, Incompressible Viscous Flow Analysis

1. 緒 言

代表的な粒子法のひとつである SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法は、宇宙物理学の分野において圧縮性流体解析手法として開発¹⁾され、その後、固体の超高速衝突解析²⁾、弾塑性解析³⁾、熱伝導解析⁴⁾など様々な分野に応用されつつある。SPH法はメッシュ(あるいはグリッド)を用いた固定座標系にもとづく差分法や有限要素法などとは異なり、粒子の運動に従うラグランジュの方法により記述されたメッシュレス(グリッドレス)解析法であり、解析領域が大変形し、境界が複雑に移動する問題には従来の手法よりも適合性が高い。したがって、河川のような自然流体や海洋における波浪などの自由表面をもつ流体や、多相流体の混合問題、あるいは噴流や3次元的な渦構造など、非圧縮粘性流体の大変形挙動解析に有力な手法と考えられる。粒子法を非圧縮粘性流体解析に適用した研究には、越塚らによる MPS 法⁵⁾が挙げられる。この手法は、ナビエストークス方程式の粘性項と圧力項を物理的な考察

により粒子場へ離散化する手法であり、非圧縮性の導入には、連続性の式をもとに粒子数密度一定の条件を組み込むなど、特色のある理論から構成されており、自由表面流体の挙動を精度よく表現している。

一方、SPH 法による非圧縮粘性流体解析も近年、おこなわれるようになった。SPH 理論にもとづく非圧縮性流体解析手法としては SPH 法の開発者である Monaghan らによる研究⁶⁾が最初であるが、非圧縮性は密度と圧力の状態方程式から導いており、厳密な非圧縮性は実現されていない。そのためこの手法は WCSPH(Weakly Compressible SPH)と呼ばれている。WCSPH は非常に低いレイノルズ数域(Re 数が 1 以下)に対しては有効であることが示されている⁷⁾が、その後 Cummins ら¹⁰⁾により、プロジェクション法を用いた非圧縮性の導入法が示され WCSPH よりは高いレイノルズ数領域(Re 数が 1000 レベルまで)にたいして粒子法による解析が可能となった。この手法は PSPH(Projection SPH)と呼ばれるが、ナビエストークス方程式の粘性項には人工粘性が使用されているため、粘性項に人為的な影響が入る可能性がある。また PSPH では境界面に仮想的粒子(fiction particle)を配置して境界条件を処理しており、複雑な境界面にたいしては適応性が低い。

* 原稿受付 2003 年 12 月 4 日。

^{*1} 正員、横浜国立大学教育人間科学部(〒240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-5)。^{*2} 横浜国立大学環境情報研究院。^{*3} 国立金鳥工科大学機械工学科(〒730-701 大韓民国慶北龜尾市新坪洞 188)。

E-mail: ysakai@ynu.ac.jp

本研究では、プロジェクション法にかわり、差分解析で実績のある SMAC アルゴリズムを SPH 法に適用し非圧縮性をより厳密に導入する。また PSPH に見られる上記ふたつの短所を、前者にたいしては応力場の解析を導入する手法で、また後者にたいしては MPS 法で開発された、水波表面のような複雑で比較的あいまいな境界を処理する手法により解決を図る。本研究で開発された非圧縮粘性解析手法を従来の手法と比較検討した結果、本手法が精度のよい、安定した解析手法であることが確認された。

2 SPH 法の基礎理論

Monaghan らによって開発された SPH 法は、偏微分方程式の 1 階の空間微分項を Kernel 関数を用いて積分近似する手法であり、その詳細は Swegle らによる研究¹⁰⁾によって明らかにされている。ここでは、粒子法による非圧縮粘性流体解析の理論の基礎となる式について簡略に記述する。

流速、密度、温度などの物理量 $f(x)$ は、次式の Kernel 関数近似を用いて積分表現することができる。

$$f(x) \approx \int f(x') W(x - x', h) dx' \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 W は重み関数であり、現在では 3 次以上の Spline 関数を使用されている。また h は影響半径をあらわす。いま、任意の物理量に関する、1 階の空間微分を考えると、

$$\begin{aligned} \nabla f(x) \approx & \int \nabla [f(x') W(x - x', h)] dx' \dots\dots\dots (2) \\ & - \int f(x') [\nabla W(x - x', h)] dx' \end{aligned}$$

と表され、(2)式の右辺第 1 項は Gauss の定理により、解析領域の境界積分に変換されるが、重み関数の値域は境界内部に存在するため、境界積分はゼロとなる。

$$\begin{aligned} & \int \nabla [f(x') W(x - x', h)] dx' \dots\dots\dots (3) \\ & = \int [f(x') W(x - x', h)] \cdot \hat{n} dS = 0 \end{aligned}$$

ここで $\hat{n}$ は境界積分領域表面における法線ベクトルである。したがって、任意の物理量の偏微分項は、重み関数に関する 1 階微分のみを考慮した次式となる。

$$\nabla f(x) \approx - \int f(x') [\nabla W(x - x', h)] dx' \dots\dots\dots (4)$$

ここで、ある空間内部に有限個の評価点を考え、重み関数 W を用いて、空間内部に分布する物理量を

次式により中心の評価点に内挿する。

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^N \frac{m^j}{\rho^j} f(x^j) W(x - x^j, h) \dots\dots (5)$$

J は影響半径内部に存在する他の粒子群、 ρ は密度、 m は質量である。Spline 補間の性質から、上式は、評価点数が増大すると正解にかぎりなく近接する。(5)式を(4)式に代入すると、Kernel 近似を粒子場へ離散化した下式が求められる。

$$\nabla f(x) \approx - \sum_{j=1}^N \frac{m^j}{\rho^j} f(x^j) \nabla W(x - x^j, h) \dots\dots\dots (6)$$

上式は、微分操作により次式の表現と同等であることも証明できる¹¹⁾。

$$\nabla f(x^j) \approx \frac{1}{\rho^j} \sum_{j=1}^N m^j [f(x^j) - f(x^j)] \nabla W(x^j - x^j, h) \dots\dots (7)$$

$$\nabla f(x^j) \approx - \rho^j \sum_{j=1}^N m^j \left(\frac{f(x^j)}{(\rho^j)^2} + \frac{f(x^j)}{(\rho^j)^2} \right) \nabla W(x^j - x^j, h) \dots\dots (8)$$

上記(6)~(8)式は任意の物理量の空間に関する 1 階の偏微分項を、粒子場によって表現した式であり、一般の偏微分方程式にたいして適用が可能となる。固体の問題においては、応力場は変位場の 1 階微分であるため通常(8)式を用いて、変位場から応力場が直接表現可能となる。また流体解析では、以下の節に記すように、圧力場の gradient や粘性項に関する Laplacian が粒子場によって表現可能となる。このように SPH 法は、粒子場を用いた偏微分方程式の解法のひとつであり、熱伝導方程式、波動方程式なども同一の手法で離散近似が可能である。したがって、連成した現象(流体と固体、固体と熱伝導など)の解析には都合がよいと考えられる。

2-1. 非圧縮粘性流体への適用

非圧縮粘性流体の運動方程式である Navier-Stokes 方程式をラグランジュ的手法であらわすと下式となる。

$$\frac{Du}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \text{grad} P + \nu \nabla^2 u + f \dots\dots\dots (9)$$

ここで u は流速、 ρ は密度、 P は圧力、 ν は動粘性係数、 f は体積力である。SPH 理論は上述したように 1 階の偏微分項を粒子場へ離散化する手法であり、一方 Navier-Stokes 方程式には 1 階微分である圧力項

と2階の微分項である粘性項が存在するため、この2階微分項を離散化するには工夫が必要となる。従来のSPH法(WCSPHおよびPSPH)では、この項を下記の人工粘性で置き換えることにより解決を図っている。

$$\nu \nabla^2 u = -\frac{1}{\text{Re} \xi} \left(\frac{1}{P_a + P_b} \right) \frac{u_{ab} \cdot r_{ab}}{|r_{ab}|^2 + \eta^2} \cdot \nabla_a W_{ab} \cdots (10)$$

ここで、 η は人為的に選択されるパラメータであり Cleary¹²⁾および Cummins ら¹⁰⁾の論文ではそれぞれ 0.2015, 0.24 という値が使用されている。これらは粘性の効果をパラメータ・サーベイによって見極めたうえで選択された値であり、流体理論にとって普遍的な意味を持たないため、厳密な粘性解析とはいえないと思われる。そこで本研究では、流体の応力場を解析することにより、SPH法の基本式(7)にしたがった1階微分操作のみで粘性項を扱う手法を検討する。

本来 Navier-Stokes 方程式の粘性項は、流体の変形プロセスにたいする抵抗として現れる内部応力に起因しており、その応力テンソル τ_{ij} と流速成分 u_i は以下の関係にある。

$$\tau_{ij} = \mu \left(e_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right), \quad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \cdots (11)$$

ここで μ は粘性係数である。上式は粘性により生じる応力と流体の運動(変形)を関連づけているが、これを Newton の粘性の法則をもとに粘性項として表現すると

$$\nu \nabla^2 u = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \cdots \cdots \cdots (12)$$

と表される。すなわち粘性項は応力に関する1階微分であり、応力は変位に関する1階微分であることからSPH理論により直接定式化が可能となる。まず(11)式の流速に関する微分項を(7)式を用いて離散化すると

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho^I} \sum_{j=1}^N m^J (u_i - u_j) \cdot \nabla W(x^I - x^J, h) \cdots (13)$$

と表現される。(11)と(13)式により応力が求められる。一方この応力テンソルを用いて(7)式により粒子場にたいして離散化すれば

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho^I} \sum_{j=1}^N m^J (\tau_{ij}^I - \tau_{ij}^J) \cdot \nabla W(x - x^J, h) \cdots \cdots \cdots (14)$$

と表すことができる。以上の、2段階の操作により、粘性項をSPH理論の範囲で直接に扱うことが可能となる。また圧力項については、下式により離散化をおこなう。

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho^I} \sum_{j=1}^N m^J (P^I - P^J) \cdot \nabla W(x - x^J, h) \cdots \cdots \cdots (15)$$

応力テンソルを用いて Navier-Stokes 方程式の粘性項を表現する手法は、差分法などでは通常おこなわれることはないが、粘性という物理現象を、より現象に即して考慮するとすれば、流速と応力場に関する空間微分操作を繰り返す結果として2階の偏微分項が現れるという上述の手法は Navier-Stokes 方程式の粘性項の本来的な性格を自然に扱っているといえる。またこの手法の利点としては上記のSPH理論への適合性のほかに、流体の内部応力を、固体の3次元応力テンソルと同じ物理量で表現しているため、流体—固体の連成解析が統一手法として表現できることがあげられる。

2-2. 時間積分アルゴリズムと境界条件

Navier-Stokes 方程式の時間積分法として、ここでは SMAC アルゴリズム¹³⁾を採用する。SMAC 法は非圧縮粘性流体の差分解法で広く使用されるアルゴリズムであり、精度が高い手法である。SMAC 法では、現時刻(n ステップ)における流速 u 、圧力 P 用いて仮の速度をまず求める。

$$u_i^* = u_i^n + \Delta t \left(-\frac{1}{\rho} \text{grad} P^n + \nu \nabla^2 u_i^n + f \right) \cdots (16)$$

仮の流速 $\tilde{u}$ はこのままでは連続の式を満たさないため、非回転速度場 u を用いて、 $n+1$ ステップ目の速度を表すことにする。このとき u' は連続性を満たさなければならない。

$$u_i^{n+1} = u_i^* + u_i' \cdots \cdots \cdots (17)$$

一方、 $n+1$ ステップでの圧力場は

$$P^{n+1} = P^n + P' \cdots \cdots \cdots (18)$$

と書け、式(16), (17), (18)を用いて、 $n+1$ ステップにおける流速 u^{n+1} は

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + \Delta t \left(-\frac{1}{\rho} \text{grad} p^{n+1} + \nu \nabla^2 u_i^n + f \right) \\ &= u_i^* - \Delta t \frac{1}{\rho} \text{grad} P^* \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

となる。 u^* は連続の式を満たさなくてはならないので、上式の発散をとると次式の圧力に関するポアソン方程式が求められる。

$$\nabla^2 P^* = \frac{\rho}{\Delta t} \text{div} u_i^* \quad \dots\dots\dots (20)$$

このポアソン方程式は 2 階の偏微分式であり、したがって SPH 法の基礎式から直接に離散化することができない。ここでは圧力 P に関する 1 階微分を中央差分近似式を用いて表し、その差分式に SPH 法の基礎式を適用して 2 階微分を表す Cleary らの方法にしたがって、ポアソン方程式の左辺を離散化する。

$$\nabla^2 P^* = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} \left(\frac{4}{\rho_a + \rho_b} \right) \frac{P_{ab} r_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{|r_{ab}^2|} \dots\dots\dots (21)$$

ここで $P_{ab} = P_a - P_b$, $r_{ab} = r_a - r_b$ である。

この方法は、同一の物理量(圧力 P)を連続して 2 回、離散化近似し 2 階微分を表現することを避ける(こうすると離散化誤差が 2 乗で拡大する可能性が考えられる)には有効であるが、差分式を介するため、粒子法としての一貫性を欠く短所があり、未だ検討の余地があると思われる。一方、ポアソン方程式の右辺については、速度に関する 1 階微分であるから、

$$\nabla^2 P^* = \rho_i \sum_j m_j \left(\frac{\dot{u}_i}{\rho_i} + \frac{\dot{u}_j}{\rho_j} \right) \cdot \nabla W(x^i - x^j, h) \dots\dots\dots (22)$$

と離散化することができる。SMAC 法による SPH 解析手法(以下 SMAC-SPH)にしたがった非圧縮粘性流体の定式化は以上であり、まず(16)式により、仮の流速 $\tilde{u}$ を陽的に求め、その速度により粒子を移動させる(仮の移流計算)。次に非圧縮性条件を満たすように(20)式の圧力ポアソン方程式を陰的に解いて修正された圧力、速度を求め粒子を移動させる(真の移流計算)。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta u \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$P^{n+1} = P^n + \Delta P \quad \dots\dots\dots (24)$$

粒子の真の移流計算(23)式の際には仮の移流分は補正する。これで SPH 法による非圧縮粘性流れ解析の 1 ステップが完了する。これを繰り返すことによって流体挙動が表現される。

2-3 境界条件

境界条件としては以下の粒子境界条件を使用する。

- (1) 固定境界 流体を囲む容器は固定粒子を用いて表現する。固定境界では速度・変位をゼロと固定する。
- (2) 自由境界 粒子数密度境界条件を使用する。

一般に、自由表面流体解析では流体と空間領域の境界が複雑となり、また流体を有限個の粒子で表現する粒子法では、両者の境界面が厳密には定義できない。さらに流体が大変形し、流体表面が破碎しあるいは飛沫となる場合を想定すれば、流体表面の明瞭な定義は意味を成さなくなる。MPS 法では流体の自由表面の定義として、粒子数密度概念を用いた条件を導入している。粒子数密度 n_i は下式により定義される。

$$n_i = \sum_j^N W(x - x^j, h) \quad \dots\dots\dots (25)$$

流体を表現する粒子群の粒子数密度分布をみると、非圧縮性流体内部では粒子数密度が一定値に保存される。一方、流体表面では、おなじ影響半径内部に存在する粒子数は減少するから流体内部よりも粒子数密度は低下する。したがって、粒子数密度が流体内部の一定値よりもある閾値以下に低下した部分は、自由表面あるいは、その近傍にある流体粒子であると考え。

越塚らは最大粒子数密度の 0.96 程度にまで低下した領域を自由表面とみなす条件を提案⁴⁾している。上記の数値は、経験的に求められた値であるが、筆者らの検討によれば、0.90～0.97 程度の範囲で使用して、自由表面の形成にはほとんど大差は現れない。すなわち、粒子数密度条件を用いた自由表面境界の定義法は、あいまいな流体表面を柔軟に表現する手法として有効であるといえる。本研究では、「最大粒子数密度の 0.95 以下となる粒子数密度をもつ粒子は自由表面に位置する粒子」として、その粒子位置の内圧はゼロとしている。この手法を SPH 法に導入することにより、PSPH(一種の *phantom* 粒子による鏡像処理をおこなう)などでおこなわれた複雑な境界条件の扱いはきわめて簡略化することができる。

3. 解析結果

3-1. クエット流

本解析手法をまず基本的な流体モデルであるクエット流に適用し精度検証をおこなう。

以下のすべての解析では、非圧縮粘性流体として水を想定し、粘性係数は $0.017 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 、比重は $1.0 \times 10^{-6} \text{ kg/m}^3$ とした。

解析モデルは $y=0$ と $y=L$ の位置にある無限平板を想定し、最初静止していた上部板が $t=0$ において x 軸方向に速度 u_{x0} で動き始める。この流れについては下記の理論解がある。

$$u_x(y, t) = \frac{u_{x0}}{L} y + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2u_{x0}}{n\pi} (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \cdot \exp\left(-v \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \right) \quad \dots \dots \dots (26)$$

ここで u_x は x 軸方向への流速である。 $L=10^3 \text{ m}$, $u_{x0}=1.25 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}$ とし、また 2 平板間に 100 個の粒子を等間隔に配置した。時間増分は 0.001 sec を使用した。このモデルのレイノルズ数は下式を用いて表される。

$$\text{Re} = \frac{u_{x0} L}{v} \quad \dots \dots \dots (27)$$

このモデルでは 0.001 以下であり、低 Re 流れである。

Fig. 1 SPH and series solutions for Couette flow.

図 1 に理論解と粒子法解の比較をしめす。両者はよく一致していて、その最大誤差は 0.5% 以下である。この最大誤差はピーク値に現れるが、粒子数を増加すると誤差は減少する。平板間の y 軸方向に粒子数を 20 個使用したモデルでは誤差はおおよそ 2% であり、粒子数 500 個を用いた場合の誤差は 0.001% 以下となる。

3-2. ポアズイユ流れ

次に体積力によって生ずるポアズイユ流れを解析した。解析モデルはクエット流れ解析と同様であり、2 枚の板が最初静止していて、 $t=0$ において x 軸方向に体積力 F が作用するものとする。このモデルの理論解は以下のとおりである。

$$u_x(y, t) = \frac{F}{2v} y(y-L) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4FL^2}{v\pi^3(2n+1)^3} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \cdot \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 v}{L^2} t\right) \right) \quad \dots \dots \dots (28)$$

解析に使用したパラメータはクエット流れ解析の場合と同様である。ただし $F=10^4 \text{ ms}^{-2}$ で、2 枚の平板の間には 100 個の粒子を配置した。

Fig. 2 SPH and series solutions for Poiseuille flow.

図 2 に理論解と粒子法解の比較を示す。このモデルの Re 数は 1.25×10^2 、 x 軸方向速度は $u_{x0}=1.25 \times 10^5 \text{ ms}^{-2}$ である。解析解と粒子法による解の一致は非常によく、最大誤差(ピーク値に現れる)は 0.4% 程度であった。粒子法による解の誤差は粒子数の増大により減少し粒子数 500 個を使用すると誤差は 0.001% 以下となる。

以上の結果から、低 Re 流れ解析では、本解析手法の精度は十分高いことがわかる。

Fig.3 The wave modes on seich problem.

3.3. 容器内部の静振波

2次元波の精度検証として、水深が一定の容器に起こる波を扱う。図3に示すように、容器や湖などの閉じられた系では、モード m にしたがって、規則的な静振波(セイシュ)が発生する。

(a) Model A ($m=1/2$)

(b) Model B ($m=1$)

Fig.4 Particle models for seich problems

いま波長を l とすると、静振波の波形と振動数は、以下の式で与えられる⁽⁹⁾。

$$y = a \cos\left(\frac{2\pi mx}{l}\right) \sin \sigma \quad \dots \dots \dots (29)$$

$$\sigma = c\left(\frac{2\pi m}{l}\right) \quad \dots \dots \dots (30)$$

ここで a , c は振幅、波速である。この静振波の周期は

$$T \cong \frac{2\pi}{\sqrt{gk \tanh(kh)}} \quad \dots \dots \dots (31)$$

$$k = \frac{2\pi m}{l} \quad (m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots)$$

で与えられる。図4に寸法 $100\text{cm} \times 100\text{cm}$ の容器に入れられた流体の静振波モデルを2例示す。

(a)はモード $m=1/2$, (b)は $m=1$ の振動をする流体の初期状態を示している。振幅 $a=10\text{cm}$ 平均水深は 40cm であり、流体の粘性係数は $0.017 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ である。ふたつのモデルはそれぞれ $4010, 3950$ 個の粒子で表現されている。図5はモデルBの解析結果を経過時間で示している。時間増分は 0.001sec としている。初期状態からそれぞれ $0.4, 0.6, 0.8, 1.0\text{sec}$ 経過した波形であるが、波底は上向きの、波山は下向きの運動を始めて((a)図), 平均水位までもどり((b)図), ついで中央部が先端部に噴き上げ((c)図), 先端部は徐々に丸みを帯びて、初期形状とは反転した $\sin$ 曲線を描く((d)図)。ただし、図(d)に明らかなように、流体粒子は波表面部で若干の乱れが発生する。これは波の中央部における吹上により、波形がやや崩れる結果である。流体速度は、中央部の噴き上げ部分において上向きに最大 0.35 m/sec 程度となっている。これより、本解析モデルの Re 数はおおよそ 1000 レベルにある。

Fig.5 Variations of seich waves ($m=1$).

表1は図4に示したモデル($m=1/2, 1$)および同寸法の $m=3/2$ のモデルを用いて静振波の解析をおこない、求められた波形から振動周期を求めた結果をまとめてしめしている。同図に明らかなように解析結果は、理論解と非常に良く一致している。

Table.1 Frequencies of each mode

m	1/2	1	3/2
Theory	1.23	0.81	0.65
SPH	1.22	0.80	0.64

(sec)

3.4. 水柱崩壊解析

従来の解法とくらべて粒子法の長所は、流体の大変形挙動を比較的精度よくあつかえる点にある。上記のクエット流、ポアズイユ流解析などは解析領域が大きく変形することはない、また静振波も $\sin$ 波の規則的な上下振動であり、有限要素法や差分法などオイラー型の解法で精度よく解析でき、ラグランジュ型解法である粒子法を使用するメリットはあまりない。しかし、流体の変形挙動が大きかったり複雑である場合には粒子法が有効となる。

例として水柱崩壊現象を考える。この場合、流体は急速に変形し、さらに分裂、衝突、合体などを繰り返す。このような流体の複雑挙動は、固定座標系をもとにした従来の解析手法では非常に扱いが困難であると思われる。

さて非圧縮粘性流体解析を扱う粒子法としては、序論でも述べたように、すでに MPS 法および SPH プロジェクション法(PSPH)が提案され、様々な流体問題に適用されている。越塚らが提案した MPS 法は、非圧縮性を厳密に粒子法へ導入した最も先駆的な手法であり、流体の多様な大変形挙動を精度よく扱えることが示されている。一方、SPH 法をベースとして非圧縮性をプロジェクション法により導入した PSPH 法は、人工粘性を使用しているため、解析に不自然さが加わる可能性が指摘されている。以下に、これら 2 法と本解析手法の比較をおこなう。図 6 に解析モデルを示す。3 手法とも同様であり、容器の粒子数 1145 水柱の粒子数 676 粘性係数 0.017 時間増分 0.001s である。また SPH プロジェクション法では人工粘性項(式 9)のファクターとして Cummins らが使用した代表値を用いる。図 7 に崩壊後の水柱変形を示す。水柱は下部から横方向に変形をはじめ((a)図)、上部の下方沈下と下部の横変形のために半帽子型((b),(c)図)となり反対壁面に達して上方に噴き上げる。非圧縮性を課しているため、粒子数密度は、水滴化した部分を除き一定の密度が保持されている。

Fig.6 The model for destruction of a water column.

(a) $t=0.1\text{sec}$

(b) $t=0.2\text{sec}$

(c) $t=0.25\text{sec}$

(d) $t=0.3\text{sec}$

(e) $t=0.35\text{sec}$

Fig.7 Destruction process of a water column.

(a) MPS result ($t=0.25\text{sec}$) (b) PSPH result ($t=0.25\text{sec}$)

Fig.8 Liquid configurations by MPS and PSPH

図 8 に MPS 法と PSPH 法により求めた流体形状をしめす。崩壊開始から 0.25sec 後の解であるが、MPS 法の結果は本解析結果(Fig.7 (c)図)とはほぼ同等である。流体の変形形状については、崩壊の全過程を通じて、MPS と本手法の結果は非常に良い一致を示す。一方、PSPH 法の解は前記手法の解の形状と似てはいるが、粒子ムラが発生して流体の輪郭が曖昧になっている。これは、プロジェクション法による非圧縮性の導入が Cummings らのアルゴリズムでは十分厳密に導入できないことを示していると思われる。一方、厳密に SMAC 法にもとづくアルゴリズムを用いた本手法の解は、比較的精度良く、非圧縮性を導入し、また粘性効果も物理的に適切に表現されていると思われる。

4 結論

SMAC アルゴリズムをもちい、SPH 粒子法による非圧縮粘性流体解析アルゴリズムを開発した。また流体の応力場を粘性項計算に使用することにより、従来の手法でおこなわれていた人工粘性を使用せず、物理的に自然な粘性効果を解析に導入した。また粒子数密度条件を与えることで自由表面境界における境界条件の扱いを簡易にすることが可能となった。本アルゴリズムを用いた流体解析をおこなったところ、低 Re 数領域(Re 数が 1 以下)から Re 数がおよそ 1000 レベルまでの範囲で精度の良い解が求められることが示された。今後は、さらに高い Re 数領域の非圧縮粘性解析にたいして、本手法のアルゴ

リズムの精度を検討し、粒子法による流体解析の適用領域を拡大してゆくことが望まれる。

謝辞

本研究論文は、独立行政法人「鉄道建設・運輸施設整備支援機構」基礎的研究推進制度による受託研究にもとづきおこなわれた成果をまとめたものである。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- (1) R.A. Gingold and J.J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars Mon. Not. R. astr. Soc. 181,(1977),375-389
- (2) J.J. Monaghan, An Introduction to SPH, Computer Physics Communications, 48,(1988),89-96
- (3) L.D. Libesky et al. High Strain Lagrangian Hydrodynamics J. Comput. Phys. 109(1993),67-75
- (4) 宋, 酒井, 山下 SPH 法による弾塑性解析手法の検討, 日本機械学会論文集 A 68 巻 669 号(2002), 772-778
- (5) P.W. Cleary and J.J. Monaghan, J. Comput. Phys. Conduction Modelling Using Smoothed Particle Hydrodynamics 148,(1999),227-264
- (6) S. Koshizuka, H. Tamako and Y. Oka A Particle Method for Incompressible Viscous Flow with Fluid Fragmentation, Comp. Fluid Dynamic Journal, vol.4, no.1(1995) 29-46
- (7) S. Koshizuka, A. Nobe and Y. Oka, Moving Particle Semi-implicit Method, Proc. 3rd Workshop on Supersimulations for Nuclear Power Plants, December 7, 1995, Tokyo, 43-49
- (8) J.J. Monaghan, J. Comput. Phys. Simulating Free Surface Flows with SPH 110(1994),399-406
- (9) J.P. Morris, P.J. Fox and Y. Zhu, Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH J. Comput. Phys. 136(1997),214-226
- (10) S.J. Cummins and M. Rudman, An SPH Projection Method J. Comput. Phys. 152(1999),584-607
- (11) J.W. Swegle et al. An Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics SANDIA Report SAND93-2513 (1994)
- (12) P.W. Cleary, SPH Technical Note 8, CSIRO Technical Report DMS-C(1996)
- (13) 数値流体力学編集委員会編, 非圧縮粘性流体解析, 東京大学出版会(1999)96
- (14) 越塚誠一, 数値流体解析, 培風館 (1997) 163