乱流の非等方性と壁面のブロック効果による
平板上での平均流の発生*長 田 孝 二^{*1}, Julian C. R. HUNT^{*2}Mean Flow Generation near a Flat Surface by Direct Impingement of an
Anisotropic Turbulence and Blocking EffectKouji NAGATA^{*3} and Julian C. R. HUNT^{*3} Department of Mechanical Engineering, and Advanced Research Institute
of Fluid Science and Engineering, Kyoto University,
Yoshidahonmachi, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8501 Japan

Generation of Prandtl's secondary flow of the second kind by direct impingement of anisotropic turbulence is studied in a shear-free boundary layer using a boundary-layer theory and a linear Rapid Distortion Theory (RDT). The three-dimensional spectral tensor for homogeneous axisymmetric turbulence is applied to the linear theory developed for shear-free boundary-layer by Hunt & Graham (1978). Fully analytical solutions for the three-component turbulent intensities of velocity fluctuations and Reynolds shear stresses are obtained. The results show that the turbulence intensity of vertical velocity fluctuations is not distributed equally in streamwise and spanwise directions near a flat surface in this type of homogeneous axisymmetric free-stream turbulence whereas it is distributed equally in streamwise and spanwise directions for isotropic free-stream turbulence. Reynolds stress gradients caused by the direct impingement of the anisotropic large-scale eddies onto the surface generate the mean flow except in the case where the axis of the turbulence is parallel to the direction of the surface. The effect also explains how in complex turbulent flows near rigid surfaces the anisotropic eddy structures affect the mean flow.

Key Words: Boundary Layer, Velocity Distribution, Turbulent Flow, Linear Theory, Secondary Flow, Anisotropic Turbulence, Axisymmetric Turbulence

1. 結 言

壁面上の乱流場において壁面近傍にレイノルズ応力こう配が存在する場合、プラントルの第二種二次流れ⁽¹⁾と呼ばれる平均流が発生することが知られている。例えば、ダクト内流れのコーナー部で見られる二次流れ^{(2)~(4)}もプラントルの第二種二次流れに分類される。壁面近傍で発生する二次流れは、壁面を通しての伝熱やダクト内での混合現象に大きな影響を及ぼすため、二次流れの発生メカニズムを解明し、その定量的な予測を行うことは機械工学上極めて重要である。

プラントルの第二種二次流れ発生の原因となるレイ

ノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$ ($i = j$ の場合も含む) こう配の発生機構は流動場により異なるが、従来の研究では、おもにダクトコーナー部に代表される壁面形状の非一様性や平均速度こう配に着目して研究が行われてきた。一方で、Högström, Hunt & Smedman⁽⁵⁾は、平板上の乱流境界層において、壁面のブロック効果^{(6)~(8)}がレイノルズ応力の生成に大きな影響を及ぼすことを示している。壁面によるブロック効果とは、速度の鉛直方向成分が壁面上で零にならなければならないという境界条件に起因する効果であり、(i) レイノルズ数が高い境界層乱流場⁽⁵⁾, (ii) 壁面から離れた場所で乱流変動が生成され、かつ壁面近傍でのシアによる乱流生成が小さい(もしくは無視できる)場合^{(8)~(11)}、に重要となる。特に、(ii) の場合、平板上の乱流境界層を考えると、生成される乱流が一様等方性であればブロック効果によるレイノルズ応力の生成はない^{(6) (7)}が、乱

* 原稿受付 2003年12月15日。

^{*1} 正員、京都大学大学院工学研究科(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)。^{*2} Department of Geological Science & Department of Space & Climate Physics, University College London (Gower Street, London WC1E 6BT, UK).

E-mail: nagata@mech.kyoto-u.ac.jp

流の非等方性が強い場合には、非等方性乱流渦と壁面のブロック効果によってレイノルズ応力こう配が発生し、その結果、平板上においても平均流が発生するというシナリオが予想される⁽¹²⁾。しかし、この壁面のブロック効果による平均流の発生に関しては、これまでの研究ではほとんど明らかにされておらず、その定量的な予測もなされていない。

そこで、本研究では、一様非等方性乱流と壁面によるブロック効果⁽⁶⁾⁽⁷⁾による平均流の発生を、境界層理論と Rapid Distortion Theory (RDT) に基づく線形解析^{(6)~(8)}により予測することを主な目的とした。一様非等方性乱流として、壁面上の乱流境界層や管内流、チャネル流等で観察される一様軸対称乱流を用い、壁面近傍における速度変動強度とレイノルズ応力の解析解を求めた。さらに、壁面近傍でのレイノルズ応力のこう配から、発生する平均流の強さを解析的に求めた。

2. おもな記号

- K_i : 無次元化された i 方向の波数 ($= k_i L_\infty$)
 K : 波数ベクトルの大きさ ($= (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2)^{1/2}$)
 L_∞ : 一様流の主流方向積分距離
 p : 圧力変動
 t : 時間
 T : 無次元時間 ($= tu'_\infty / L_\infty$)
 u_i : i 方向の速度変動
 u'_∞ : 一様流の速度変動強度 ($= [(u'_{\infty 1})^2]^{1/2}$)
 $\bar{u}_\infty$: 一様流の時間平均流速
 Y : 無次元化された低壁面からの鉛直方向距離 ($= y / L_\infty$)
 δ_{ij} : クロネッカのデルタ ($= 1$ if $i = j$, $= 0$ otherwise)
 $\Theta_{\infty ij}$: 無次元化された一様流の一次元エネルギースペクトル関数
 ν : 動粘性係数
 ρ : 密度
 $\Phi_{\infty ij}$: 無次元化された一様流の三次元エネルギースペクトルテンソル

3. シアーのない壁面上乱流に対する線形解

3-1 対象とする流れ場および線形方程式の解法

対象とする流れ場の模式図を図 1 に示す。本研究で対象とする流動場および線形方程式の解法は、Hunt & Graham⁽⁶⁾、Nagata ら⁽⁷⁾と同一である。壁面の影響がない上流部で一様非等方性乱流場が生成され、一様

Fig. 1 Sketch showing shear-free boundary layer and impingement of an anisotropic turbulence and blocking effect

流速 $\bar{u}_\infty$ で移流される場合を考える。主流方向 $x = 0$ の位置から壁面が存在し、 $x = 0$ における時刻を $t = 0$ とする。壁面によるブロック効果のみに着目するため、壁面は一様流と同じ速度で動く⁽⁹⁾⁽¹³⁾ものと仮定する。境界層近似および RDT の仮定

$$u'_\infty / \bar{u}_\infty \ll 1 \dots \dots \dots (1)$$

$$u'_\infty L_\infty / \nu \gg 1 \dots \dots \dots (2)$$

$$t / T_L < 1 \dots \dots \dots (3)$$

により、次の線形化された支配方程式が得られる。ここで、 $T_L = L_\infty / u'_\infty$ である。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{u}_\infty \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + O\left(\frac{u'^2_\infty}{L_\infty}\right). \quad (4)$$

方程式の解法については既報⁽⁶⁾⁽⁷⁾を参照されたいが、基本的には、本研究で対象とする乱流場は平均シアーのない(発生する平均流が小さい)渦なしポテンシャル流れであり、壁面上での境界条件を満足する条件でラプラス方程式を解くことによって速度ポテンシャルが計算され、そのこう配から速度場が得られる。なお、 $t \rightarrow \infty$ の擬定常状態では慣性項および発生する平均流によるシアーの影響も考慮する必要があるので、本研究で用いた線形解析手法は適用できないことに注意が必要である。

3-2 軸対称非等方性乱流モデル 本研究では、最も単純な一様非等方性乱流のモデルとして、一様軸対称乱流を用いた。一様軸対称乱流に対する三次元エネルギースペクトル関数 $\Phi_{\infty ij}$ は波数ベクトル $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$ と乱流の対称軸の単位ベクトル $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ のみに依存し、次式で表される⁽¹⁴⁾。

$$\Phi_{\infty ij}(\mathbf{K}) = A_1 K_i K_j + A_2 e_i e_j + A_3 \delta_{ij}$$

$$+A_4 e_i K_j + A_5 e_j K_i \dots \dots \dots (5)$$

ここで、 $A_1 \sim A_5$ は $K = (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2)^{1/2}$ と $\mathbf{K} \cdot \mathbf{e}$ の関数である。本研究では非圧縮性乱流を対象とするため $\Phi_{\infty ij} K_j = 0$ であり、さらに i と j の対称性を考慮すると、(5) 式は次式で表される。

$$\Phi_{\infty ij}(\mathbf{K}) = I_{ij} B_1(K, \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}) + H_{ij} B_2(K, \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}) \quad (6)$$

ここで、

$$I_{ij} = \delta_{ij} - \frac{K_i K_j}{K^2} \dots \dots \dots (7)$$

$$H_{ij} = e_i e_j + \frac{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{e})^2}{K^2} \delta_{ij} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{e}) \frac{(e_i K_j + e_j K_i)}{K^2} \quad (8)$$

$$B_1(K, \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}) = -K^2 A_1, \quad B_2(K, \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}) = A_2 \quad (9)$$

である。等方性乱流の場合は、

$$B_1(K, \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}) = \frac{E(K)}{4\pi K^2}, \quad B_2(K, \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}) = 0 \quad (10)$$

となる。ただし、 $E(K)$ は三次元エネルギースペクトルである。すなわち、このスペクトルテンソルは本質的に非等方性乱流と等方性乱流に対応するスペクトルテンソルの和である。

Sreenivasan & Narahimha⁽¹⁵⁾ は、最も単純な軸対称乱流のモデルとして、 B_1 と B_2 が K のみの関数であると仮定した (Ansatz 1)。すなわち、

$$B_1 = B_1(K), \quad B_2 = B_2(K) \dots \dots \dots (11)$$

本研究では、 B_1 と B_2 として、以下の形を仮定した。

$$B_1 = C_1 K^2 \exp(-\lambda_1 K^2) \dots \dots \dots (12)$$

$$B_2 = C_2 K^2 \exp(-\lambda_2 K^2) \dots \dots \dots (13)$$

ここで、 C_1, C_2 は定数であり、 $\lambda_1^{-1/2}, \lambda_2^{-1/2}$ は等方性および非等方性乱流渦の代表的なスケールに相当する。等方性乱流の場合⁽⁷⁾には $C_2 = 0, C_1 = 1/\pi^4, \lambda_1 = 1/\pi$ となる。本研究では、乱流の対称軸が壁面に対して角度 α を持つ ($\mathbf{e} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$) 場合について計算を行った¹。このとき、対応する三次元エネルギースペクトル関数は以下の通りとなる。

¹この場合には、壁面のブロック効果によってスパン方向の渦度 Ω_z が発生し、その結果、主流方向に平均流が発生する。本来の二次流れの定義は「主流に対して垂直断面内で発生する流れ」であり、そのためには主流方向の渦度 Ω_x を発生する条件、すなわち、 $\mathbf{e} = (0, \sin \alpha, \cos \alpha)$ のほうが望ましいが、本研究では、乱流の非等方性と壁面のブロック効果による平均流の発生機構をなるべく単純化して示すために、 $\mathbf{e} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ の場合を考えた。当然であるが、本研究で対象としたシアのない様乱流場に対しては、乱流の対称軸をどの面内にとっても発生する平均流の向きが変わるだけで得られる結果は定性的に変化しない。

$$\begin{aligned} \Phi_{\infty 11} &= (K_2^2 + K_3^2) C_1 e^{-\lambda_1 K^2} \\ &+ (K_2^2 + K_3^2 \cos^2 \alpha) C_2 e^{-\lambda_2 K^2} \dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\infty 22} &= (K_1^2 + K_3^2) C_1 e^{-\lambda_1 K^2} \\ &+ (K_1^2 + K_3^2 \sin^2 \alpha) C_2 e^{-\lambda_2 K^2} \dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\infty 33} &= (K_1^2 + K_2^2) C_1 e^{-\lambda_1 K^2} \\ &+ (K_1^2 \cos^2 \alpha + K_1 K_2 \sin 2\alpha + \\ &K_2^2 \sin^2 \beta) C_2 e^{-\lambda_2 K^2} \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\infty 12} &= \Phi_{\infty 21} = -K_1 K_2 C_1 e^{-\lambda_1 K^2} \\ &+ \left(\frac{1}{2} K_3^2 \sin 2\alpha - K_1 K_2\right) C_2 e^{-\lambda_2 K^2} (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\infty 23} &= \Phi_{\infty 32} = -K_2 K_3 C_1 e^{-\lambda_1 K^2} \\ &- \left(\frac{1}{2} K_1 K_3 \sin 2\alpha + K_2 K_3 \sin^2 \alpha\right) \times \\ &C_2 e^{-\lambda_2 K^2} \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\infty 31} &= \Phi_{\infty 13} = -K_1 K_3 C_1 e^{-\lambda_1 K^2} \\ &- (K_1 K_3 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} K_2 K_3 \sin 2\alpha) \times \\ &C_2 e^{-\lambda_2 K^2} \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

速度変動強度の条件

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\infty ii}(\mathbf{K}, \alpha = 0) d\mathbf{K} \\ &= \frac{\overline{u_{\infty i}^2}}{\overline{u_{\infty 1}^2}} = \left(1, \frac{1}{R}, \frac{1}{R}\right) \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

および、等方性乱流の場合⁽⁷⁾と積分距離が等しいという条件

$$\begin{aligned} &\Theta_{\infty 11}(K_1 \rightarrow 0, \alpha = 0)_{\text{aniso.}} \\ &= \Theta_{\infty 11}(K_1 \rightarrow 0)_{\text{iso.}} = \frac{1}{\pi} \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

から各定数を求めると以下の通りとなる。

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi} \text{Fn}(R, \beta)^{-2} \dots \dots \dots (22)$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta}{\pi} \text{Fn}(R, \beta)^{-2} \dots \dots \dots (23)$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi^4} \left(-1 + \frac{2}{R}\right) \text{Fn}(R, \beta)^{-5} \dots \dots \dots (24)$$

$$C_2 = \frac{2\beta^{5/2}}{\pi^4} \left(1 + \frac{1}{R}\right) \text{Fn}(R, \beta)^{-5} \dots (25)$$

ただし,

$$\text{Fn}(R, \beta) = \left(-1 + \frac{2}{R}\right) + 2\beta^{1/2} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \quad (26)$$

であり, R は速度変動強度の比,

$$R = \frac{\overline{u_{\infty 1a}^2}}{\overline{u_{\infty 2a}^2}} = \frac{\overline{u_{\infty 1a}^2}}{\overline{u_{\infty 3a}^2}}, \dots (27)$$

$\beta = \lambda_2/\lambda_1$ は渦スケールの比である。また, 速度変動強度の添字 a は乱流の対称軸に沿った座標系で見た値 (または $\alpha = 0$ の場合の値) である。本研究では, R の値として $R = 1$ (等方性乱流)⁽⁷⁾, $3/2$, および 2 を, β の値として $\beta = 4$ および 9 を用いて考察を行った。一例として, 対応するパワースペクトルの分布を $R = 3/2$, $\beta = 4$ の場合について図 2 に示す。 $\beta > 1$ としたので大スケールの乱流運動が非等方性を, 小スケールの乱流運動が等方性乱流の性質を示すことになる。これは, 局所等方性の観点からみても妥当であり, 対流境界層などの自然環境中や工業装置内で見られる非等方性乱流場とも対応する⁽¹⁵⁾。なお, 円管内乱流 (中心軸位置) においては $R = 1.6 \sim 2.0$, 平行平板間乱流 (流路中央) では $R = 1.84$, 乱流境界層においては $R = 1.6$ とした場合に本モデル (Ansatz 1) が実測値と良好に一致することが示されている⁽¹⁵⁾。ただし, 渦スケール比 β に関しては過去の研究においても実験との比較はされておらず, 今後の研究で明らかにする必要がある。

4. 結果および考察

4.1 速度変動強度およびレイノルズ応力 速度変動強度およびレイノルズ応力の解析解は式 (28)~(32) で表される。なお, 一様流 ($Y \rightarrow \infty$) における速度変動強度とレイノルズ応力は以下の通りとなる。

$$\overline{u_{\infty 1}^2} = 1 - \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{R}\right) \dots (33)$$

$$\overline{u_{\infty 2}^2} = \frac{1}{R} + \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{R}\right) \dots (34)$$

$$\overline{u_{\infty 3}^2} = \frac{1}{R} \dots (35)$$

$$\overline{u_{\infty 1} u_{\infty 2}} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(1 - \frac{1}{R}\right) \dots (36)$$

すなわち, $\alpha < \pi/2$ の範囲では α が大きくなるにつれて主流方向の速度変動強度が減少し, 鉛直方向の速

Fig. 2 The one-dimensional power spectra for homogeneous axisymmetric free-stream turbulence for $R = 3/2$ and $\beta = 4$. —, isotropic ($R = 1$); ----, $\alpha = 0$; - - - -, $\alpha = \pi/6$; ·····, $\alpha = \pi/4$; - · - ·, $\alpha = \pi/3$

度変動強度は増加する。スパン方向の速度変動強度は変化しない。これは, 乱流の対称軸の回転を考慮すれば容易に予想される。また, 当然, 乱流エネルギーは α に依らず一定 ($= 1 + 2/R$) である。また, 一様流の

レイノルズ応力は $\alpha = \pi/4$ のときに最大となる。式 (33)~(36) より, $R = 1$ の場合には,

$$\overline{u_{\infty 1}^2} = \overline{u_{\infty 2}^2} = \overline{u_{\infty 3}^2} = 1 \quad (37)$$

$$\overline{u_{\infty i} u_{\infty j}} (i \neq j) = 0 \quad (38)$$

となり, 等方性乱流場の速度変動強度およびレイノルズ応力に対応する。

4.1.1 軸対称乱流の対称軸が壁面に対して平行 ($e = (1, 0, 0)$) な場合 $R = 1$ (等方性乱流), $3/2$ および 2 , $\beta = 4$ および 9 の場合に対する速度変動強度の壁面からの無次元距離 $Y (= y/L_\infty)$ に対する分布を図3に示す。ここで, 速度変動強度は一樣流における値 $\overline{u_{\infty i}^2}$ で無次元化されている。図3より, 一樣流が等方性乱流の場合⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁹⁾と同様に, 主流およびスパン方向の速度変動強度は壁面に近づくにつれて増加し, 鉛直方向の速度変動強度は減少することがわかる。ここで, 壁面近傍 ($Y \rightarrow 0$) での速度変動強度は,

$$\overline{u_1^2}/\overline{u_{\infty 1}^2} (Y \rightarrow 0) = \frac{5}{4} + \frac{1}{4R} \quad (39)$$

$$\overline{u_2^2}/\overline{u_{\infty 2}^2} (Y \rightarrow 0) = 0 \quad (40)$$

$$\overline{u_3^2}/\overline{u_{\infty 3}^2} (Y \rightarrow 0) = -\frac{R}{4} + \frac{7}{4} \quad (41)$$

となる。すなわち, 一樣流が等方性乱流の場合 ($R = 1$) には壁面の極近傍では主流方向とスパン方向の速度変動強度が等しくなる ($\overline{u_1^2}/\overline{u_{\infty 1}^2} (Y \rightarrow 0) = \overline{u_3^2}/\overline{u_{\infty 3}^2} (Y \rightarrow 0) = 1.5$) のに対して, 一樣流が非等方性乱流の場合には主流方向とスパン方向の速度変動強度は一致しない。また, 速度変動強度の分布は R に強く依存し, β の影響は小さいことがわかる。なお, 乱流の対称軸が壁面に対して平行な場合には, レイノルズ応力成分は全て零となる。

4.1.2 軸対称乱流の対称軸が壁面に対して角度 $\alpha (\neq 0)$ をもつ場合 $R = 3/2$, $\beta = 4$ の場合に対する速度変動強度の鉛直方向分布を図4に示す。なお, $R = 2$, $\beta = 9$ の場合についても定性的に同じ結果が得られたので, ここでは紙面の都合上図を省略する。図4より, 壁面に対する乱流の対称軸の角度 α が大きくなるにつれて壁面近傍での $\overline{u_1^2}$ と $\overline{u_3^2}$ の増加傾向が顕著に見られることがわかる。すなわち, 壁面近傍において $\overline{u_1^2}$ と $\overline{u_3^2}$ が増加する 'Splat 効果'^{(6)~(10)}は, 壁面に対する乱流の対称軸の角度が大きいほど顕著に表れる。一方, 鉛直方向の速度変動強度に関しては, α に対する依存性が小さいことがわかる。式 (28)~(30) より, 壁面近傍 ($Y \rightarrow 0$) における速度変動強度は以下

Fig. 3 Vertical distributions of turbulence intensities normalised by $\overline{u_{\infty i}^2}$. —, isotropic case ($R = 1$); ---, $R = 3/2$, $\beta = 4$; - · - · -, $R = 3/2$, $\beta = 9$; · · · · ·, $R = 2$, $\beta = 4$

の式で表される。

$$\overline{u_1^2}/\overline{u_{\infty 1a}^2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4R} - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{R}\right) \quad (42)$$

$$\overline{u_2^2}/\overline{u_{\infty 2a}^2} = 0 \quad (43)$$

Fig. 4 Vertical distributions of turbulence intensities normalised by $\overline{u_{\infty i}^2}$ for $R = 3/2$ and $\beta = 4$. Symbols as in Fig.2

$$\overline{u_3^2 / u_{\infty 1a}^2} = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4R} + \frac{3}{4} \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{R}\right) \quad (44)$$

ただし、ここでは、全ての速度変動強度は $\alpha = 0$ の場合の主流方向の速度変動強度 $\overline{u_{\infty 1a}^2}$ で無次元化されていることに注意されたい。なお、任意の一樣乱流に対して

Fig. 5 Vertical distributions of the Reynolds stress for $\beta = 4$ normalised by $\overline{u_{\infty 1} u_{\infty 2}}$. —, $R = 3/2$; ---, $R = 2$. Note that $\overline{u_1 u_2} / \overline{u_{\infty 1} u_{\infty 2}}$ is independent of α

$$\Theta_{11}(K_1) + \Theta_{33}(K_1) = \sum_{i=1}^3 \Theta_{\infty ii}(K_1) \text{ as } Y \rightarrow 0 \quad (45)$$

が成立する⁽⁶⁾ので、本研究で対象とした一樣軸対称乱流に関しても

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \Theta_{\infty ii}(K_1) dK_1 &= \overline{u_1^2} + \overline{u_3^2} = \overline{q^2} \\ &= \sum_{i=1}^3 \overline{u_{\infty i}^2} = \overline{q_{\infty}^2} \quad (46) \end{aligned}$$

となることが確認できる。ただし、速度変動強度を一樣流の速度変動強度 $\overline{u_{\infty i}^2}$ で無次元化した場合には、式(46)は成立しない。

レイノルズ応力の鉛直方向分布を図5に示す。ここで、レイノルズ応力は一樣流における値 $\overline{u_{\infty 1} u_{\infty 2}}$ で無次元化されている。図5より、レイノルズ応力は非等方性が強い(すなわち R の値が大きい)場合に大きな値をとり、軸の角度には依存しないことがわかる。また、レイノルズ応力は壁面に近づくにつれて零に漸近し、一樣流の非等方性が強い(R が大きい)場合に壁面近傍で大きなレイノルズ応力こう配が存在する。すなわち、乱流の非等方性によって生じる一樣流中でのレイノルズ応力が壁面のブロック効果により壁面近傍で零に漸近し、壁面近傍で大きなレイノルズ応力こう配を生み出すことがわかる。このことは、次節で考察する平均流の発生機構において重要となる。

4.2 非等方性乱流と壁面のブロック効果による平板上での平均流の発生 運動方程式より、粘性を無

Fig. 6 Vertical distributions of mean flow generated by the anisotropy in the free stream and inviscid blocking effect of the surface at $T = 1$ and $\beta = 4$. —, $R = 2$, $\alpha = \pi/4$; ---, $R = 2$, $\alpha = \pi/6$ and $\pi/3$; - · - · -, $R = 3/2$, $\alpha = \pi/4$; · · · · ·, $R = 3/2$, $\alpha = \pi/6$ and $\pi/3$

視した場合の二次流れ (平均流) の方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \bar{U}_s}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \bar{u_1 u_2} \dots \dots \dots (47)$$

なお、渦度に関する方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_z}{\partial t} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\bar{u^2} - \bar{v^2}) \\ &+ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \bar{u_1 u_2} \dots \dots \dots (48) \end{aligned}$$

を用いても同じ結果が得られる。式 (31) を式 (47) に代入することにより、発生する平均流の式として式 (49) が得られる。 $T = 1$ における平均流の壁面からの距離に対する分布を図 6 に示す。平均流は壁面近傍で最も強く、壁面から遠ざかるにつれて零に近づく。また、平均流は一樣流の非等方性が強いほど顕著に表れることがわかる。すなわち、一樣流が軸対称非等方性乱流であり、その対称軸が壁面に対して角度を持つ場合には、壁面のブロック効果によって壁面近傍で平均流が発生する。また、式 (49) より、平均流の強さは線形理論の適用範囲 ($t < T_L$) では時間とともに強くなる。

壁面近傍 ($Y \rightarrow 0$) での平均流の強さは次式で表される。

$$\bar{U}_s \sim \frac{3T}{8} \sin 2\alpha \left(1 - \frac{1}{R} \right) \left\{ \frac{2Y}{\lambda_2} - \left(\frac{\pi}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (50)$$

すなわち、壁面近傍 ($y \ll L_\infty$) においては、レイノルズ応力のこう配によって生じる平均流は壁面からの距離に比例して小さくなる。ここで、一例として、 $R = 3/2$, $\alpha = \pi/2$ の場合について式 (50) を有次元の形で記述すると次式となる。

$$\bar{U}_s^* = \frac{5\pi}{16} t \left(\frac{5}{9} \frac{u_\infty^2}{L_\infty^2} y - \frac{1}{3} \frac{u_\infty^2}{L_\infty} \right) \dots \dots \dots (51)$$

本研究では最も簡単な非等方性乱流の例として軸対称乱流を用いたが、他の非等方性乱流の場合にも壁面のブロック効果により平均流が発生する (もしくは時間平均流速分布が変化する) ことが予想される。例えば、ボックス内の格子乱流場でみられた二次流れ^{(10) (11)} や、強い対流境界層で観察された大スケールの対流⁽¹⁶⁾ も非等方性乱流と壁面のブロック効果により生じた流れであると考えられる。現在、本解析結果と定量的な比較を行うことができる実験結果は報告されていないものの、本解析結果は染料を用いた平板上での二次流れの観察結果⁽¹²⁾ と定性的に一致する。今後、本計算により予測された平均流の発生を詳細な実験により定量的に検証する必要がある。なお、一樣流が等方性乱流の場合には、壁面近傍においてもレイノルズ応力は零である^{(6) (7)} ので、平均流は発生しない。

5. 結 言

一樣軸対称非等方性乱流と壁面のブロック効果による平均流の発生を、境界層理論と Rapid Distortion Theory (RDT) に基づく線形解析^{(6)~(8)}を用いて明らかにした。速度変動強度とレイノルズ応力の解析解を求めるとともに、壁面近傍でのレイノルズ応力分布から平均流の強さを求めた。その結果、以下の結論を得た。

(1) 一樣流が等方性乱流の場合には壁面の極近傍で主流方向とスパン方向の速度変動強度が等しくなるのに対して、一樣流が非等方性乱流の場合には主流方向とスパン方向の速度変動強度は一致しない。

(2) 一樣流が等方性乱流の場合には平均流は発生しないが、一樣流が軸対称非等方性乱流であり、その対称軸が壁面に対して角度を持つ場合には、壁面のブロック効果によって壁面近傍に生じるレイノルズ応力こう配により平均流が生じる。この流れは一樣流の非等方性が強いほど顕著に表れ、時間 t と壁面からの距離 y が十分小さい ($t \ll T_L$, $y \ll L_\infty$) 範囲では時間 t とともに線形に増大し、また壁面からの距離 y に比例して小さくなる。

謝 辞

本研究に対して京都大学大学院工学研究科 小森 悟教授から有益なご助言を頂いた。記して謝意を表する。また、計算にご協力をいただいた京都大学大学院生 相良文彦 氏に感謝する。本研究は、文部科学省科在外研究員制度により英国ロンドン大学およびケンブリッジ大学にて行われた。また、本研究は、同省学研究費補助金 (課題番号 16760126, 14102016) および 21 世紀 COE プログラム「動的機能機械システムの数理モデルと設計論」の援助を受けて行われた。

文 献

- (1) Prandtl, L., *Essentials of fluid dynamics*. Dover, New York. (1956).
- (2) Perkins, H. J., The formation of streamwise vorticity in turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, **44** (4) (1970), 721–740.
- (3) Launder, B. E. & W. M. Ying, Secondary flows in ducts of square cross-section, *J. Fluid Mech.*, **54** (2) (1972), 289–295.
- (4) Gessner, F. B., The origin of secondary flow in turbulent flow along a corner, *J. Fluid Mech.*, **58** (1) (1973), 1–25.
- (5) Höglström, ULF, J. C. R. Hunt and A.-S. Smedman, Theory and measurements for turbulence spectra and variances in the atmospheric neutral surface layer, *Boundary-Layer Met.*, **103** (2002), 101–124.
- (6) Hunt, J. C. R. & J. M. R. Graham, Free-stream turbulence near plane boundaries, *J. Fluid Mech.*, **84** (2) (1978), 209–235.
- (7) Nagata, K., J. C. R. Hunt & P. A. Davidson, Turbulence structure and low Reynolds number effects in shear-free boundary layer, *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4* (eds. K. Hanjalic, Y. Nagano & M. J. Tummers) (2003), 121–128.
- (8) Hunt, J. C. R., Turbulence structure in thermal convection and shear-free boundary layers, *J. Fluid Mech.*, **138** (1984), 161–184.
- (9) Thomas, N. H. & P. E. Hancock, Grid turbulence near a moving wall, *J. Fluid Mech.*, **82** (1977), 481–496.
- (10) Fernando, H. J. S. & I. P. D. De Silva, Note on secondary flows in oscillating-grid, mixing-box experiments, *Phys Fluids A*, **5** (7) (1993), 1849–1851.
- (11) McDougall T. J., Measurements of turbulence in a zero-mean-shear mixed layer, *J. Fluid Mech.*, **94** (1979), 409–431.
- (12) Wong, H. Y. W., Shear-free turbulence and secondary flow near angled and curved surfaces, *PhD thesis, University of Cambridge* (1985).
- (13) Uzkan, T. & W. C. Reynolds, A shear-free turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, **28** (1967), 803–821.
- (14) Batchelor, G. K., *Homogeneous Turbulence*, Cambridge Univ. Press (1953).
- (15) Sreenivasan, K. R. & R. Narasimha, Rapid distortion of axisymmetric turbulence, *J. Fluid Mech.*, **84** (3) (1978), 497–516.
- (16) Krishnamurti, R. & Howard L. N., Large-scale flow generation in turbulent convection, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **78** (4) (1981), 1981–1985.

$$\begin{aligned}
\overline{u_1^2/u_{\infty 1a}^2} = & 1 - \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{R}\right) \\
& + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{R}\right) Y \left[-\frac{Y}{\lambda_1} e^{-\frac{Y^2}{4\lambda_1}} + \left(\frac{\pi}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{Y^2}{2\lambda_1}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_1^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \\
& + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{R}\right) \left[-2 \left(\frac{Y^2}{\lambda_1} + 1\right) + \left(\frac{\pi}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}} Y \left(3 + \frac{2Y^2}{\lambda_1}\right) e^{\frac{Y^2}{\lambda_1}} \operatorname{erfc} \left\{ \lambda_1^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \\
& + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{R}\right) Y \left[\frac{Y}{\lambda_2} e^{-\frac{Y^2}{4\lambda_2}} - \left(\frac{\pi}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{Y^2}{2\lambda_2}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_2^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \\
& + \frac{1}{8} (3 + \sin^2 \alpha) \left(1 - \frac{1}{R}\right) \left[2 \left(\frac{Y^2}{\lambda_2} + 1\right) - \left(\frac{\pi}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2}} Y \left(3 + \frac{2Y^2}{\lambda_2}\right) e^{\frac{Y^2}{\lambda_2}} \operatorname{erfc} \left\{ \lambda_2^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{u_2^2/u_{\infty 1a}^2} = & \frac{1}{R} + \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{R}\right) \\
& + \left(1 - \frac{2}{R}\right) \left[2 \left(\frac{Y^2}{4\lambda_1} + 1\right) e^{-\frac{Y^2}{4\lambda_1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}} Y \left(3 + \frac{Y^2}{2\lambda_1}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_1^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \\
& + \left(1 - \frac{2}{R}\right) \left[-\left(\frac{Y^2}{\lambda_1} + 1\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}} Y \left(3 + \frac{2Y^2}{\lambda_1}\right) e^{\frac{Y^2}{\lambda_1}} \operatorname{erfc} \left\{ \lambda_1^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \\
& + (1 + \sin^2 \alpha) \left(1 - \frac{1}{R}\right) \left[-2 \left(\frac{Y^2}{4\lambda_2} + 1\right) e^{-\frac{Y^2}{4\lambda_2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2}} Y \left(3 + \frac{Y^2}{2\lambda_2}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_2^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \\
& + (1 + \sin^2 \alpha) \left(1 - \frac{1}{R}\right) \left[\left(\frac{Y^2}{\lambda_2} + 1\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2}} Y \left(3 + \frac{2Y^2}{\lambda_2}\right) e^{\frac{Y^2}{\lambda_2}} \operatorname{erfc} \left\{ \lambda_2^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{u_3^2/u_{\infty 1a}^2} = & \frac{1}{R} \\
& + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{R}\right) Y \left[-\frac{Y}{\lambda_1} e^{-\frac{Y^2}{4\lambda_1}} + \left(\frac{\pi}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{Y^2}{2\lambda_1}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_1^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \\
& + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{R}\right) \left[-2 \left(\frac{Y^2}{\lambda_1} + 1\right) + \left(\frac{\pi}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}} Y \left(3 + \frac{2Y^2}{\lambda_1}\right) e^{\frac{Y^2}{\lambda_1}} \operatorname{erfc} \left\{ \lambda_1^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \\
& + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \left(1 - \frac{1}{R}\right) Y \left[\frac{Y}{\lambda_2} e^{-\frac{Y^2}{4\lambda_2}} - \left(\frac{\pi}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{Y^2}{2\lambda_2}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_2^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \\
& + \frac{1}{8} (3 + \sin^2 \alpha) \left(1 - \frac{1}{R}\right) \left[2 \left(\frac{Y^2}{\lambda_2} + 1\right) - \left(\frac{\pi}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2}} Y \left(3 + \frac{2Y^2}{\lambda_2}\right) e^{\frac{Y^2}{\lambda_2}} \operatorname{erfc} \left\{ \lambda_2^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\overline{u_1 u_2 / u_{\infty 1a}^2} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(1 - \frac{1}{R}\right) \left[1 - \left(\frac{Y^2}{4\lambda_2} + 1\right) e^{-\frac{Y^2}{4\lambda_2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2}} Y \left(3 + \frac{Y^2}{2\lambda_2}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_2^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \quad (31)$$

$$\overline{u_2 u_3 / u_{\infty 1a}^2} = \overline{u_3 u_1 / u_{\infty 1a}^2} = 0 \dots \dots \dots (32)$$

$$\overline{U_s} = \frac{3T}{8} \sin 2\alpha \left(1 - \frac{1}{R}\right) \left[\frac{Y}{\lambda_2} \exp \left\{ -\frac{Y^2}{4\lambda_2} \right\} - \left(\frac{\pi}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{Y^2}{2\lambda_2}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_2^{-\frac{1}{2}} Y \right\} \right] \dots \dots \dots (49)$$