矩形曲がり管内二次流の形態変化*

山本 恭二^{*1}, 門 脇 健^{*2}
柳瀬 眞一郎^{*1}, 加賀 義人^{*1}

Pattern Variation of the Secondary Flow in Rectangular Curved Ducts

Kyoji YAMAMOTO^{*3}, Ken KADOWAKI,
Shinichiro YANASE and Yoshito KAGA^{*3} Department of Mechanical Engineering, Okayama University,
3-1-1 Tsushima-naka, Okayama-shi, Okayama, 700-8530 Japan

The flow through a rectangular curved duct is investigated numerically with emphasis on the secondary flow patterns. The non-dimensional curvature of the duct is taken to be 0.02 and the aspect ratios of the duct cross-section are considered to be 0.5, 2, 3 and 4. The calculation covers a wide range of the Dean number. The steady solutions are first calculated and then the linear stability of the solutions is examined. The multiple solutions and the bifurcation of the solutions are obtained. The critical Dean numbers at which the transition of the secondary flow patterns occurs are also obtained.

Key Words: Curved Duct Flow, Secondary Flow, Dean Number, Rectangular Cross-Section, Linear Stability

1. 序 論

曲がり管は, 流体輸送の管路系の一部としては勿論, 放熱器あるいは混合器として工業上広く用いられているが, この他にも, 血管のような生物内の流体輸送系においても見られる管路である。曲がり管内の流れは, 曲がりによる遠心力によって, 管断面内において, 遠心力方向に対称面を持ち, 互いに反対方向に回転する二つの渦(ディーン渦)が発生し, これによって, 管の流動抵抗や流体混合が影響されることから, 古くから多くの研究がなされてきた^①。近年では, 詳細な数値解析に基づいて, 管の形状や流れの圧力配などが同じ状態であるにもかかわらず, 管内部の流動状態が異なるいくつかの解が存在(多重解の存在)することや, 流れのパラメータの変化に伴って解の分岐が現れることなどが明らかにされ^{②③}, 数学的な観点からの曲がり管内流に対する関心を引いている。

本研究に関連した矩形断面形状を持つ曲がり管内流の従来の研究について言えば, Cheng ら^④は, いくつかの断面縦横比とディーン数に対して, 矩形曲がり管内流の数値解析を行っている。そして, 通常のディーン渦の他に, 附加的な渦を持つ4つ渦流れを見出し

ている。秋山ら^⑤は, 小さい縦横比から大きい縦横比に渡る矩形断面形状の管に対して, 数値計算と実験により, 断面内の二次流動についての研究を行い, 附加的な渦の発生するディーン数について調べている。さらに, 杉山ら^⑥は, 縦横比が0.5から2.5における矩形曲がり管内二次流の可視化実験を行い, ディーン数の変化に伴う渦模様の変化を調べると同時に, 附加渦の発生するディーン数についても言及している。

Winters^⑦は, 正方形断面を持つ曲がり管内流の数値解析に基づく詳細な研究を行っている。その結果, 解の分岐と通常のディーン渦以外の二次流動形状を見出し, 流れの安定性を調べることににより, 二つの渦からなる二次流以外は不安定であると述べている。一方, 柳瀬ら^{⑧⑨}は, ディーン数が100という比較的小さい場合ではあるが, 広い範囲の断面縦横比に対し数値解析を行っている。その結果, 多重解の存在, 解の分岐が明らかにされると同時に, 流れの線型安定性を調べることににより, どの流れが実際に生ずるかを明らかにした。この研究は, しかしながら, ディーン数が100の場合に限られており, 矩形管内流に対して, 大きなディーン数に対する多重解や解の分岐については, 未だ理論的に調べられていない。そこで本研究においては, この点を調べることにによって, 附加渦の発生限界を明らかにすること, また, ディーン数の変化と共に二次流模様がどのように変化していくかを明らかにし

* 原稿受付 2004年2月18日。

^{*1} 正員, 岡山大学工学部(〒700-8530 岡山市津島中3-1-1)。^{*2} 正員, 松江工業高等専門学校機械工学科(〒690-8518 松江市西生馬町14-4)。

E-mail: yamamoto@fluid.mech.okayama-u.ac.jp

たい。すなわち、矩形断面を持つ曲がり管内の十分発達した層流に対し、広いディーン数に渡る定常解を数値的に求め、更に、得られた解に対し、線型安定性を調べることににより、管断面に生ずる二次流の形態変化を明確に把握しようとしている。

2 基礎方程式

幅が $2d$ 、高さが $2h$ である矩形断面をした曲がり管を考える。図 1 に使用する座標系を示す。ここで、 (r', θ, z') は、 θ を円周角とする円柱座標であり、 s' は管の中心線に沿う座標である。中心線 s' のなす曲率半径は一定であり、 R_0 とする。流体の密度を ρ 、粘性係数を μ として、次の無次元量を導入する。

Fig. 1 Coordinates system

$$t' = \frac{\rho d^2}{\mu} t, \quad r' = dr = d(\delta^{-1} + \eta), \quad z' = dz, \\ s' = R_0 \theta = ds \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$u' = \frac{\mu}{\rho d} u, \quad v' = \frac{\mu}{\rho d} \frac{v}{\sqrt{2\delta}}, \quad w' = \frac{\mu}{\rho d} w, \\ p' = \frac{\mu^2}{\rho d^2} p \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 t' は時間、 u', v', w' は、それぞれ、半径(r')、軸(s')および垂直方向(z')の流速、 p' は圧力であり、ダッシュ(') のないものは無次元量である。また、

$$\delta = d/R_0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

は無次元曲率であり、管断面の縦横比 γ を

$$\gamma = h/d \quad \dots\dots\dots (4)$$

とおく。さらに、 z 方向座標に対し、

$$\zeta = z/\gamma \quad \dots\dots\dots (5)$$

を導入する。一定の圧力勾配 G によって生ずる流れは、管軸 s に沿って変化しないものとする。このとき連続の式、

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\gamma \partial \zeta} + \frac{u\delta}{1+\eta\delta} = 0$$

を考慮して、流れ関数 ψ を導入する。すなわち、

$$u = \frac{1}{1+\delta\eta} \frac{\partial \psi}{\gamma \partial \zeta}, \quad w = -\frac{1}{1+\delta\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad \dots\dots\dots (6)$$

また $s=0$ での断面内の圧力を $p_1(t, \eta, \zeta)$ で表せば、圧力 p は、

$$p = -\frac{D_n}{\sqrt{2\delta}} s + p_1 \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。ここで、 D_n はディーン数であり、次のように定義される。

$$D_n = \frac{\rho \sqrt{2\delta} d^3 G}{\mu^2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

さて、 η および ζ 方向の運動方程式より圧力 p_1 を消去した式、並びに、 s 方向の式において、流れ関数 ψ を用いると基礎式は次のようになる。

$$(1+\delta\eta) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial(v, \psi)}{\partial(\eta, \zeta)} = D_n - \frac{\delta^2 v}{1+\delta\eta} \\ + (1+\delta\eta) \Delta v - \frac{1}{\gamma} \frac{\delta}{1+\delta\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} v + \delta \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\left(\Delta - \frac{\delta}{1+\delta\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1+\delta\eta} \frac{\partial(\Delta \psi, \psi)}{\partial(\eta, \zeta)} \\ = \frac{1}{\gamma} v \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \Delta^2 \psi + \frac{1}{\gamma} \frac{\delta}{(1+\delta\eta)^2} \times \\ \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \left(2\Delta \psi - \frac{3\delta}{1+\delta\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \zeta} \right\} \\ + \frac{\delta}{(1+\delta\eta)^2} \left\{ -2(1+\delta\eta) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \eta} + \delta \Delta \psi \right. \\ \left. + 2\delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{3\delta^2}{1+\delta\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\delta}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし、

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2},$$

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(\eta, \zeta)} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \zeta} - \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial g}{\partial \eta} \quad \dots\dots\dots(11)$$

また、壁面での境界条件は、

$$v(\pm 1, \zeta) = v(\eta, \pm 1) = 0$$

$$\psi(\pm 1, \zeta) = \psi(\eta, \pm 1) = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta}(\pm 1, \zeta) = \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}(\eta, \pm 1) = 0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

得られた解を用いて、管内の流量 Q' は次式により求められる。

$$Q' = \int_{-h}^h dz' \int_{-d}^d v' dr' = \frac{\mu d}{\rho \sqrt{2\delta}} Q,$$

$$Q = \gamma \int_{-1}^1 d\zeta \int_{-1}^1 v d\eta \quad \dots\dots\dots(14)$$

また、平均流速 $\bar{v}$ は、

$$\bar{v} = \frac{Q'}{4hd} = \frac{\mu}{4d\gamma\rho\sqrt{2\delta}} Q \quad \dots\dots\dots(15)$$

となる。ここで、水力直径 d_h を導入する。

$$d_h = \frac{4hd}{h+d} = \frac{4\gamma}{\gamma+1} d \quad \dots\dots\dots(16)$$

レイノルズ数は、

$$R_e = \frac{\bar{v} d_h \rho}{\mu} = \frac{Q}{\sqrt{2\delta}(\gamma+1)} \quad \dots\dots\dots(17)$$

で与えられる。また、管摩擦係数 λ は、次式で定義される。

$$G = \frac{\lambda}{d_h} \frac{\rho}{2} (\bar{v})^2$$

これにより λ は、次のように表せる。

$$\lambda = \frac{128\gamma^3 \sqrt{2\delta}}{(1+\gamma)Q^2} D_n \quad \dots\dots\dots(18)$$

3. 数 値 計 算 法

基礎式(9), (10)は、後述するように、流れの安定性解析のために非定常項を含んでいるが、まず最初に、一定圧力ム配のもとで、どんな定常解が得られるかについて調べる。従って、式(9), (10)において時間微分を含まない式の解を求める。数値計算には、以前から用いられているチェビシエフ多項式に基づくスペクトル法⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾を用いる。すなわち、境界条件(12), (13)を考慮

して、 ψ および v をチェビシエフ多項式を用いて次のように表す。

$$\psi(\eta, \zeta) = (1-\eta^2)^2 (1-\zeta^2)^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \psi_{mn} T_m(\eta) T_n(\zeta) \dots\dots\dots(19)$$

$$v(\eta, \zeta) = (1-\eta^2)(1-\zeta^2) \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N v_{mn} T_m(\eta) T_n(\zeta) \dots\dots\dots(20)$$

ここで、

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x)) \quad \dots\dots\dots(21)$$

は、 n 次のチェビシエフ多項式であり、 ψ_{mn}, v_{mn} は求めるべき未定数、 M, N は、それぞれ、 η, ζ 方向の級数打ち切り項数である。級数展開(19), (20)を式(9), (10) (但し、時間微分項は省略)に代入し、選点法⁽⁹⁾を用いることにより、未定数 ψ_{mn}, v_{mn} に対する代数方程式を得る。この方程式をニュートン法を用いて解く。なお、選点としては、

$$\eta_i = \cos\left(\frac{\pi \cdot i}{M+2}\right), \quad \zeta_j = \cos\left(\frac{\pi \cdot j}{N+2}\right) \dots\dots\dots(22)$$

$$(i=1, \dots, M+1, \quad j=1, \dots, N+1)$$

を取っている。また、解の収束判定として、

$$\varepsilon = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N [(\psi_{mn}^{(\ell+1)} - \psi_{mn}^{(\ell)})^2 + (v_{mn}^{(\ell+1)} - v_{mn}^{(\ell)})^2] \dots\dots\dots(23)$$

において、 $\varepsilon < 10^{-10}$ を用いている。ここで、 ℓ は、解の繰返し回数である。また、級数打ち切り項数 M, N は、断面縦横比 γ によって異なっているが、最小で $M=30, N=20$ 、最大で $M=30, N=80$ を取った。

次に、このようにして得られた定常解に対し、微小攪乱を加えたときの解の挙動について調べる。解析の方法については、文献(3)に示されているので、ここではその方法を略述するに止める。すなわち、 $\tilde{\psi}(\eta, \zeta), \tilde{v}(\eta, \zeta)$ を得られた定常解として、

$$\psi(\eta, \zeta, t) = \tilde{\psi}(\eta, \zeta) + \hat{\psi}(\eta, \zeta) e^{\sigma t},$$

$$v(\eta, \zeta, t) = \tilde{v}(\eta, \zeta) + \hat{v}(\eta, \zeta) e^{\sigma t} \quad \dots\dots\dots(24)$$

とおく。ここで、 $\hat{\psi}, \hat{v}$ は微小変動を表す。

$\sigma = \sigma_R + \sigma_i$ ($i = \sqrt{-1}$) は、時間的変化を表す項であり、 $\sigma_R < 0$ なら微小変動は時間と共に減少、 $\sigma_R > 0$ なら変動は増大し、定常解は不安定となり、そのままでは存在しえないことを示唆している。式

(24)を、時間項を含む(9), (10)に代入し、 $\bar{v}, \bar{\psi}$ が定常解であることと、微小量 $\hat{v}, \hat{\psi}$ の二次以上を省略することにより、 $\hat{v}, \hat{\psi}, \sigma$ に対する方程式を得る。これを、定常解を求める際と同じく、 $\hat{v}, \hat{\psi}$ のチェビシェフ展開と選点法の利用により、 σ に対する固有値方程式を得る。これを解くことにより、固有値 σ を求めるものである。チェビシェフ展開における級数打ち切り項数 M, N は、定常解と同じ値を用いた。固有値 σ は、 σ_R の値の大きい順に求められるが、 M, N を変えても、最大 σ_R の値は、ほとんど変化せず、安定・不安定を判別する固有値は正しく求められていると考えられる。なお、本研究では、式(24)に示したように、微小変動は、断面内の変化だけの二次元的な変動に限定しており、そのような変動に対し、得られた定常解が、安定に存在するかどうかを判別しようとしている。

4. 定常な二次流形態と安定性

管断面の縦横比 γ が0.5, 2, 3, 4の場合を考える。また、比較的小さな曲率を持つ曲がり管を取り、無次元曲率 δ を0.02とする。Winters²⁾によれば、 $\gamma = 1$ の場合ではあるが、 $\delta > 0.05$ においては、流れの特徴は δ の値によって大きく異なるが、 $\delta < 0.05$ では、曲率の影響は比較的小さいということである。従って、本研究では、曲率の小さい曲がり管に対する流れの特徴を明らかにするために、 $\delta = 0.02$ を取り計算を行う。

(i) $\gamma = 0.5$ の場合

図2に、ディーン数 D_n を変えたときの流量 Q の変化を示す。この図の右側の軸はレイノルズ数 Re を表す。この図中に示された四角内の部分を拡大した図を図3に示す。図の実線は、得られた流れが安定な場合を、また、鎖線および点線は不安定な場合を示している。この内、鎖線は得られた固有値の実部 σ_R が $0 < \sigma_R < 10$ の場合を、また、点線は $\sigma_R > 10$ の場合を表している。これは、たとえ流れが不安定であっても、その度合いが小さい場合には、曲がり管入口から流れの観測点までが長くない曲がり流路の実験においては、二次流が観察されることがあるかも知れないという予測から便宜上二つに分けているものである。

すなわち、変動の拡大率 $e^{\sigma_R t}$ において、 $\sigma_R t = \sigma_R \mu t' / (\rho d^2)$ 。ここで、 $t' = R_0 / \bar{v}$ と取れば、 $\sigma_R t = 4\gamma\sigma_R / (\gamma + 1)^{-1} (Re\delta)^{-1}$ となる。従って、 $\sigma_R = 10$ 、 $\delta = 0.02$ のとき、例えば $Re = 1000$ 、 $\gamma = 3$ に対し、 $\sigma_R t = 1.5$ となり、変動は十分小さい。

Fig.2 Q versus D_n ($\gamma=0.5$)

図に示されているように、 $3773 < D_n < 5523$ の範囲において、三重解が得られたが、流量の違いは僅かであることが見られる。誘起される流れが、ディーン数とともにどのように変化するか、三重解がどのような流れ模様を示すかを明らかにするため、図2中のA~Gの点での、断面内の二次流流線模様を、図4に示す。ここで、図中の数字は ψ の値を表し、 $\psi < 0$ の流線を鎖線で表す。 $\psi < 0$ は時計回り、 $\psi > 0$ は反時計回りの渦を表している。

図2, 3中の○は二次流が二つ渦の場合、□は四つ渦を表す。また、●はこの点で、渦の形が変化する位置を表している。この図より分かるように、流量を表す線図に沿って D_n が、小さい値から増加する場合、通常のディーン渦(二つ渦)が現れる。この二つ渦は $D_n \approx 5500$ の点 P_1 迄続き、その後は四つ渦を持つ。この二次流は、流量が折り返しとなる $D_n \approx 5520$ までは安定であるが、折り返し点後しばらくはやや不安定($0 < \sigma_R < 10$)となる。流量線図に沿って D_n が減少する時、点D, Eを経て $D_n \approx 3773$ 附近で折り返し、F, Gへと変化していく。

この間、図4に見られるように、断面右中央にある副渦は成長していく。なお、線型安定解析における微小変動のうち最大の σ_R を持つ変動は、ディーン数が1000附近を除いた大部分の領域で、時間と共に単調

Fig.3 Q versus D_n ($\gamma=0.5$)

減少あるいは単調増大を行うことが認められた。図2中のA～G点における最大 σ_R に対する固有値 (σ_R, σ_I) を示すと、A: $(-30.09, 0)$ $[(-30.09, 0)]$, B: $(-34.30, 0)$ $[(-34.30, 0)]$, C: $(-12.00, 0)$ $[(-12.09, 0)]$, D: $(11.20, 0)$ $[(11.19, 0)]$, E: $(53.45, 0)$ $[(53.45, 0)]$, F: $(50.85, 0)$ $[(50.84, 0)]$, G: $(46.03, 0)$ $[(46.50, 0)]$ である。ここで、()内の値は、打ち切り項数 (M, N) が $(30, 20)$ の場合、[]内の値は $(40, 30)$ の場合であり、打ち切り項数による違いは小さい。また、副渦が出現する直前の点Cと、変動が不安定である点Gにおける最大 σ_R を持つ変動模様(固有関数)を示すと図5のようになる。この図に見られるように、変動が副渦(発生)附近に集中していることは興味深い。

Fig.4 Secondary flow patterns ($\gamma=0.5$): $D_n=2500$ (A), 4000 (B), 5500 (C), 5500 (D), 4000 (E), 4000 (F), 5500 (G).

Fig.5 Eigen functions with the largest σ_R

本研究では、四つ渦は、 $D_n \cong 5500$ 従って $Re \cong 1282$ 程度のときに現れる。杉山ら¹⁰⁾の実験(図2(b), $\delta=0.0625$)によると、 $D_e = 261$ において四つ渦が現れているが、 $D_e = Re \sqrt{2\delta}$ の関係があることから、 $Re = 1282$ に対しては $D_e = 256$ となり、 δ の相

違にかかわらず杉山らの実験によく一致した値となる。

(ii) $\gamma=2$ の場合

図6および7に、ディーン数 D_n を変えたときの流

Fig.6 Q versus D_n ($\gamma=2$)

量 Q の変化を示す。図中の記号等は、図2, 3と同じ意味を持つが、新たな記号として、 $\blacktriangle$ は非対称な二次流、 $\blacksquare$ は四つ渦だが中央部の渦が大きく広がっている場合(右方向)、 $\diamond$ は六つ渦、 $\blacklozenge$ は八つ渦を表している。図6, 7中の点A～Pおよびa～eでの二次流模様を図8および9に示す。二次流の変化を流量線図に基づいて説明すると次のようになる。図6において D_n の小さいところ、例えばA点では、図8(A)に示されたような二つ渦である。流量線図に沿って D_n が増加するとき、点B, Cを通り、 $D_n \cong 381$ 近くで折り返す。ここまで、流れは安定である。その後、 D_n の減少と共に P_1, D, E を経て、 $D_n \cong 186$ 附近で再び折り返す。そして、 D_n の増加につれて、 Q は増大し、点F, G, Hを通る。最初の折り返し点近くの P_1 ($D_n \cong 376$)において、二次流は二つ渦から四つ渦へと変化し、流量線図に沿って小さな形の副渦が發展する。この様子は、図8(D)～(H)において明らかであろう。なお、最初の折り返し点以後、 $D_n \cong 650$ までは、流れは弱い不安定であるが、 $530 < D_n < 550$ では、安定であることが分かった。折り返し点近くの P_2 ($D_n \cong 380$)において、非対称二次流が分岐する。その分枝は、O, Pを経て大きな D_n へと進んでいく。点O, Pの二次流を図8(O), (P)に示す。なお、図に示されている非対称流は $\psi=0$ の線が下に下がっているが、丁度正反対である $\psi=0$ の線が上に上がっている流れも同一の D_n で存在することが確かめられている。図6中の各点における微小変動の時間的推移を知るため、変動の最大 σ_R を持つ固有値 (σ_R, σ_I) を示せば、A: $(-4.76, 0)$, B: $(-5.43, 22.9)$, C: $(-2.22, 25.0)$, D: $(7.80, 0)$, E: $(10.4, 0)$, F: $(7.33, 0)$, G:

 Fig. 7 Q versus D_n ($\gamma=2$)

(7.67, 0), H: (6.44, 43.8), O: (2.66, 22.4), P: (30.2, 29.9)となっている。

図7で示されるような一つの二次流の分枝が存在する。この解は全て不安定である。図7における点eでの二次流は、図9(e)に示されたように、八つ渦の形態を持っている。この点より流量線図に沿って D_n を下げる時、 $D_n \approx 678$ で流量の折り返しがあり、この点 p_3 で二次流形態が八つ渦から六つ渦に変化する。その後、 $D_n \approx 770$ での尖点的な折り返しを経て点dを通り、 $D_n \approx 500$ の点 p_2 へと至る。この時点で六つ渦から四つ渦へと変化する。更に、 $D_n \approx 450$ の折り返し点を経て p_1 で四つ渦から二つ渦へと変化した後、その形態を保った形で点b, aへと移っていく。各点における渦形態を図9に示している。

$\gamma=2$ の場合、図6によると D_n がおおよそ376($R_s \approx 817$)あたりで、二つ渦から、中央の渦が小さい四つ渦に変化するように思われる。このとき、 $D_s = R_s \sqrt{2\delta} = 163$ である。杉山ら⁸および秋山ら⁹の実験(それぞれの図8(b), 図3(b))によると、二つ渦が変化する D_s は、それぞれ、 $180(\delta=0.0625)$ と $150(\delta=0.1)$ である。本研究の形態変形 D_s は実験とよく一致しているということがいえる。しかしながら、実験における四つ渦は、図9(c)で示されるような大きい中央渦の形態が得られている。大きい中央渦を持つ四つ渦は $D_n \approx 450$ (c), 従って $D_s \approx 190$ あたりで現れることになっているので、その D_s には大きな違いはないが、この二次流が不安定であること、小さい中央渦を持つ四つ渦(D~F)の方がまだ不安定度が小さ

 Fig. 8 Secondary flow patterns ($\gamma=2$): $D_n=100$ (A), 300(B), 355(C), 355(D), 300(E), 300(F), 400(G), 600(H), 400(I), 600(P).

い($530 < D_n < 550$ では安定である)ことが δ の相違する実験結果とは異なっている。

(iii) $\gamma=3$ の場合

図10および11に、流量 Q の D_n に対する変化図を示す。同図中の点A~Eおよびa~hでの二次流模様を図12および13に示す。二次流の変化を流線図に基づいて説明すると次のようになる。まず、図10において、 D_n が小さいところでは二つ渦である。A点における流れ模様を図12(A)に示している。 D_n の増加と共に点Bを経て、 $D_n \approx 345$ での折り返し点 P_2 に至る。この間 $D_n \approx 262$ までは流れが安定である。折り返しの後、Bの近くの点C、 $D_n \approx 190$ の点 P_1 を通り、 $D_n \approx 112$ でまた折り返す。その後、 D_n の増加と共にD, E点を通り、 Q は増加する。この間、 P_1 点迄は二つ渦であるが、 P_1 点から四つ渦となる。これが一つの分枝である。もう一つの分枝は、点 P_2 より分岐する非対称流れである。点Oでの流れ模様を図12(O)に示す。この場合にも、 $\psi=0$ の流線が、図12(O)とは丁度反対に、上に上がった流れ模様も存在する。

図10中の各点における微小変動の時間的推移を知るため、変動の最大 σ_R を持つ固有値(σ_R, σ_I)を示せば、A: (-4.03, 0), B: (3.08, 31.3), C: (9.68, 0), D: (5.45, 0), E: (26.8, 36.7), O: (29.1, 42.8)となっている。

次に、解のもう一つの分枝である図11について説明する。まず、 $D_n=600$ の点hでは六つ渦となる。その渦模様は図13(h)に示されている。流量線図に沿って D_n が小さくなると、点gを経て p_2 へと至るが、この間六つ渦であり、 $D_n \approx 317$ の点 p_2 において四つ渦へと変化する。その後、eを経て、 $D_n \approx 180$ において折り返した後、d点、c点を通り p_1 (およびb)点へと至る。 p_1 は $D_n \approx 400$ にあり、この点から二つ渦へと変化する。点bでの流線図を図13(b)に示す。図11にはもう一つの分枝が示されている。すなわち、点qを含む分枝である。点qから D_n が小さくなると、p点を経て $D_n \approx 405$ で折り返した後、点oを通り、 $D_n \approx 422$ の p_3 点に至る。ここまでは四つ渦である。点 p_3 において二つ渦へと変化

 Fig. 9 Secondary flow patterns ($\gamma=2$): $D_n=800$ (a), 600(b), 450(c), 600(d), 800(e).

Fig.10 Q versus D_n ($\gamma=3$) Fig.11 Q versus D_n ($\gamma=3$)

する。

図 10, 11 によると, $D_n = 262$, 従って $R_e \approx 830$ ($D_e \approx 166$) までは二つ渦が観測され, その後, やや不安定ではあるが, 二つ渦あるいは中央渦の小さな四つ渦に変化するものと思われる。

(iv) $\gamma = 4$ の場合

図 14 および 15 に流量 Q の D_n に対する変化を示す。同図中の A~O での二次流模様を図 16 に示す。二次流渦の変化は $\gamma=3$ に似たところがあるが, それを流量線図に基づいて説明する。まず図 14 において, D_n が小さいところ, 例えば A では二つ渦である。その後 D_n の増加と共に, $D_n \approx 187$ の点 P_1 までは安定な二つ渦が続く。ここで流量は折り返しを行い, D_n の減少と共にほぼ実線と平行に Q は減少する。 P_1 点で折り返した後, 流れはやや不安定となる。そして,

Fig. 12 Secondary flow patterns ($\gamma=3$):
 $D_n=100$ (A), 300(B), 300(C), 300(D), 500(E), 500(O).

$D_n \approx 105$ の点 P_2 で二つ渦から四つ渦に変化する。その後, 点 B を通り, $D_n \approx 79$ で再び折り返した後, D_n の増加と共に C, D, E, F 点を通して Q は増加する。このときの四つ渦の中心部では小さい渦を形成している。

点 P_1 からはもう一つの解が分岐する。それは, P_1 から P_3 迄の弱い不安定な非対称流れ, それに続く P_3 から P_4 迄の対称な二つ渦, P_4 より先の不安定な非対称流れとなっている。

図 14 中の各点における微小変動の時間的推移を知るため, 変動の最大 σ_R を持つ固有値 (σ_R, σ_I) を示せば, A: (-2.64, 0), B: (1.32, 0), C: (1.39, 0), D: (3.01, 0), E: (6.68, 21.9), F: (23.5, 24.4), G: (4.72, 0), H: (8.31, 36.3), O: (19.2, 47.0) となっている。

図 15 に示されたもう一つの分枝における流れ模様の変化は次のようである。まず, 点 h では, 六つ渦流れである。 D_n が流量線図に沿って減少するとき, この六つ渦は, $D_n \approx 130$ の点 p (点 e) において四つ渦に変化する。そして, $D_n \approx 125$ の点 d で折り返し, c を経て, $D_n \approx 200$ の点 p_2 (点 b) へと至る。点 p_2 において四つ渦から二つ渦へと変化する。その後 D_n の増加と共に二つ渦が持続し, 図 14 の P_3 点に至る。

一方, もう一つの分枝上の点である s においては, 中心部の渦が大きい四つ渦が存在する。この四つ渦は, D_n が流量線図に沿って減少するとき, $D_n \approx 176$ の折り返し点を通り, 点 p を経て, $D_n \approx 285$ の点 p_1 まで持続する。その後二つ渦へと変化し, 図 14 の P_4 点に至る。

図 14, 15 で示された流れ模様変化から, $D_n = 187$, 従って $R_e \approx 734$ ($D_e \approx 147$) までは二つ渦が観測され, その後は, 二つ渦, 四つ渦あるいは六つ渦の観測が可能であると思われる。

以上のように, 矩形曲がり管内層流に現れる二次流形態は, ディーン数や管断面の縦横比によって複雑に変化するが, 総体的には次のように言える。生ずる二次流は, ディーン数の増加と共に, 二つ渦 (ディーン

Fig. 13 Secondary flow patterns ($\gamma=3$):
 $D_n=500$ (a), 400(b), 350(c), 182(d), 200(e), 300(f), 400(g), 600(h).

 Fig. 14 Q versus D_n ($\gamma=4$)

 Fig. 15 Q versus D_n ($\gamma=4$)

渦)から四つ渦へと変化するが、この変化は解の多重性を伴っている。すなわち、ディーン数のある範囲において、解曲線は多価となり、二つ渦と四つ渦が共存する領域がある。解曲線に沿っては、二次流は、二つ渦から四つ渦へと漸次変化するが、ディーン数を単調に増大させるとき、ある臨界ディーン数で四つ渦が突然発生するように見える。このとき、外壁に向かう二つ渦の流れが、外壁中心部附近で急激に止められ、上下方向には速く流れ動くことから、それに引きずられる形で外壁中心部に副渦が発生し、四つ渦になると考えられる。ただし、この四つ渦は大部分不安定である。また、縦長な管では、解曲線が折り返すあたりから管断面の中心線に対し非対称な二つ渦流れが分岐する。この非対称流も不安定である。更に、縦長な管では、解曲線において、第2の分枝が得られた。この分枝上では、二つ渦を含むいくつかの異なった二次流の多重解が存在する複雑な流れとなるが、上下方向への移動の容易さから、副渦も縦長な四つ渦や六つ渦などとなっている。なお、横長な管断面においては、上下方向への移動が押さえられることから、計算したディーン数の範囲では、非対称解や、第2分枝解は得られていない。

(A) (B) (C) (D) (E) (F) (G) (H) (I)

Fig. 16 Secondary flow patterns ($\gamma=4$):
 $D_n=99.5$ (A), 100.1(B), 99.6(C), 200.3(D), 300.0(E), 400.0(F), 200.0(G), 300.4(H), 399.9(I).

5. 結 論

断面が矩形で無次元曲率 δ が0.02の曲がり管を通る層流の定常解を求め、その安定性を解析することにより次の結論を得た。

(1) 二つ渦から四つ渦への形態変化は、解の多重性を伴って起こる。二つ渦には安定な領域が存在するが、四つ渦は大部分不安定である。

(2) 安定な二つ渦が存在する臨界ディーン数 D_n は、縦横比 γ が0.5, 2, 3, 4に対し、それぞれ、5500, 376, 262, 187である。これらの値を $D_e = Re \sqrt{2\delta}$ で表せば、256, 163, 166, 147となる。

(3) $\gamma=2, 3, 4$ の場合、複数の渦形態が存在するもう一つの分枝解や、非対称渦の解が存在するが、それらの流れは不安定である。

終わりに、数値計算のまともに協力してくれた、浅原卓也君に感謝の意を表したい。

文 献

- (1) Ito, H., JSME Int. J., 30(1987), 543-552.
- (2) Winters, K., J. Fluid Mech., 180(1987), 343-369.
- (3) Yanase, S., Kaga, Y., and Daikai, R., Fluid Dynamics Research, 31(2002), 151-183.
- (4) Cheng, K.C., Lin, R.-C., and Ou, J.-W., ASME, J. Fluids Eng., 98-1(1976), 41-48.
- (5) 秋山光庸・ほか5名, 機論, 47-421, B(1981), 1705-1714.
- (6) 杉山司郎, 林太郎, 山崎公士, 機論, 48-434, B(1982), 1870-1876.
- (7) 柳瀬眞一郎, 大海隆二, 森永努, 機論, 64-626, B(1998), 3183-3190.
- (8) 柳瀬眞一郎・ほか3名, 機論, 65-639, B(1999), 3622-3628.
- (9) Gottlieb, D. and Orszag, S.A., Numerical Analysis of Spectral Methods (Soc. Industrial and Appl. Math., 1981).