横流れ不安定特性に影響を及ぼす三次元層流境界層 の要因について*

谷口 英夫^{*1}, 渡邊 喬^{*1}, 加藤 景一^{*2}

Factors of Three-Dimensional Laminar Boundary Layers Affecting the Characteristics of Cross-Flow Instability

Hideo TANIGUCHI^{*3}, Takashi WATANABE and Keiichi KATOH

^{*3}Department of Mechanical Engineering, Iwate University,
4-3-5 Ueda, Morioka-shi, Iwate, 020-8551 Japan

The correlations between the characteristic values of the three dimensional boundary layer and the characteristics of the cross-flow instability have studied by a linear stability analysis of the Falkner-Skan-Cooke boundary layers. Several parameters to predict the critical point of the cross-flow instability and prediction functions of the critical Reynolds number are suggested. It has been found that new parameter defined in this study is available to predict the critical point of the cross-flow instability. It is also shown that the shape factor obtained from the velocity profile of the cross-flow velocity component and the non-dimensional cross-flow velocity at the inflection point of the cross-flow velocity profile are available to predict the critical Reynolds number. The wave length of the critical disturbance in the cross-flow direction has been found to be about 3~4 times as long as the 1% boundary layer thickness of the cross-flow velocity profile.

Key Words: Stability, Boundary Layer, Transition, Three-Dimensional Flow

1. 緒 言

三次元境界層の乱流遷移を導く主要な不安定と考えられている横流れ不安定については、円板^{(1)~(3)}や円すい体⁽⁴⁾⁽⁵⁾のような回転軸対称物体上の境界層や、後退円柱^{(6)~(8)}、後退くさび^{(9)~(12)}といった後退翼を形状的に模擬する物体上の境界層について研究が行われてきた。各研究者は、それぞれの特定の流れ場について横流れ不安定の理論的・実験的研究を行っているが、どのような流れ場が横流れ不安定に対し安定であるか、または不安定であるかといった知見はあまり示されていない。また、安定性解析においては、擾乱を支配する微分方程式の固有値問題を解くことにより、擾乱の特性や臨界レイノルズ数を求めることができるが、それらを決定する層流境界層の要因が特に何であるかといった知見も示されていないようである。本研究では、後退くさび上の三次元境界層(Falkner-Skan-Cooke 流⁽¹³⁾)に対して線形安定性解析を行い、三次元層流境界層の諸特性値と横流れ不安定特性の関

係について調べ、横流れ不安定特性に大きく関与する層流境界層の要因を明らかにすることを目的としている。

2. 三次元層流境界層と線形安定性解析

図1に全頂角 $\Omega\pi$ 、後退角 Λ を有する後退くさび上にとった座標系を示す。このとき境界層の x_c, y_s および z 方向の速度成分はそれぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned}\bar{u}_c &= U_e f'(\eta), \quad \bar{v}_s = V_e g(\eta), \\ \bar{w} &= -\frac{\nu}{\delta} \left(\frac{n+1}{2} f + \frac{n-1}{2} n f' \right), \\ \eta &= z/\delta, \quad \delta = \sqrt{\nu x_c / U_e}, \\ U_e &= k x_c^n [n = \Omega/(2-\Omega), k = \text{const.}], \\ V_e &= V_{\infty} = \text{const.}\end{aligned}\tag{1}$$

ここで、 ν は動粘度を表し、関数 $f(\eta)$ と $g(\eta)$ は以下のFalkner-Skan-Cooke方程式の解である。

$$\begin{aligned}f''' + \frac{n+1}{2} f f'' + n\{1 - (f')^2\} &= 0, \\ g'' + \frac{n+1}{2} f g' &= 0, \\ f(0) = f'(0) = g(0) = 0, \quad f'(\infty) = g(\infty) &= 1\end{aligned}\tag{2}$$

* 原稿受付 2003年10月6日。

^{*1} 正員、岩手大学工学部(☎020-8551 盛岡市上田4-3-5)。

^{*2} (株)東北真空技術(☎039-2245 八戸市北インター工業団地6-1-16)。

E-mail: tani@iwate-u.ac.jp

Fig. 1 Coordinate systems

次に, x_c, y_s 方向の境界層外縁速度の比 a と合成速度 U^* を次のように定義し, 外部流線方向に座標系を反時計回りに θ だけ回転した新たな座標系 (x, y, z) を考える.

$$a = V_e/U_e = \tan \theta, \quad U^* = \sqrt{U_e^2 + V_e^2} \quad \dots\dots (3)$$

このとき, x および y 方向の無次元速度成分 U および V はそれぞれ次のように表される.

$$U(\eta) = \frac{\bar{u}}{U^*} = \frac{1}{1+a^2}(f' + a^2 g),$$

$$V(\eta) = \frac{\bar{v}}{U^*} = \frac{a}{1+a^2}(g - f') \quad \dots\dots\dots (4)$$

さらに, 本研究では安定性解析結果を一般的に議論するために, 無次元座標 η の代わりに, 速度成分 U から得られる境界層排除厚さ $\delta_x^* = \delta \int_0^\infty (1-U) d\eta$ で垂直方向座標 z を新たに無次元化した無次元座標 $\eta^* (= z/\delta_x^*)$ を使用する. 図2は, (x, y, η^*) 座標系における境界層内の速度分布を模式的に描いたものである.

図2に示す流れ場の安定性解析には, 境界層外縁速度 U^* , 境界層排除厚さ δ_x^* を用いて無次元化した次の Orr-Sommerfeld 方程式と境界条件を用いて行った.

$$\{(\alpha^* U + \beta^* V) - \gamma^*\} \{D^2 - (\alpha^{*2} + \beta^{*2})\} w - (\alpha^* D^2 U + \beta^* D^2 V) w = \frac{1}{iRe^*} \{D^2 - (\alpha^{*2} + \beta^{*2})\}^2 w \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\eta^* = 0: w = Dw = 0, \quad \eta^* \rightarrow \infty: w, Dw \rightarrow 0$$

Fig. 2 Sketch of flow situation

ここで, $D = d/d\eta^*$ であり, w は垂直方向擾乱速度成分の振幅を表す. さらに, α^* および β^* はそれぞれ x および y 方向の角波数を表し, γ^* は角周波数, Re^* はレイノルズ数を表し, $Re^* = U^* \delta_x^* / \nu$ である. x 軸から y 軸方向へ反時計回りに測ったとき, 擾乱の伝播方向と x 軸とのなす角度 ϵ は $\epsilon = \tan^{-1}(\beta^*/\alpha^*)$ と表される. また, 角度 ϵ は擾乱の波面と y 軸とのなす角度でもある. 式(5)の固有値問題 $E(Re^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = 0$ は, シューティング法⁽⁴⁾⁽¹⁴⁾を用いて数値的に解析した.

3. 計算結果および考察

本研究では, 圧力勾配パラメータ $n=1, 1/3$ および $1/7$ (全頂角 $\pi, \pi/2$ および $\pi/4$) の三つの場合を対象にし, 外部流線方向 θ については, 10° および $10 \sim 80^\circ$ と 45° の九つの場合について, 安定性解析を行っている. 得られる安定性解析結果と層流境界層の様々な諸特性値との間の相関関係を調べることで, 横流れ不安定特性に大きく影響を及ぼす層流境界層の要因について明らかにしていく.

3.1 層流境界層の速度分布 図3および図4は, 圧力勾配パラメータ $n=1$ の場合における外部流線方向および横流れ方向の速度成分の垂直方向分布を外部流線方向 θ の各値に対して示したものである. 図3の外部流線方向速度成分 $U(\eta^*)$ については, 外部流線方向の角度 θ が大きくなるにしたがい, 壁面における速度勾配は小さくなり同一高さ η^* における速度は低下するのに対して, 境界層外縁付近では逆に速度が大きくなる傾向を示している.

横流れ速度成分 $V(\eta^*)$ については, 式(4)の第二式の性質を反映して圧力勾配パラメータ n が同じであれば, 外部流線方向 θ に対しては全て相似な分布となる. 式(4)の第二式中の関数 $[g(\eta) - f'(\eta)]$ は圧力勾配パラメータ n にのみ依存するので, $V(\eta)$ の大きさは外部流線方向が関係する係数 $a/(1+a^2)$ により変

Fig. 3 Wall-normal profiles of streamwise velocity

Fig. 4 Wall-normal profiles of cross-flow velocity

化する。このため、各 θ の値における $|V|$ の最大値 $|V|_{\max}$ は、 $\theta=45^\circ$ のとき最も大きくなり、 $\theta=45^\circ \pm b (0 < b < 45^\circ)$ のときは同じ $|V|_{\max}$ の値をとる。ただし、安定性解析においては、境界層排除厚さ δ^* を基準とした座標系 η^* で表される速度分布 $V(\eta^*)$ を使用するの、 $\theta=45^\circ \pm b (0 < b < 45^\circ)$ では同一の横流れ速度分布とはならず、図4に示すように、 $|V|_{\max}$ を示す η^* の位置は外部流線方向 θ が大きくなるにしたがい、壁面側に近づいてくる傾向を示している。

外部流線方向 θ を一定として、圧力勾配パラメータ n の値を変えた場合、外部流線方向速度成分 $U(\eta^*)$ の垂直方向分布に及ぼす圧力勾配パラメータ n の影響は小さく、あまり分布形状に変化は見られなかった。一方、横流れ速度成分 $V(\eta^*)$ については、当然ながら、圧力勾配パラメータ n の値が小さくなるにしたがい横流れ速度が減少していき、 $|V|_{\max}$ が小さくなることを示した。

3.2 臨界点における各特性値 本解析から得られた臨界レイノルズ数 Re_c^* と外部流線方向 θ の関係を図5に示す。図5から、圧力勾配パラメータ n が小さくなるにしたがい θ の各値において、 Re_c^* が増加することが分かる。これは、弦方向(図2の x_c 方向)

Fig. 5 Critical Reynolds numbers

Fig. 6 Critical wave numbers

の圧力勾配が小さくなるにしたがい、流れが安定化することを示している。また、 n の各値に対する Re_c^* と θ の関係については、 $\theta=40 \sim 50^\circ$ の範囲において Re_c^* が最小値をとり、その角度から離れるにしたがい Re_c^* が増加することを示している。しかし、 $n=1/7$ においては、 θ が 70° から 80° に変化しても Re_c^* はあまり増加していない。臨界点における擾乱の波数および位相速度の解析結果については次の図6および図7で示すが、 $n=1/7$ 、 $\theta=80^\circ$ の際の臨界点における擾乱の x 方向の角波数 $|\alpha_c^*|$ および位相速度 γ_c^*/α_c^* はそれぞれ0.3および0.4となり、平板境界層の粘性形不安定における臨界点の値(それぞれ0.34および0.39)と非常に近い値を示した。したがって、圧力勾配パラメータ $n=1/7$ 、外部流線方向 $\theta=80^\circ$ の流れ場は横流れ不安定よりも粘性形不安定が支配的であるものと考えられる。

図6は、臨界点における外部流線方向および横流れ方向の擾乱の角波数 α_c^* および β_c^* と外部流線方向 θ との関係を示している。図6から分かるように、外部流線方向の擾乱の角波数 $|\alpha_c^*|$ は圧力勾配パラメータ n の値によらず、外部流線方向の角度 θ が大きくなるにしたがい、緩やかに大きくなる傾向を示してい

Fig. 7 Phase velocities at critical points

る。しかし、 $n=1/3$ および $1/7$ の $\theta=80^\circ$ の場合には、 $|\alpha_c^*|$ はさらに急激に増加している。一方、横流れ方向の擾乱の角波数 $|\beta_c^*|$ は圧力勾配パラメータ n の値によらず、外部流線方向の角度 θ が大きくなるにしたがって緩やかに増加するが、 $\theta=60^\circ$ を境に減少に転じる。特に、 $n=1/3$ および $1/7$ の $\theta=80^\circ$ の場合には、 $|\beta_c^*|$ の急激な減少が観察される。

図 7 は、臨界点における外部流線方向および横流れ方向の擾乱の位相速度 γ_c^*/α_c^* および γ_c^*/β_c^* と外部流線方向 θ との関係を示している。図 7 から分かるように、圧力勾配パラメータ n の値によらず、外部流線方向の角度 θ が大きくなるにしたがって、 γ_c^*/α_c^* は増加する傾向を示しているが、 n が小さくなるにつれ、その増加の割合は小さくなっていく。さらに、 $n=1/3$ および $1/7$ の $\theta=80^\circ$ の場合には一転減少し、約 0.4 という平板境界層の粘性形不安定における臨界位相速度の値 (0.39) と非常に近い値を示す。一方、横流れ方向の擾乱の位相速度 γ_c^*/β_c^* は $\theta=10^\circ$ から 70° まで、ほぼ 0 から 0.08 へと非常に緩やかに増加していき、圧力勾配パラメータ n の値による違いはほとんど見られない。しかし、 $\theta=80^\circ$ になるとその様子は異なり、 n が小さいほど大きな増加を示すようになる。

図 8 は、 $n=1$ および $1/7$ の場合における臨界擾乱の外部流線方向速度成分の振幅分布および位相分布を $\theta=70^\circ$ および 80° に対して示したものである。図 8(a) の $n=1$ の場合では、振幅分布の形状には外部流線方向 θ による大きな違いは見られないが、位相分布においては、 $\theta=80^\circ$ の場合、 $\eta^*=3$ 付近において約 180° のゆっくりした位相変化が観察される。一方、図 8(b) の $n=1/7$ の場合では、振幅分布の形状は外部流線方向 θ により大きく異なり、 $\theta=80^\circ$ の振幅分布は粘性形不安定の TS 波と類似した分布形状を示している。さらに、 $\theta=80^\circ$ の位相分布においては、 $\eta^*=2$ 付近において急激な 180° の位相変化が観察され、粘性

(a) $n=1$ ($\Omega=1$) (b) $n=1/7$ ($\Omega=1/4$)

Fig. 8 Amplitude and phase distributions of the velocity component in the direction of the external streamline of the critical disturbances

形不安定の特徴を示している。

本解析では Orr-Sommerfeld 方程式を用いているため、横流れ不安定と粘性形不安定を厳密に分離して議論することはできないのであるが、図 5~8 の解析結果から類推すると、外部流線方向 $\theta=80^\circ$ の流れ場は横流れ不安定よりも粘性形不安定が支配的に働いているものと推察することができる。

3.3 臨界点の予測パラメータと臨界レイノルズ数の予測関数 図 5 に示したように、圧力勾配パラメータ n や外部流線方向 θ の値が変わると層流境界層の速度分布が変わるためにそれに応じて、臨界レイノルズ数 Re_c^* も様々に変化する。本研究では、数値解析から得られた臨界レイノルズ数 Re_c^* の結果と層流境界層の様々な諸特性値との間の相関関係を調べることにより、層流境界層の諸特性値から横流れ不安定の臨界点を予測するパラメータおよび臨界レイノルズ数の予測関数の作成を試みた。

まず、数値解析から得られた N 種類の流れに対する臨界レイノルズ数を $Y_i (i=1, \dots, N)$ 、臨界レイノル

ズ数の予測関数を $Y = Y(\xi)$, ξ を臨界レイノルズ数を支配するパラメータとし, $Y\xi = C$ (定数) を満足するパラメータ ξ を調べる。もし, そのようなパラメータ ξ が見つければ, $Y = C/\xi$ は臨界レイノルズ数の予測関数を表し, $Y\xi (= \text{定数})$ は臨界点を予測するパラメータとして利用できることになる。

ここでは, パラメータ ξ の満足度を次から得られる値で評価する。

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{(Y - Y_i)^2}}{Y} \dots\dots\dots (6)$$

この R の値が小さいほど, 臨界レイノルズ数を予測するのに適したパラメータと言える。本研究では, 27 種類の流れ場の安定性解析を行っているので, $N=27$ である。実際, 定数 C は, それぞれの層流境界層の諸特性値から得られるパラメータ $\xi_i (i=1, \dots, N)$ と臨界レイノルズ数の計算値 Y_i との積の平均として求めるゆえ, 式(6)は次のように C に対する平均偏差と平均値との比として表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{(Y - Y_i)^2} \xi_i}{Y \xi_i} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{(C - Y_i \xi_i)^2}}{C} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|C - Y_i \xi_i|}{C} \\ &= \frac{\text{Average deviation}}{\text{Average value}} \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

図9は, 本研究において R 値が小さいと判明した上位三つの臨界点予測パラメータの値を外部流線方向 θ に対して示している。図9中の添字 inf は, 横流れ速度成分 $\bar{v}$ の変曲点の位置における値を表す。また, H_y は横流れ速度成分 $\bar{v}$ から得られる形状係数であり, 次式で定義する。

$$H_y = \frac{\delta_y^*}{\theta_y} = \frac{\left| \int_0^\infty \bar{v} / U^* dz \right|}{\int_0^\infty (\bar{v} / U^*)^2 dz} \dots\dots\dots (8)$$

なお, 図9(a)~(c)の縦軸は, 平均値からデータがどれだけばらついているかを比較できるようにいずれも平均値の2倍までとるように表している。図9から分かるように, (a)から(c)にいくにしたがいパラメータ値の平均値からのずれが小さくなっていくことが分かる。また, 図9(a)~(c)のいずれの場合においても, $\theta=80^\circ$ においてパラメータ値が平均値から大きくずれていることが分かる。特に, 圧力勾配パラメータ n の値が小さいほどそのずれは大きい。これは3・2節でも述べたが, $\theta=80^\circ$ においては, 横流れ不安定よりも粘性形不安定が支配的に働いているからだと考えられる。 $\theta=80^\circ$ のデータを除けば, パラメータ値はほぼ平均値周りに分布しており, 特に図9(c)の

Fig. 9 Prediction parameters of critical point

場合については平均値からのずれが非常に小さい。したがって, 図9(c)の縦軸に示したパラメータは横流れ不安定の臨界点を予測するパラメータに非常に適していることを示している。

図9(c)の縦軸のパラメータは, 本研究で新たに考案したパラメータであり, 横流れ速度分布の変曲点位置 z_{inf} およびその位置における外部流線方向渦度成分の主要項 $|\partial \bar{v} / \partial z|_{inf}$, 外部流線方向速度成分から得られる境界層排除厚さ δ^* および動粘度 ν を用いて定義したものである。このパラメータの発想は, 自由せん断流の乱流遷移過程における渦層の巻き上がり現象からきている。巻き上がり現象の際には, 初め渦層は上下に波打ち, その後ある渦が周りの渦を巻き込んで大きな渦へと成長していく。このとき, 渦度が大きいほど, かつ, 渦層の上下の波打ちが大きいほど渦の成長過程は早いものと推測される。ところで, 横流れ速度分布 $\bar{v}(z)$ の変曲点位置 z_{inf} には, 渦度の大きい“強い渦層”が存在する。この渦層が壁面から遠い (z_{inf} が大きい)ほど渦層は上下への波打ちが容易になり流れは不安定になりやすく, 壁面に近い (z_{inf} が小さい)ほどその運動が制限され流れは安定化すると考えた。また, その“強い渦層”の渦度が大きいほど流れは不安定になりやすいものと考えた。図10は, この考えを模式的に描いたものである。図9(c)の数値結果は, このような発想で作成したパラメータが横流れ不安定

Fig. 10 Factors affecting the growth of cross-flow instability

の臨界点の予測に十分利用できることを示唆しているものとする。

表1は、臨界レイノルズ数の予測関数と式(6)の R 値を示したもので、本研究において R 値が比較的低い値を示したものを抜粋して R 値の低い順に並べて示している。表1(a)は粘性形不安定が支配的であると推察される $\theta=80^\circ$ における臨界レイノルズ数も含めた場合の結果であり、表1(b)は $\theta=80^\circ$ のデータを除外した場合の結果である。表1から明らかなように、 $\theta=80^\circ$ のデータを考慮しても無視しても臨界レイノルズ数の予測関数に対する R 値の低い順番に違いは見られないが、 $\theta=80^\circ$ のデータを除外すると R 値は小さくなり横流れ不安定の臨界レイノルズ数の予測関数としての適合性が増すように見受けられる。表1中の上三つの式は、図9に示したパラメータをもとに作成したものである。また、表1中最下部の式は、Pollの横流れパラメータ⁽⁶⁾をもとに作成したものである。Pollの横流れパラメータは、しばしば横流れ不安定の臨界点を予測するパラメータとして紹介されることがあるが、表1中に示す予測関数の中で R 値が最も大きく、臨界点を予測するパラメータとしてはあまり適切でないことが分かる。一方、横流れ速度成分から得られる形状係数 H_y や変曲点位置における無次元横流れ速度 $|\bar{v}|_{\text{inf}}/U^*$ でも横流れ不安定の臨界レイノルズ数を予測するのに十分利用できることを表1は示している。表1に示した変数は臨界レイノルズ数の数値結果と高い相関値を示したものであるが、結局、表1中の上三つの変数が横流れ不安定の臨界レイノルズ数の決定に大きな影響を及ぼすものと考えられる。

表1に示した臨界レイノルズ数の予測関数を、静止

Table 1 Various prediction functions of Re_c^*

(a) Case of included datum of $\theta=80^\circ$

Prediction function of Re_c^*	R [%]
$21.319 / \left(\left \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right _{\text{inf}} \cdot \frac{z_{\text{inf}}}{U^*} \right)$	5.98
$13.816 \cdot H_y$	6.40
$12.127 / (\bar{v} _{\text{inf}}/U^*)$	7.48
$19.898 / (\bar{v} _{\text{max}}/U^*)$	10.00
$11.934 / \left(\left \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right _{\text{inf}} \cdot \frac{\delta_x^*}{U^*} \right)$	10.91
$43.033 / \left(\left \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right _{\text{max}} \cdot \frac{\delta_x^*}{U^*} \right)$	12.15
$78.873 / \left(\frac{ \bar{v} _{\text{max}}}{U^*} \cdot \frac{z_{1\%}}{\delta_x^*} \right)$	14.75

(b) Case of excluded datum of $\theta=80^\circ$

Prediction function of Re_c^*	R [%]
$21.877 / \left(\left \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right _{\text{inf}} \cdot \frac{z_{\text{inf}}}{U^*} \right)$	2.88
$14.169 \cdot H_y$	4.50
$12.433 / (\bar{v} _{\text{inf}}/U^*)$	5.52
$20.400 / (\bar{v} _{\text{max}}/U^*)$	8.31
$12.069 / \left(\left \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right _{\text{inf}} \cdot \frac{\delta_x^*}{U^*} \right)$	9.40
$43.444 / \left(\left \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right _{\text{max}} \cdot \frac{\delta_x^*}{U^*} \right)$	10.60
$81.940 / \left(\frac{ \bar{v} _{\text{max}}}{U^*} \cdot \frac{z_{1\%}}{\delta_x^*} \right)$	11.67

流体中の回転円板⁽¹⁾や回転軸対称物体⁽¹⁶⁾に沿う三次元境界層においても有効であるかどうかを調査した。その結果、本研究で新たに考案した予測関数(表1中最上部の式)が安定性解析から得られる数値結果と最も近い値を示したのであるが、数値結果より約30%低い値を示した。また、表1中のそれ以外の予測関数に関しては、数値結果より40%以上低い値を示す結果となった。この背景には、横流れ速度成分の違いが考えられる。静止流体中の回転円板⁽¹⁾や回転軸対称物体⁽¹⁶⁾に沿う三次元境界層の場合、後退くさび上の三次元境界層よりも横流れ速度成分が最大値と比較して50%以上大きい。表1中の予測関数は、横流れ速度成分をもとに構成されているので、横流れの影響を過大に評価したために臨界レイノルズ数を低く見積もった

Fig. 11 Wave lengths of critical points

ものと考えられる。したがって、横流れ速度成分が後退くさび上の三次元境界層よりも大きい場合には、表 1 中の予測関数は実際の数値結果よりも低い値を示す傾向にあるということを考慮しておかなければならない。

3・4 擾乱の波長を決定する要因 図 11 は、数値解析から得られた臨界点における外部流線方向 (x) および横流れ方向 (y) の擾乱の波長を外部流線方向 θ を横軸にとり表している。なお、図 11 に示した波長は、層流境界層における特徴的な長さスケールと相関関係があるかどうか分かりやすく示すためにそれらとの比として表している。図 11(a) の x 方向の擾乱の波長は、外部流線方向速度成分 $\bar{u}$ が外部ポテンシャル速度 U^* の 99% になる位置 (外部流線方向 99% 境界層厚さ) との比として表しているが、外部流線方向 θ の変化に伴い大きく異なる値をとることを示している。すなわち、 x 方向の擾乱の波長は外部流線方向 99% 境界層厚さと相関関係はほとんどないということが分かる。他の長さスケールとの相関関係についても調べてみたが、現在のところ、 x 方向の擾乱の波長を決定する要因についてはいまだに特定には至っていない。

図 11(b), (c) の y 方向の擾乱の波長は、それぞれ横流れ速度成分 $\bar{v}$ が境界層外縁付近で 1% になる位

置 (横流れ方向 1% 境界層厚さ) および変曲点位置との比として表したものである。図 11(b), (c) から明らかなように $\theta = 10 \sim 70^\circ$ の範囲においては、 θ に対してほとんど値の変化は見られず、その値は図 9(b), (c) についてはそれぞれ 3~4 および 7~8 となる。 $\theta = 80^\circ$ では横流れ不安定よりも粘性形不安定が支配的であると考えられるので、 $\theta = 80^\circ$ におけるデータを除外して考察すると、横流れ不安定の臨界点における擾乱の横流れ方向の波長は、横流れ方向 1% 境界層厚さの 3~4 倍、変曲点位置の 7~8 倍であるということが分かる。一般に、横流れ不安定場には、横流れ渦と呼ばれる渦が発生することが知られている⁽¹⁵⁾。この横流れ渦の高さ方向のスケールはだいたい境界層厚さ程度であるので、横流れ渦は横流れ方向に 3:1~4:1 の楕円形状を成して存在していると推察することができる。

最後に、臨界点における擾乱の伝播方向や波面の方向と層流境界層が示す代表的な方向との間に相関関係がないかどうかを調査した。しかし、それらの擾乱の方向を決定するような要因を層流境界層の特性値から明らかにすることはできなかった。特に、擾乱の伝播方向と横流れ速度分布の変曲点における速度ベクトル、波面の方向と渦度ベクトルおよび最大渦度ベクトルはほとんど関係がないことが分かった。多くの場合、臨界点における擾乱の波面はほとんど外部流線方向に平行でわずかに横流れ方向に傾く傾向を示した。

4. 結 論

三次元境界層の横流れ不安定特性に大きく関与する層流境界層の要因を明らかにするため、本研究では、後退くさび上の三次元境界層 (Falkner-Skan-Cooke Flow) の線形安定性解析を行い、層流境界層から得られる様々な特性値と横流れ不安定特性との相関関係を調べ、以下のような知見が得られた。

(1) 本研究において新たに考察したパラメータ [図 8(c)] が横流れ不安定の臨界点を予測するパラメータとして有効であることが分かった。その結果として、横流れ速度の変曲点位置の高さとその位置における外部流線方向渦度成分値との積の値によって、横流れ不安定が安定であるかどうか簡易的に判断できるということが示された。

(2) 横流れ速度成分から得られる形状係数および変曲点位置における無次元横流れ速度が横流れ不安定の臨界レイノルズ数を予測するのに有効であることが分かった。しかし、本研究において新たに考案したパラメータから作成した予測関数が最も臨界レイノルズ

数を予測するのに適していることが分かった。

(3) 臨界点における擾乱の波長と境界層厚さの関係を調べたところ、擾乱の横流れ方向の波長が、横流れ方向1%境界層厚さの3~4倍であることが分かった。これより推察すると、横流れ不安定場に現れる横流れ渦は、横流れ方向に3:1~4:1の楕円断面をもつ渦であると考えられる。

文 献

- (1) Malik, M. R., Wilkinson, S. P. and Orszag, S. A., *AIAA J.*, **19**-9 (1981), 1131-1138.
- (2) Balakumar, P. and Malik, M. R., *Theoret. Comput. Fluid Dyn.*, **2** (1990), 125-137.
- (3) Faller, A. J., *J. Fluid Mech.*, **230** (1991), 245-269.
- (4) 小林陵二, 機論, **46**-410, B (1980), 1900-1906.
- (5) Kobayashi, R. and Izumi, H., *J. Fluid Mech.*, **127** (1983), 353-364.
- (6) Poll, D. I. A., *J. Fluid Mech.*, **150** (1985), 329-356.
- (7) Masad, J. A. and Malik, M. R., *Phys. Fluids*, **6** (1994), 2363-2379.
- (8) Itoh, N., *J. Fluid Mech.*, **317** (1996), 129-154.
- (9) Högberg, M. and Henningson, D., *J. Fluid Mech.*, **368** (1998), 339-357.
- (10) Taylor, M. J. and Peake, N., *J. Fluid Mech.*, **355** (1998), 359-381.
- (11) Malik, M. R., Li, F., Choudhari, M. M. and Chang, C. L., *J. Fluid Mech.*, **399** (1999), 85-115.
- (12) Huai, X., Joslin, R. D. and Piomelli, U., *J. Fluid Mech.*, **381** (1999), 357-380.
- (13) Cooke, J. C., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **46** (1950), 645-648.
- (14) Betchov, R. and Criminle, W. O. Jr, *Stability of Parallel Flows*, (1967), 74-91, Academic Press.
- (15) 江上泰広・小濱泰昭・小野寺達也, 機論, **63**-607, B (1997), 849-863.
- (16) 谷口英夫・渡邊喬, 機講論, No. 991-1 (1999), 111-112.