乱流中における同一径粒子間の衝突頻度に及ぼす重力の影響*

大 西 領^{*1}, 小 森 悟^{*1}

The Gravity Effects on the Collision Frequency of Monodisperse Particles in Turbulent Flows

Ryo ONISHI and Satoru KOMORI^{*2}^{*2} Department of Mechanical Engineering and Advanced Institute for Fluid Science and Engineering,
Kyoto University, Yoshidahonmachi, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8501 Japan

Collisions of monodisperse particles in turbulent flows are important both in the mechanical engineering and in the cloud microphysics. A number of studies investigated the phenomena but they neglected the gravity effects acting on the particles in order to use simple assumption of isotropic particle motions. In this study, therefore, we investigated the gravity effects on the collision frequency by using a direct numerical simulation. The results show that if the gravity effects are neglected, collision frequency becomes higher. It is also found that the gravity effects are significant when the particle terminal velocity is comparable to or greater than the root mean square value of fluid velocity fluctuation.

Key Words: Collision Frequency, Monodisperse Particles, Turbulent Flow

1. 緒 言

乱流中での同一径粒子間の衝突現象は、雲物理の分野や機械工学の分野で遭遇する重要な現象である。雲物理の分野では、対流雲の成長初期にこの現象が見られる。対流雲では、まず凝縮によって径の揃った雲粒が成長し、径が数十マイクロンにまで成長すると乱流の影響を受けて衝突合体成長する。衝突合体が始まり、粒子径のばらつきが大きくなると、粒子の終末速度差による衝突が盛んになり、一気に粒子径の成長が加速される。もし乱流中の同一径粒子間の衝突を無視してしまうと、対流雲中の粒子の成長は著しく遅くなってしまったと言われている。そのため、乱流中での同一径粒子同士の衝突頻度を正しく考慮できれば、対流雲の成長を正確に予測できるようになり、近年大きな問題となっている局地的な集中豪雨機構の解明・予測が可能になることが期待される。機械工学の分野では混相乱流中での乱流変動に粒子間衝突が大きな役割を果たしていることが明らかになっており⁽¹⁾、その衝突頻度と乱流変動の間には興味深い関係があると考えられる。このように、乱流中での同一径粒子同士の衝突は雲物理と機械工学の両方において解明されるべき重要な現象である。

象である。

この現象に対する研究は 1956 年の Saffman & Turner⁽²⁾の研究にまでさかのぼる。Saffman & Turner は粒子の大きさがコルモゴロフスケール l_η よりも十分に小さく ($d_p/l_\eta \ll 1$) かつストークス数 St が 0 であるとの仮定の下で、確率統計理論を用いて以下に示す粒子の衝突に関する式を導出した。

$$N_c = \frac{1}{2} n^2 d_p^3 \left(\frac{8\pi \epsilon}{15 \nu} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 N_c は単位時間、単位体積内で起こる衝突数を表しており、 n は粒子の数密度、 d_p は粒子の直径、 ϵ は粘性消散率、 ν は動粘性係数をそれぞれ表している。この式から、 St が小さい場合には局所速度勾配 $\lambda (= \sqrt{\epsilon/\nu})$ によって粒子の衝突が引き起こされることが明らかになった。また、Abrahamson⁽³⁾ は St 数が十分大きいと仮定して以下の関係を提案した。

$$N_c = \frac{1}{2} n^2 d_p^3 \left(\frac{16\pi \langle v^2 \rangle}{3} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $\langle v^2 \rangle$ は粒子の速度変動強度の時間平均値を表す。この式から St 数が大きい場合には粒子の速度変動によって衝突が引き起こされることが明らかになった。

しかし、 $St \approx 1$ の場合には、粒子は渦度の小さい領域に集積するため、この集積による粒子濃度の不均一性が粒子の衝突頻度を大きく増大させることが明らか

* 原稿受付 2004 年 4 月 8 日。

^{*1} 正員、京都大学大学院工学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)。

E-mail: komori@mech.kyoto-u.ac.jp

かになった. Sundaram & Collins⁽⁴⁾はこの粒子濃度の不均一性をも考慮して, RDF(Radial Distribution Function), $g(d_p)$, と条件付き相対速度確率密度関数 $P(\mathbf{w}|d_p)$ を用いて次式を導出した.

$$N_c = \frac{1}{2} \pi n^2 d_p^2 g(d_p) \int \mathbf{w} P(\mathbf{w}|d_p) d\mathbf{w} \dots \dots (3)$$

この研究の後を追ひ, 多くの研究が行われたが, この Sundaram & Collins の研究やその追従研究においては, 等方性の仮定を用いているため粒子に働く重力を無視している. そのために真の衝突頻度と異なる衝突頻度を求めてしまっている可能性が指摘されている⁽⁵⁾. しかし, 粒子に働く重力を無視することによって衝突頻度がどのように変化するかについては未だ明らかにされていない.

そこで本研究では, 粒子に働く重力を無視することによって乱流中における同一径粒子間の衝突頻度がどのように変化するかを, つまり重力が衝突頻度と及ぼす影響を, 直接数値計算を用いて明らかにすることを目的とした.

2. おもな記号

- d_p : 粒子の直径 ($=2r$) [m]
 g : 重力加速度 [m/s²]
 K_c : 衝突因子 [m³/s]
 l_η : コルモゴロフスケール [m]
 l_I : 積分スケール [m]
 l_λ : マイクロススケール [m]
 N : 計算領域内の粒子の総数 [-]
 n : 粒子の数密度 [1/m³]
 N_c : 粒子の衝突頻度 [1/(m³·s)]
 r : 粒子の半径 [m]
 St : ストークス数 ($=\tau_p/\tau_\eta$) [-]
 U_i : 流体速度の i 方向成分 [m/s]
 V_i : 粒子速度の i 方向成分 [m/s]
 U : 流体の速さ ($=\sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$) [m/s]
 u_i : 流体速度変動の i 方向成分 ($=U_i - \langle U_i \rangle$) [m/s]
 V_∞ : 粒子の終末速度
 v_i : 粒子速度変動の i 方向成分 ($=V_i - \langle V_i \rangle$) [m/s]
 x, y, z : 主流, 鉛直およびスパン方向座標
 δ_{ij} : クロネッカーのデルタ関数
 ϵ : 粘性消散率 [m²/s³]
 λ : 局所速度勾配 ($=\sqrt{\epsilon/\nu}$) [1/s]
 ν : 動粘性係数 [m²/s]
 ω_i : 流体の i 方向の渦度 [1/s]

- ϕ_v : 粒子体積率 [-]
 ϕ_m : 粒子質量率 [-]
 ρ : 密度 [kg/m³]
 τ_p : 粒子の緩和時間 [s]
 τ_η : コルモゴロフの時間スケール [s]
 添 字
 $\langle \rangle$: 時間平均した
 p : 粒子の
 g : 気流の
 rms : 二乗平均の平方根 (RMS) 値
 n : n ステップ目の

3. 直接数値計算

3.1 流体運動の数値計算 気相乱流場の運動をフーリエ・ガラーキン法を用いたスペクトル法により次式で示される渦度方程式を解くことにより計算した.

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i \dots (4)$$

渦度の時間発展には4次精度のルンゲクッタ法を用い, また, 3分の2法を用いてエイリアジング誤差を除去した⁽⁶⁾. 計算領域を $2\pi L_0 \times 2\pi L_0 \times 2\pi L_0$ として, 境界条件として周期境界条件を用いた. また, 最も大きな渦, つまり波数が1である渦の強さを一定に保つ強制外力 F_i を与えることによって定常な流れ場を形成させた.

代表長さ L_0 を 5mm に固定し, 代表速度を変化させることにより気相乱流場を変化させた. 本研究における気相乱流場の計算条件を表1に示す. 表中の Re は乱流場の速度変動の RMS 値 u_{rms} を用いて $Re = L_0 u_{rms} / \nu$ と定義した.

Table 1 Parameters of turbulent gas flows

	Re
RUN-1	43.3
RUN-2	57.7
RUN-3	80.8

3.2 粒子運動の数値計算 本研究では雲粒を主対象と考えているため, 粒子として微小水滴を想定した. 微小水滴の終末速度基準の粒子レイノルズ数 $Re_p (= d_p V_\infty / \nu)$ は $r = 40\mu\text{m}$ の時に $Re_p \approx 1$ となる. 雲粒の代表的な大きさは $r \approx 10\mu\text{m}$ 程度であるので, 本研究では $r < 40\mu\text{m}$, つまり $Re_p < 1$ に限定し, 粒子をストークス粒子とみなした. ストークス粒子の運動を支配する方程式は以下のように表される.

$$\frac{dx_{i,p}}{dt} = V_i, \dots \dots \dots (5)$$

Table 2 Parameters of particles

	Radius r [μm]	Particle Relaxation Time τ_p [s]	Re_p ($=2rV_\infty/\nu$)
R15	15	2.81×10^{-3}	0.0550
R20	20	5.00×10^{-3}	0.131
R25	25	7.81×10^{-3}	0.255
R30	30	1.12×10^{-2}	0.440
R35	35	1.53×10^{-2}	0.700
R40	40	2.00×10^{-2}	1.05

$$\frac{dV_i}{dt} = -\frac{V_i - U_i}{\tau_p} + \delta_{iz}g \dots \dots \dots (6)$$

ここで、 τ_p は粒子の緩和時間であり、次式で与えられる。

$$\tau_p = \frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{d_p^2}{18\nu} \dots \dots \dots (7)$$

雲粒の代表的な数密度 n は $n \approx 10^8$ であり、これと $r \approx 10\mu\text{m}$ より、粒子体積率 ϕ_v は $\phi_v \approx 10^{-6} \sim 10^{-5}$ 、粒子質量率 ϕ_m は $\phi_m \approx 10^{-2} \sim 10^{-1}$ 程度であると見積もられる。これは粒子濃度が十分低いことを意味しており、粒子による乱流変調は無視できる。

直接数値計算の領域内に $4096 (=16 \times 16 \times 16)$ 個の粒子を混入し、粒子の数密度 n を代表的な雲粒の数密度に相当する $1.32 \times 10^8 [\text{1/m}^3]$ に設定した。また、粒子の半径を $r = 15, 20, 25, 30, 35, 40 [\mu\text{m}]$ の6通りに変化させて衝突率を求めた。なお、これらの粒子半径はコルモゴロフスケールよりも1桁小さかった。粒子に働く重力を考慮する場合には式(6)中の g を $9.8 [\text{m/s}^2]$ に設定し、粒子に働く重力を無視する場合には g を $0.0 [\text{m/s}^2]$ に設定して計算を行った。表2に計算に用いた粒子の半径と緩和時間および終末速度の関係を示す。

直接数値計算により定常な気相乱流場が形成されたことを確認した後に粒子を混入させ、さらに緩和時間 τ_p の10倍以上の時間経過後から衝突を開始させた。衝突は二粒子間の衝突のみを考慮し、二粒子間の距離が粒子の直径以下になれば衝突するとみなした。衝突判定を行う場合には、時間ステップ毎に粒子が最大でもその直径の5分の1程度しか移動しないように時間刻みを十分小さく設定した。Zhou et al. ⁽⁷⁾によると、 $St \sim 0$ の場合には弾性衝突の仮定を用いると、衝突による運動量交換によって引き起こされる余分な衝突(同じペアが何度も衝突してしまう)のために、得られる衝突頻度は Saffman & Turner ⁽²⁾ の理論解に漸近しない。本研究では、 $St \sim 0$ の場合にも正確な衝突頻度を得るために、衝突後には一方の粒子が消滅すると

Fig. 1 Turbulent energy spectra against the wavenumber normalized by the Kolmogorov length scale

Table 3 Typical turbulence statistics

	U_{rms} [m/s]	l_t [m] ($\times 10^{-3}$)	l_η [m] ($\times 10^{-4}$)	l_λ [m] ($\times 10^{-3}$)
RUN-1	0.130	9.75	5.83	8.92
RUN-2	0.173	9.20	4.60	7.73
RUN-3	0.242	9.04	3.54	6.56

仮定した。ある時間ステップ n における衝突頻度 N_c^n を計算領域内の粒子数 N^n と1ステップ (ΔT) 前の粒子数 N^{n-1} および計算領域の体積 Vol を用いて以下の式により算出した。

$$N_c^n = \frac{N^{n-1} - N^n}{Vol \Delta T} \dots \dots \dots (8)$$

また、衝突確率を表す指標である衝突因子 K_c は、時間ステップ毎に求めた $K_c^n (= N_c^n/n^2)$ を平均することによって求められた。

4. 結果および考察

4-1 気相定常等方性乱流場の直接数値計算結果

図1に流動場が十分定常に達した時点でのエネルギースペクトルを示す。この図よりコルモゴロフの $-5/3$ 乗則が成り立つ慣性領域が存在することがわかる。さらに本計算によって、 kl_η が1より十分大きい高波数領域まで乱流変動が解像されていることがわかる。また、図を省略するが各成分の速度変動強度は等しいことも確かめられた。つまり、本研究において理想的な定常等方性乱流場が形成されていることがわかった。

得られたエネルギースペクトルおよび気流速度的変動強度から次式を用いて、積分スケール、コルモゴロフスケールおよびテイラーのマイクロスケールをそれ

Fig. 2 Averaged collision kernel normalized by $8\lambda r^3$ as a function of the Stokes number. Open symbols denote the results without gravity and closed symbols denote the results with gravity.

ぞれ求めた.

$$l_I = \frac{\pi}{2u_{x,rms}^2} \int_0^\infty \frac{E(k)}{k} dk \quad (9)$$

$$l_\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \quad (10)$$

$$\left(\epsilon = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k) dk \right)$$

$$l_\lambda = \frac{1}{15u_{x,rms}^2} \int_0^\infty k^2 E(k) dk \quad (11)$$

その結果および速度変動強度 u_{rms} の値を表3に示す.

4.2 粒子に働く重力の有無による衝突頻度の変化
粒子に働く重力の有無による衝突頻度の変化を調べるために衝突因子 K_c を求めた.

図2に重力を考慮した場合と無視した場合の衝突因子のストークス数 St に対する変化を示す. なお、縦軸は $8\lambda r^3$ によって無次元化されている. また、参考のため Saffman & Turner が $St = 0$ との仮定の下で提案した式 (1) を点線で示す. この図より、重力を無視することによって、衝突頻度を過大評価することがわかる. さらに、乱流場が同じであれば St 数が大きくなるほどその過大評価の程度は大きくなり、乱流場の乱れが強いほど過大評価の程度は小さくなることわかる.

乱流中における同一径粒子間の衝突は、粒子濃度の不均一性、局所速度勾配および粒子が一つの渦に留まりその渦の影響を受け続ける時間に大きく依存すると考えられている. このうち、局所速度勾配は流体運動のみに関係し、粒子に働く重力の有無には無関係であるので、衝突頻度を過大評価してしまう原因として、次の二つの事象が考えられる. 一つは、粒子に働

Fig. 3 Cluster scales normalized by l_η against St in (a) RUN-1, (b) RUN-2 and (c) RUN-3. Symbols as in Fig. 2.

く重力を無視すると、粒子の分布状態を正しく予測できなくなることであり、もう一つは、粒子が一つの渦に留まる時間 (渦滞留時間) を過大評価してしまうことである. 本研究では、これら二つの事象に関して考察を進めた.

4.3 粒子に働く重力の有無による粒子の分布状態の変化
 St 数が1程度の場合、粒子濃度の不均一性が見られ、粒子はクラスター (粒子群) を形成する. 粒子に働く重力の有無によるこのクラスタースケールの変化を調べた. クラスタースケールを調べる方法として Fessler *et al.* (8) の方法を用いた. Fessler *et al.* は、領域を一边 l の立方体に分割し、その立方体中に含まれる粒子数の標準偏差 σ と粒子がランダムに存在すると仮定した時の分布 (二項分布) の標準偏差 σ_{bin} の偏差を表す DB を求め、 DB が最大となる l をクラスタースケール (粒子群の代表的な大きさ) L_{cl} とした.

$$DB = \frac{\sigma - \sigma_{bin}}{\lambda_{ave}} \quad (12)$$

ここで、

$$\sigma_{bin} = \sqrt{\frac{N_p}{N_b} \left(1 - \frac{1}{N_b}\right)} \quad (13)$$

なお、 N_p , N_b はそれぞれ粒子の総数、分割に用いた箱の総数を示しており $N_b = (L/l)^3$ である. また、 $\lambda_{ave} = N_p/N_b$ である.

図3に重力を考慮した場合と無視した場合のクラスタースケールの変化を示す. なお、横軸には St 数を取り、縦軸はコルモゴロフスケールで無次元化されている. この図より、若干の変化はあるもののクラスタースケールはほとんど重力の影響を受けないことがわかる. さらに、粒子径が大きくなっても粒子に働く重力の有無によるクラスタースケールの差は大きくならず、

Fig. 4 Residence time of particles falling at the terminal velocity without drag force in (a)RUN-1, (b)RUN-2 and (c)RUN-3. Symbols as in Fig. 2 and lines as follows: $\cdots$, l_I/V_∞ ; $—$, l_λ/V_∞ ; $---$, l_η/V_∞ .

Fig. 5 Residence time of particles with drag force in (a)RUN-1, (b)RUN-2 and (c)RUN-3. Symbols as in Fig. 2 and lines as follows: $---$, T_1 ; $- \cdot -$, T_2 ; $—$, T_3 .

クラスタースケールは粒子径が大きくなるにつれて粒子に働く重力の有無による衝突率の差が大きくなるという図2の結果を生む要因にはならない。つまり、図3に示す粒子の分布状態の変化は重力を無視することによる衝突頻度の過大評価の主要原因ではないと結論付けることができる。

4.4 粒子に働く重力の有無による渦滞留時間の変化 一つの注目粒子の位置における渦度が0になった時刻から次に0になる時刻までは粒子は同一の渦に滞留しているとみなして、その時間を渦滞留時間と定

義した。

まず、渦滞留時間に対する本定義を用いた場合に、粒子がどのスケールの渦に滞留している時間を対象としているのかを調べた。気流とは独立させて、強制的に粒子をその終末速度で落下させた場合の渦滞留時間を図4に示す。なお、図4には、積分スケール(l_I)、テイラーのマイクロスケール(l_λ)、コルモゴロフスケール(l_η)を粒子の終末速度 V_∞ で割った場合の値もそれぞれ示されている。この図より、本計算結果はテイラーのマイクロスケールを粒子の終末速度で割ったものとよく一致しており、本研究で定義した渦滞留時間は、テイラーのマイクロスケール程度の渦の中に粒子が滞留する時間を表していることがわかる。一方、図3より、クラスタースケールはコルモゴロフスケールの数倍程度であり、粒子の偏分布はコルモゴロフスケール程度の小さな渦の影響を受けると考えられる。本研究においてマイクロスケールはコルモゴロフスケールの二十倍程度大きいことを考慮に入れると、渦滞留時間を考える際には粒子の偏分布の影響を考慮する必要はないと考えられる。

図5に渦滞留時間の重力の有無による変化を示す。粒子が気流と同じ運動をすると仮定すると粒子の平均速度は $u_{rms} (= \sqrt{3}u_{x,rms})$ となるので、渦滞留時間は次のように表せる。

$$T_1 = l_\lambda / u_{rms} \quad \dots\dots\dots (14)$$

また、粒子がその終末速度で運動すると考えると、渦滞留時間は次のように表せる。

$$T_2 = l_\lambda / V_\infty \quad \dots\dots\dots (15)$$

粒子が気流の速度と終末速度の和で運動すると仮定すると、 $(V_1, V_2, V_3) = (U_x, U_y + V_\infty, U_z)$ となり、 $\langle V^2 \rangle = \sqrt{u_{rms}^2 + V_\infty^2}$ となるので、渦滞留時間は次のように表せる。

$$T_3 = \frac{l_\lambda}{\sqrt{\alpha^2 + 1} V_\infty} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 $\alpha = u_{rms}/V_\infty$ である。なお、式(16)は $\alpha \rightarrow \infty$ で T_2 のとき一致し、 $\alpha \rightarrow 0$ のとき T_1 と一致する。図5より、重力を無視した場合には、渦滞留時間は乱流場の乱れが大きくなるほど T_1 に近づくことがわかる。また、重力を考慮した場合には渦滞留時間は T_2 と式(16)の間であり、気流の乱れが大きくなるほど、また、粒子半径が大きくなるほど T_3 に近づくことがわかる。

さらに図5より、重力を無視すると渦滞留時間は過大評価になり、その過大評価の程度は St 数が大きくなるに従って大きく、乱流場の乱れが大きいくほど小さくなる。この傾向は重力を無視した場合

の衝突頻度の過大評価の傾向と一致する。よって、重力を無視すると渦滞留時間を過大評価してしまうことが、重力を無視することによって衝突頻度を過大評価してしまうことの主原因であると結論付けられる。

また、 $T_1 > T_2$ つまり $V_\infty > u_{rms}$ ($\alpha > 1$) の場合には特に大きな差が見られる。よって、 $V_\infty > u_{rms}$ の場合には重力を無視することによる衝突頻度の誤差は無視できないほど大きくなると考えられる。

5. 結 言

本研究では固気混相流に対する直接数値計算を実行することにより、乱流中における同一径粒子間の衝突頻度に及ぼす粒子に働く重力の影響を調べた。その結果、以下の知見を得た。

1. 粒子に働く重力を無視すると、乱流中における同一径粒子間の衝突頻度を過大評価することになる。
2. 重力を無視した際に、乱流中における同一径粒子間の衝突頻度を過大評価する主原因は、粒子が一つの渦に滞留する時間を過大評価することにある。
3. 特に粒子の終末速度が乱流場の速度変動の RMS 値よりも大きい場合には、その過大評価の程度は大きくなり、粒子に働く重力の影響を無視することはできない。

謝 辞

本研究は京都大学大学院 濱塚太一氏の協力を得た。記して深く謝意を表す。また、本数値計算は国立環境研究所地球環境研究センターのスーパーコンピュータ (NEC: SX-6) を用いて行われた。センターの関係者各位に深く感謝する。本研究は文部科学省科学研究費補助金 (課題番号 14102016) および 21 世紀 COE プログラム「動的機能機械システムの数理モデルと設計論」の援助を受けて行われた。

文 献

- (1) Y. Yamamoto, M. Potthoff, T. Tanaka, T. Kajishima and Y. Tsuji, Large-eddy simulation of turbulent gas-particle flow in a vertical channel: effect of considering inter-particle collisions, *J. Fluid Mech.* **442**, (2001), 303-334.
- (2) P. G. Saffman & J. S. Turner, On the collision of drops in turbulent clouds, *J. Fluid Mech.* **1**, (1956), 16-30.
- (3) J. Abrahamson, Collision rates of small particles in a vigorously turbulent fluid, *Chem. Engng Sci.* **30**, (1975), 1371-1379.
- (4) S. Sundaram & L. R. Collins, Collision statistics in an isotropic particle-laden turbulent suspension. Part 1. Direct numerical simulations, *J. Fluid Mech.* **335**, (1997), 75-109.
- (5) R. A. Shaw, Particle-Turbulence Interactions in Atmospheric Clouds, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **35**, (2003), 183-227.
- (6) Takehiro, S., Ishioka, K., Morikawa, Y., Odaka, M., Ishiwatari, M., Hayashi, Y.-Y., GFD Dennou Club, <http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/>.
- (7) Y. Zhou, A. S. Wexler and L.-P. Wang, On the collision rate of small particles in isotropic turbulence. II. Finite inertia case, *Phys. Fluids* **10-5**, (1998), 1206-1216.
- (8) J. R. Fessler, J. D. Kulick and J. K. Eaton, Preferential concentration of heavy particles in a turbulent channel flow, *Phys. Fluids* **6-11**, (1994), 3742-3749.