成層乱流中のパッシブスカラとアクティブスカラの 輸送に与える粘性・拡散性の効果*

花 崎 秀 史^{*1}

The Effect of Viscosity and Diffusivity on the Passive and Active Scalar Transport in Stratified Turbulence

Hideshi HANAZAKI^{*2}

^{*2} Department of Mechanical Engineering, Kyoto University,
Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8501 Japan

Passive and active scalar fluxes in unsteady stratified turbulence are analyzed using the rapid distortion theory (RDT). Analytical solutions of the RDT equations show that viscosity and diffusion excite a 'showly' oscillating mode which doubles the oscillating period of the turbulent diffusion coefficient of the passive scalar. The slow mode becomes dominant with a small amount of initial potential energy. Even when the initial potential energy is negligibly small as in the grid turbulence, the slow mode still strengthens the counter-gradient passive-scalar flux especially at high wave number, in agreement with the previous laboratory experiments. The results illustrate the importance of unsteady analysis of the unsteady turbulence, which has been often ignored in the previous studies.

Key Words: Stratified Flow, Passive Scalar, Vertical Flux, Diffusion, Turbulence

1. 緒 言

安定成層乱流中の熱と物質の輸送メカニズムの解明は、安定成層が大部分を占める大気・海洋中の輸送現象の理解とそのモデル化、あるいは伝熱・流体機器の設計にとって非常に重要である。しかしながら、安定成層乱流では、成層が強い場合には逆勾配拡散が出現し⁽¹⁾⁽²⁾、勾配拡散型の乱流モデルで用いる乱流拡散係数 $K_p = -\overline{\rho u_3} / (d\overline{\rho} / dx_3)$ (ρ は密度、 x_3 は鉛直座標を表す) が負になる場合もあるなど特異な状況が存在する。

特に、安定成層乱流中でのパッシブスカラの輸送・拡散機構の解明は、汚染物質の拡散モデル等の開発においても重要であるが、速度場に影響を与える浮力の源となる熱あるいは密度(アクティブスカラと呼ぶことにする)の乱流輸送と、速度場に影響を与えないパッシブスカラの乱流輸送の違いなど、基本的な部分が未解明のままである。確かに、パッシブスカラ c とアクティブスカラ ρ の拡散において、初期条件が同一ならば、それらの分子拡散係数が等しい時(すなわちシュミット数 Sc とプラントル数 Pr が等しい時)、支配方程式が同型となるため、その後の時間発展も同じであ

るはずである。この時、両者の乱流拡散係数 K_c と K_p も等しくなる。

一方、Warhaft⁽³⁾は、Launder⁽⁴⁾の提案した圧力歪み相関のモデルを用いて、水平方向に一樣な定常乱流の方程式からパッシブスカラとアクティブスカラの鉛直フラックスを求め、パッシブスカラとアクティブスカラの乱流拡散係数の比が1からずれる($K_c \neq K_p$)可能性を示した。

Nagataら⁽⁵⁾は、初期条件の効果を実験的に調べ、流れの途中にノズルからパッシブスカラを吹き出させることにより、パッシブスカラとアクティブスカラの初期条件が異なる設定(c と ρ の乱れの初期相関なし)を作り、その後の時間発展を測定した。その結果、 c と ρ の相関係数 R_{cp} が1に比べてかなり小さい値($R_{cp} \sim 0.25$)に近づくことを示した。

Hanazaki⁽⁶⁾は、成層乱流に対して有効性が知られているRDT理論(Rapid Distortion Theory)⁽²⁾⁽⁷⁾を用い、完全流体の場合について初期条件の効果を調べた。特に、初期のパッシブスカラの濃度乱れ $\overline{c^2}(t=0)$ と初期位置エネルギー PE_0 の効果について調べ、その結果、 $PE_0 = 0$ (このとき $\overline{c\rho}(t=0) = 0$) であれば、 $K_p = K_c$ が全ての時刻で成立することを示した。このことは、基本的に乱流の定常性に基づいた従来の議論で、初期の相関が小さい時にその後の c と ρ の相関が小さくなる

* 原稿受付 2004年8月16日。

^{*1} 正員、京都大学大学院工学研究科(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)。

E-mail: hanazaki@mech.kyoto-u.ac.jp

と予想してきたことが、非定常乱流では成立しないことを示している。また、同じ初期条件下で特に、 $\bar{c}^2(t=0)$ が大きい場合には、 $|R_{cp}|$ は非常に小さくなり、 $K_p = K_c$ が必ずしも $|R_{cp}| = 1$ と対応しないことも明らかとなった。以上の結果は、乱流拡散係数の見積もりにおいて、乱流の非定常性を考慮することが重要であることを示している。

本研究では、非定常な安定成層乱流中の熱やパッシブスカラの拡散が、流体の分子粘性係数 ν 、熱とパッシブスカラの分子拡散係数 κ と D にどのように依存するかを明らかにする。手法としては、上記の RDT 理論⁽⁶⁾ を用いる。この方法は基本的には線形理論であるため適用条件に制約があるが、初期条件を考慮でき、かつ、非定常乱流の時間発展の解析解が得られる唯一の理論でもある。したがって、得られる結果は、定量的な意義以上に、将来の数値計算 (DNS)、及び実験におけるパラメータ設定における指針となることが期待できる。

2. RDT 理論

本論文で考える系は、鉛直 (x_3) 方向に安定な一様密度成層 $d\bar{\rho}/dx_3$ (=一定) があり、同時に鉛直方向に一様濃度勾配 $d\bar{c}/dx_3$ (=一定) がある系である。主流の平均シアーはないものとする。この系に対する非圧縮性流体の支配方程式は、動粘性係数を ν 、密度 (アクティブスカラ) の拡散係数 κ 、パッシブスカラの拡散係数を D として、以下のように書ける。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - g \hat{x}_3 \frac{\rho}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + u_3 \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} = \kappa \nabla^2 \rho, \quad (2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) c + u_3 \frac{d\bar{c}}{dx_3} = D \nabla^2 c, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ は速度、 $\bar{\rho}(x_3)$ は平均密度分布、 ρ_0 は $x_3 = 0$ における平均密度、 ρ は $\bar{\rho}(x_3)$ からの密度のずれ、 $\bar{c}(x_3)$ はパッシブスカラの平均濃度分布、 c は $\bar{c}(x_3)$ からのパッシブスカラ濃度のずれ、 g は重力加速度、 $\hat{x}_3$ は鉛直上向きの単位ベクトルである。

この時、以下のようなスペクトル分解を式 (1)–(3) に代入する。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5)$$

$$\frac{g}{\rho_0} \rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\rho}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (6)$$

$$c(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{c}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (7)$$

成層が十分強く、浮力項が非線形項に比べて十分大きいとみなせる場合、線形近似を適用することができる。(詳しい適用条件については、Hanazaki⁽⁶⁾ 及び Hanazaki & Hunt⁽²⁾⁽⁸⁾ 参照。) そこで、非線形項を無視すると $\hat{u}_i$ 、 $\hat{\rho}$ と $\hat{c}$ に対する以下の方程式を得る。これが、RDT の方程式である。

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k^2 \right) \hat{u}_i = \left(\frac{k_i k_3}{k^2} - \delta_{i3} \right) \hat{\rho}, \quad (8)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \kappa k^2 \right) \hat{\rho} = N^2 \hat{u}_3, \quad \left(N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dx_3} \right) \quad (9)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + D k^2 \right) \hat{c} = -\gamma \hat{u}_3, \quad \left(\gamma = \frac{d\bar{c}}{dx_3} \right) \quad (10)$$

ただし、 $N^2 = -(g/\rho_0)(d\bar{\rho}/dx_3)$ は浮力振動数、 $\gamma = d\bar{c}/dx_3$ は平均鉛直濃度勾配で、共に x_3 によらず一定とする。

3. RDT 方程式の解

RDT 方程式 (8)–(10) の一般解は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 = & e^{-\nu k^2 t} \\ & \times \left\{ \hat{u}_{10} + \frac{k_1 k_3}{k^2} \left[\frac{A}{q_1 + \nu k^2} \left(e^{(q_1 + \nu k^2)t} - 1 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{B}{q_2 + \nu k^2} \left(e^{(q_2 + \nu k^2)t} - 1 \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_2 = & e^{-\nu k^2 t} \\ & \times \left\{ \hat{u}_{20} + \frac{k_2 k_3}{k^2} \left[\frac{A}{q_1 + \nu k^2} \left(e^{(q_1 + \nu k^2)t} - 1 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{B}{q_2 + \nu k^2} \left(e^{(q_2 + \nu k^2)t} - 1 \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\hat{u}_3 = \frac{1}{N^2} [(q_1 + \kappa k^2) A e^{q_1 t} + (q_2 + \kappa k^2) B e^{q_2 t}]. \quad (13)$$

$$\hat{\rho} = A e^{q_1 t} + B e^{q_2 t}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \hat{c} = & \hat{c}_0 e^{-D k^2 t} - \frac{\gamma}{N^2} \frac{q_1 + \kappa k^2}{q_1 + D k^2} A (e^{q_1 t} - e^{-D k^2 t}) \\ & - \frac{\gamma}{N^2} \frac{q_2 + \kappa k^2}{q_2 + D k^2} B (e^{q_2 t} - e^{-D k^2 t}), \end{aligned} \quad (15)$$

ここで

$$q_1 = \frac{1}{2} \left\{ -(\nu + \kappa) k^2 + [(\nu - \kappa)^2 k^4 - 4a^2]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (16)$$

$$q_2 = \frac{1}{2} \left\{ -(\nu + \kappa) k^2 - [(\nu - \kappa)^2 k^4 - 4a^2]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (17)$$

$$A = \frac{1}{q_2 - q_1} [(q_2 + \kappa k^2) \hat{\rho}_0 - N^2 \hat{u}_{30}], \quad (18)$$

$$B = \frac{1}{q_1 - q_2} [(q_1 + \kappa k^2) \hat{\rho}_0 - N^2 \hat{u}_{30}]. \quad (19)$$

極座標を用いて波数ベクトルを記述し、 θ を、波数ベクトル $\mathbf{k}$ が鉛直方向となす角とすると、

$$k_1 = k \sin \theta \cos \phi, k_2 = k \sin \theta \sin \phi, k_3 = k \cos \theta, \quad (20)$$

と書け、この時 $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ である。

また式 (11)–(15) で、添字 0 は初期値を表し、 a は内部重力波の角振動数と一致し、

$$a = \frac{(k_1^2 + k_2^2)^{1/2}}{k} N = N \sin \theta, \quad (21)$$

である。主流が一樣流でストレインやシアーがない場合は、波数ベクトル $\mathbf{k}$ が時間変化しない (Townsend⁽⁹⁾ 参照) ため θ は一定である。したがって、 a も時間によらず一定である。

ここで注意すべきことは、完全流体の場合⁽⁶⁾と同様に、 $\hat{c}(t)$ が $\hat{\rho}(t)$ と異なり、時間的に振動しない $e^{-Dk^2 t}$ に比例した成分を持っていることである。後で見るように、この結果として、 Φ_{c3} 及び $\overline{c u_3}$ の中に、 $\Phi_{\rho 3}$ や $\overline{\rho u_3}$ (振動数 $\sim 2N$) の半分の振動数 $\sim N$ でゆっくり振動する低周波成分が現れることになる。

なお、 c はパッシブスカラのため、式 (11)–(14) で表される $\hat{u}_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) と $\hat{\rho}(t)$ は、パッシブスカラを含まない成層乱流に対する解⁽²⁾と同一である。

4. 3次元スペクトル

通常の室内実験 (格子乱流など) での状況と同じく、初期のアクティブスカラ (密度 ρ) 及びパッシブスカラ c の全方向のフラックスが 0、すなわち、

$$\Phi_{\rho i}(\mathbf{k}, t=0) = \frac{1}{2} \overline{\hat{\rho}_0^* \hat{u}_{i0}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (22)$$

$$\Phi_{ci}(\mathbf{k}, t=0) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (23)$$

が成立していると仮定する。また、 c と ρ の初期相関はない ($\Phi_{c\rho}(\mathbf{k}, t=0) = 0$) と仮定する。この時、パッシブスカラの鉛直フラックスに対する 3 次元スペクトルは以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Phi_{c3}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2} \overline{\hat{c}^* \hat{u}_3 + \hat{c} \hat{u}_3^*} \\ &= \frac{\gamma}{2\beta^2[(\alpha + Dk^2)^2 + \beta^2]} \\ &\times [\sin^4 \theta \{[(\alpha + Dk^2)(\cos 2\beta t - 1) \\ &+ \beta \sin 2\beta t] e^{2a\alpha} - 2\beta e^{(\alpha - Dk^2)t} \sin \beta t^{(A)}\} \Phi_{\rho\rho}(\mathbf{k}, 0) \\ &+ \{(\alpha + Dk^2)N^2 \sin^2 \theta (\cos 2\beta t - 1) e^{2a\alpha} \\ &- 2\beta^2 k^2 (D - \kappa) (e^{2a\alpha} \cos 2\beta t - e^{(\alpha - Dk^2)t} \cos \beta t^{(B)}) \\ &+ ((v - \kappa)(D - \kappa)k^4 - N^2 \sin^2 \theta) \beta e^{2a\alpha} \sin 2\beta t \\ &- (v - \kappa)(D - \kappa)k^4 \beta e^{(\alpha - Dk^2)t} \sin \beta t^{(C)}\} \\ &\times \Phi_{33}(\mathbf{k}, 0)]. \end{aligned} \quad (24)$$

ここで

$$\alpha = -\frac{1}{2}(v + \kappa)k^2, \quad \beta = \sqrt{N^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{4}(v - \kappa)^2 k^4}, \quad (25)$$

であり、下線を引いた項 (A),(B),(C) は、後出 (§5.2) の低周波数成分である。

ただし、 β が虚数 ($|v - \kappa|k^2 > 2N \sin \theta$) の時は、 $\beta = ib$ (b :実数) とおいて、

$$\sin \beta t = i \sinh bt, \quad (26)$$

$$\cos \beta t = \cosh bt, \quad (27)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \Phi_{c3}(\mathbf{k}, t) &= -\frac{\gamma}{2b^2[(\alpha + Dk^2)^2 - b^2]} \\ &\times [\sin^4 \theta \{[(\alpha + Dk^2)(\cosh 2bt - 1) \\ &- b \sinh 2bt] e^{2a\alpha} + 2be^{(\alpha - Dk^2)t} \sinh bt\} \Phi_{\rho\rho}(\mathbf{k}, 0) \\ &+ \{(\alpha + Dk^2)N^2 \sin^2 \theta (\cosh 2bt - 1) e^{2a\alpha} \\ &+ 2b^2 k^2 (D - \kappa) (e^{2a\alpha} \cosh 2bt - e^{(\alpha - Dk^2)t} \cosh bt) \\ &- ((v - \kappa)(D - \kappa)k^4 - N^2 \sin^2 \theta) be^{2a\alpha} \sinh 2bt \\ &+ (v - \kappa)(D - \kappa)k^4 be^{(\alpha - Dk^2)t} \sinh bt\} \\ &\times \Phi_{33}(\mathbf{k}, 0)], \end{aligned} \quad (28)$$

と書き直せる。このとき、フラックスが実数であることに変わりはない。以下では、常に (24) の表式で代表させることとし、 β が虚数の時は式 (26),(27) を用いて式 (28) のように読み代えることとする。

密度の鉛直フラックスは、

$$\begin{aligned} \Phi_{\rho 3}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{4\beta^2} \\ &\times \{\sin^2 \theta [(v - \kappa)(\cos 2\beta t - 1)k^2 - 2\beta \sin 2\beta t] \Phi_{\rho\rho}(\mathbf{k}, 0) \\ &+ N^2 [(v - \kappa)(\cos 2\beta t - 1)k^2 \\ &+ 2\beta \sin 2\beta t] \Phi_{33}(\mathbf{k}, 0)\} e^{2a\alpha}, \end{aligned} \quad (29)$$

となる。これはパッシブスカラが存在しない時と同じである。

他のフラックス、エネルギー等の 3 次元スペクトルも式 (11)–(15) の積のアンサンブル平均として計算できる。以下の節では、 $\overline{c u_3}$ と $\overline{\rho u_3}$ に関連した結果を示す。

5. 乱流拡散係数

5.1 初期条件 初期の乱れが等方的であるとすると、初期の 3 次元スペクトルは次のように書ける。

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, 0) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad (30)$$

$$\Phi_{\rho\rho}(\mathbf{k}, 0) = \frac{S(k)}{4\pi k^2} 2N^2, \quad (31)$$

$$\Phi_{cc}(\mathbf{k}, 0) = \frac{Q(\mathbf{k})}{4\pi k^2}. \quad (32)$$

この時、初期の運動エネルギー KE_0 、初期の位置エネルギー PE_0 などは、

$$KE_0 = \int_0^\infty E(k) dk, \quad (33)$$

$$PE_0 = \frac{1}{2N^2} \int \Phi_{\rho\rho}(\mathbf{k}, 0) d\mathbf{k} = \int_0^\infty S(k) dk, \quad (34)$$

$$\overline{c^2}(0) = \int_0^\infty Q(k) dk, \quad (35)$$

となる。

5.2 フラックス §5.1 の初期条件を §4 の式 (24), (28) のような 3 次元スペクトルの表式に代入し、以下のように全波数空間で積分するとパッシブスカラの鉛直フラックスが得られる。

$$\begin{aligned} \overline{cu_3}(t) &= \int \Phi_{c3}(\mathbf{k}, t) 2\pi k^2 dk \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \left(\int_0^{(2N \sin\theta / |v-\kappa|)^{1/2}} dk k^2 \Phi_{c3}(\mathbf{k}, t) \right. \\ &\quad \left. + \int_{(2N \sin\theta / |v-\kappa|)^{1/2}}^\infty dk k^2 \Phi_{c3}(\mathbf{k}, t) \right) \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、 $0 \leq k \leq (2N \sin\theta / |v-\kappa|)^{1/2} \equiv k_0$ の範囲の積分には (24) の表式を、また、 $k_0 \leq k < \infty$ の積分には式 (28) を用いる。 $\overline{\rho u_3}$ も式 (29) を積分して同様に得られる。

式 (36) の右辺第 2 項は高波数成分 ($k > k_0$) の $\overline{cu_3}$ への寄与を表し、被積分関数 (28) の指数部が負のため、時間 t と共に単調減少する。一方、右辺第 1 項は低波数成分 ($k < k_0$) の $\overline{cu_3}$ への寄与を表し、被積分関数 (24) と同様、時間的に正弦波的に振動する。したがって、パッシブスカラのフラックス $\overline{cu_3}$ においても、密度のフラックス $\overline{\rho u_3}$ と同様⁽²⁾、その低波数成分が浮力により時間振動し、高波数成分は単調減少することがわかる。

ただし、式 (24) は β (低周波) と 2β (高周波) の二種類の振動数を含む。式 (24) で下線を引いた部分が低周波成分 ($\propto \sin\beta t, \cos\beta t$) であり、その他の項が高周波成分 ($\propto \sin 2\beta t, \cos 2\beta t$) である。このうち、低周波成分の項は振幅が $e^{-(\frac{1}{2}(v+\kappa)+D)k^2 t}$ に比例し、高周波成分の項は振幅が $e^{-(v+\kappa)k^2 t}$ に比例する。したがって、 $(v+\kappa)/2 + D \ll v+\kappa$ 、すなわち、 $v+\kappa \geq 2D$ では高周波成分が早く減衰する。プラントル数 $Pr = \nu/\kappa$ とシュミット数 $Sc = \nu/D$ を用いてこの条件を書き直すと、 $Sc \geq 2Pr/(1+Pr)$ となる。 $2Pr/(1+Pr)$ は $Pr \rightarrow \infty$ で最大値 2 をとるため、 $Sc \geq 2$ を満たす多くのパッシブスカラにおいて、 Pr によらず、高周波成分が低周波成分よりも早く減衰することがわかる。

また、 $Pr = 1$ の場合は、 $\nu = \kappa$ であり、全波数 k で β が実数であり、完全流体 ($\nu = \kappa = 0$) の時と同じく、全波数域で時間振動が生じる。

5.3 乱流拡散係数の時間発展 本論文における変数の定義ではアクティブスカラ (密度) の乱流拡散係数は

$$K_\rho(t) = \frac{\overline{\rho u_3}(t)}{N^2}, \quad (37)$$

パッシブスカラの乱流拡散係数は

$$K_c(t) = -\frac{\overline{cu_3}(t)}{\frac{dc}{dx_3}} = -\frac{\overline{cu_3}(t)}{\gamma}, \quad (38)$$

と書ける。

以下では、典型的な水槽実験⁽¹⁰⁾に近いパラメータ値を用いて、これらの具体的な時間発展を考える。

初期のエネルギースペクトルとしては、実験でのスペクトルと類似と考えられる

$$E(k) = KE_0 \sqrt{\frac{16}{\pi}} \frac{k^2}{k_0^3} e^{-\frac{k^2}{k_0^2}}, \quad (39)$$

$$S(k) = PE_0 \sqrt{\frac{16}{\pi}} \frac{k^2}{k_0^3} e^{-\frac{k^2}{k_0^2}}, \quad (40)$$

を用いる。これらは、(33), (34) を満たす。また、 k_0 はスペクトル $E(k), S(k)$ のピーク波数である。

以下では $\overline{cu_3}$ 、 $\overline{\rho u_3}$ から K_c, K_ρ を計算するが、式 (24), (29) からわかるように、これらは $\Phi_{cc}(\mathbf{k}, 0)$ に依らないので、式 (32) 中の $Q(k)$ の具体形はここでは必要ない。

なお、浮力振動数 $N = 1.75/\text{sec}$ 、エネルギーのピーク波数 $k_0 = 12/\text{cm}$ 、水の動粘性率 $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{sec}$ とし、プラントル数は熱に対する値 $Pr = \nu/\kappa = 6$ を用い、パッシブスカラのシュミット数は塩分に対する値 $Sc = \nu/D = 600$ とする。

図 1、図 2 はアクティブスカラ (密度) の乱流拡散係数 K_ρ とパッシブスカラの乱流拡散係数 K_c の時間発展 (Nt 依存性) を、種々の初期位置エネルギーと初期運動エネルギーの比 PE_0/KE_0 の場合について示したものである。図 1、図 2 共に、完全流体の場合⁽⁶⁾と同様、初期エネルギー比によって値が大きく変化するが、両者で大きく異なる点は、 $PE_0/KE_0 = 0$ の場合を除き、時間振動の周期 T が K_c では $T \sim 2\pi/N$ であり、 K_ρ の場合 (周期 $T \sim \pi/N$) の約 2 倍になっていることである。これは、 K_c では、§5.2 で議論した低周波成分が支配的となることによる。一方、 K_ρ は高周波成分しか含まない。

$PE_0/KE_0 = 0$ の場合は、一般には格子乱流での状況に近いと考えられているが、以下の図 4 で見るように、

Fig. 1 Time development of the turbulent diffusion coefficient of density K_p for various values of initial energy ratio PE_0/KE_0 . —, $PE_0/KE_0 = 0$; ----, $PE_0/KE_0 = 0.2$; - · -, $PE_0/KE_0 = 0.5$; ---, $PE_0/KE_0 = 1.0$.

Fig. 2 Time development of the turbulent diffusion coefficient of passive scalar K_c for various values of initial energy ratio PE_0/KE_0 . —, $PE_0/KE_0 = 0$; ----, $PE_0/KE_0 = 0.2$; - · -, $PE_0/KE_0 = 0.5$; ---, $PE_0/KE_0 = 1.0$.

低周波成分があまり大きくないため、図2で K_c は短い周期 $T \sim \pi/N$ で振動するように見える。

図3と図4は、図2に示した K_c を、高周波成分と低周波成分からの寄与の2つに分けて示したものである。図4は低周波成分、すなわち式(24)の下線を引いた項(A),(B),(C)からの寄与を表し、図3は高周波成分、すなわち式(24)式の下線を引いていない項からの寄与を表す。図3の高周波成分に比べて、図4の低周波成分の減衰は遅く、図2と図4を比べてみると、時間

Fig. 3 Time development of the fast mode of K_c for various values of initial energy ratio PE_0/KE_0 . —, $PE_0/KE_0 = 0$; ----, $PE_0/KE_0 = 0.2$; - · -, $PE_0/KE_0 = 0.5$; ---, $PE_0/KE_0 = 1.0$.

Fig. 4 Time development of the slow mode of K_c for various values of initial energy ratio PE_0/KE_0 . —, $PE_0/KE_0 = 0$; ----, $PE_0/KE_0 = 0.2$; - · -, $PE_0/KE_0 = 0.5$; ---, $PE_0/KE_0 = 1.0$.

と共に ($Nt \geq 5$) 低周波成分が支配的となっていくことがわかる。これは、 $Pr = 6$ と $Sc = 600$ の条件が、§5.2 の $Sc \geq 2Pr/(1+Pr)$ の条件を満たしていることによる。

図5は、図1と図2における K_c と K_p の時間発展 ($0 \leq Nt \leq 5$) を、格子乱流実験で典型的と考えられる $PE_0/KE_0 = 0$ の場合について、同一の図に書いたものである。前述のように、この場合の振動周期は $T \sim \pi/N$ である。 K_c の方が K_p よりも強い逆勾配拡散 ($K_c < 0$) を示しているが、これは、過去の水槽実験の結果 (Komori & Nagata (1996)⁽¹⁰⁾ の figure 32 参照) と一致する。 $PE_0/KE_0 = 0$ の場合は、 K_c における低周波成分の寄与は大きくはないが、図4にも見られるように、 $2 \leq Nt \leq 5$ の範囲で負の値をとっており、これが、高周

Fig. 5 Time development of K_c and K_ρ for $PE_0/KE_0 = 0$. —, K_c ; ----, K_ρ .

Fig. 6 One-dimensional spectra $-k_1 \Theta_{c3}(k_1)$ and $-k_1 \Theta_{\rho3}(k_1)$ at time $Nt = 2.4$ with $PE_0/KE_0 = 0$. —, $-k_1 \Theta_{c3}(k_1)$; ----, $-k_1 \Theta_{\rho3}(k_1)$.

波成分だけ持つ K_ρ よりも強い逆勾配拡散を示す原因となっている。なお、 $PE_0/KE_0 \neq 0$ の場合には逆に、図4に見られるように、低周波成分には初期に ($0 \leq Nt \leq 3.5$) 逆勾配拡散を妨げる効果があることに注意する必要がある。この効果は、 $PE_0/KE_0 = 0.2$ 程度でもかなり強く、 K_c と K_ρ の差は PE_0/KE_0 の値に敏感に依存すると言える。

図6は、図5で逆勾配拡散が最も強い時刻 $Nt = 2.4$ における1次元スペクトル $-k_1 \Theta_{c3}(k_1)$ と $-k_1 \Theta_{\rho3}(k_1)$ を示したものである。ここで、1次元スペクトルは、以下のように定義されている。

$$\Theta_{c3}(k_1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \Phi_{c3}(\mathbf{k}, t). \quad (41)$$

この図から、高波数成分でパッシブスカラの逆勾配拡散が強いことがわかるが、これも過去の水槽実験⁽¹⁰⁾と一致している。 $\Theta_{c3}(k_1)$ と $\Theta_{\rho3}(k_1)$ の差は、主として式

(24)の(B),(C)項に起因していると考えられるが、これらはそれぞれ k^2, k^4 に比例する項であり、比較的高波数で寄与が顕著となる。

6. 結 言

成層乱流中のパッシブスカラとアクティブスカラ（密度）の拡散の違いに与える粘性と拡散の効果を RDT 理論によって解析した。その結果、粘性と拡散がある場合、パッシブスカラの乱流拡散係数 K_c には、高周波成分の他に低周波成分が現れることがわかった。その強さは、初期位置エネルギーと初期運動エネルギーの比 PE_0/KE_0 に敏感に依存し、 $PE_0/KE_0 \sim 0.2$ でも低周波成分の影響が顕著になり K_c の振動周期を2倍にする効果があることがわかった。また、格子乱流の状況に近いと考えられる $PE_0/KE_0 = 0$ の場合には、低周波成分の大きさは比較的小さいものの、逆勾配拡散を強める効果があり、特に高波数領域でそれが顕在化することがわかった。

ただし、数値計算 (DNS)⁽¹¹⁾ もシアーのない場合のデータが得られていないなど、本論文の結果と直接定量的に比較できるデータはまだ存在しないのが現状である。今後、それらのデータとの比較が、非線形効果 (RDT の成立する時間・空間スケールの定量的な吟味) を含めたより詳細な検討のために必要である。

しかしながら、本研究の結果は、非定常成層乱流における粘性・拡散と初期条件の効果を明確に示しており、今後の数値計算、実験、あるいは乱流拡散のモデル化の指針として役立つことが期待される。

文 献

- (1) Komori, S., Ueda, H., Ogino, F. and Mizushima, T., Turbulence structure in stably stratified open-channel flow. *J. Fluid Mech.*, 130 (1983), 13–26.
- (2) Hanazaki, H. and Hunt, J. C. R., Linear processes in unsteady stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, 318 (1996), 303–337.
- (3) Warhaft, Z., Heat and moisture flux in the stratified boundary layer. *Q. J. R. Met. Soc.*, 102 (1976), 703–707.
- (4) Launder, B. E., On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum. *J. Fluid Mech.*, 67 (1975), 569–581.
- (5) Nagata, K. and Komori, S., The difference in turbulent diffusion between active and passive scalars in stable thermal stratification. *J. Fluid Mech.*, 430 (2001), 361–380.
- (6) Hanazaki, H., Effects of initial conditions on the passive and active scalar fluxes in unsteady stably stratified turbulence. *Phys. Fluids*, 15 (2003), 841–848.
- (7) Hanazaki, H., Linear processes in stably and unstably stratified rotating turbulence. *J. Fluid Mech.*, 465 (2002), 157–190.

- (8) Hanazaki, H. and Hunt, J. C. R., Structure of unsteady stably stratified turbulence with mean shear. *J. Fluid Mech.*, 507 (2004), 1–42.
 - (9) Townsend, A. A., *The Structure of Turbulent Shear Flow*. Cambridge University Press., (1976), pp. 429.
 - (10) Komori, S. and Nagata, K., Effects of molecular diffusivities on counter-gradient scalar and momentum transfer in strongly stable stratification. *J. Fluid Mech.*, 326 (1996), 205–237.
 - (11) Kaltenbach, H.-J., Gerz, T. & Schumann, U., Large eddy simulation of homogeneous turbulence and diffusion in stably stratified shear flow. *J. Fluid Mech.*, 280 (1994), 1–40.
-