WENO スキームを用いた界面捕獲法の構築*

柳 岡 英 樹^{*1}, 稲 村 隆 夫^{*1}

Development of Surface Capturing Method Using WENO Scheme

Hideki YANAOKA^{*2} and Takao INAMURA^{*2} Department of Intelligent Machines and System Engineering, Hirosaki University,
3 Bunkyo-cho, Hirosaki-shi, Aomori, 036-8561 Japan

The present study develops a new surface capturing method using the WENO scheme for numerical simulations of free surface flows. The present numerical method couples the incompressible Navier-Stokes equations with the VOF method. This surface capturing method eliminates need for special free surface tracking method, and can be easily extended to three-dimensional simulations of free surface flows. The present surface capturing method is applied to a solitary wave propagation problem. The moving free surface is accurately tracked. Present numerical results are in good agreement with the previous theoretical, numerical and experimental results. The free surface is captured on several grid points although numerical diffusions occur around the discontinuity regions.

Key Words: Multi-phase Flow, Free Surface Flow, Surface Capturing Method, VOF, WENO Scheme, Solitary Wave, Numerical Analysis, Finite Difference Method

1. 緒 言

気流中に噴射された液噴流の不安定化と微粒化は各種燃焼器において見られる。この微粒化機構をモデル化し、噴霧特性を正確に予測することは機器設計においてきわめて重要な課題である。このような液体の微粒化機構を数値計算により予測するには、気体と液体の界面の挙動を正確に捉える必要がある。しかしながら、気液界面では密度が不連続的に変化するため、数値計算において界面を追跡することはきわめて難しい問題である。したがって、表面張力を考慮した気液界面の挙動を精度良く予測するための効率的な計算手法の確立が必要である。

気液界面の追跡法として従来から VOF (Volume Of Fluid) 法⁽¹⁾が用いられ、気泡流や液噴流の液滴分裂解析などに利用されている。富山⁽²⁾は VOF 法を用いたダクト内における気泡の挙動解析を行い、既存値との良い一致を得ている。Richards⁽³⁾は VOF 法に CSF (Continuous Surface Force) 法⁽⁴⁾を組み合わせて液噴流の解析を行い、実験値との良い一致を得ている。稲村⁽⁵⁾は液噴流中にランキン渦による乱れを発生させ、噴射後の液噴流表面の挙動解析を行っている。

従来の VOF 法では、体積分率の輸送方程式を DA (Donor-Acceptor) 法で解くことにより界面の移動を決定している。DA 法は移流方向に対して斜めの界面を正確に捉えることができず、界面を鈍らせる欠点がある。この問題を解決するため、VOF 法を改良した方法がいくつか提案されている。Ashgriz-Poo⁽⁶⁾は FLAIR 法を提案し、界面を正確に輸送できることを示しているが、この方法は数値拡散が強く、界面が不鮮明となる欠点がある。また、界面の傾きを考慮した SURFER 法⁽⁷⁾が提案され、せん断流中における気液界面の不安定化に関する直接数値解析により、液滴分裂の過程が捉えられている⁽⁸⁾。功刀⁽⁹⁾は界面の勾配を考慮した MARS 法を開発し、気泡塔下部オリフィスから発生する気泡および気泡同士の合一挙動に関する解析を行っている。Kim-Lee⁽¹⁰⁾は DA 法に基づく VOF 法において、計算セルを小さなセル (baby cell) で再分割しセル界面の流束を計算する方法を提案し、種々の界面移動問題に適用し良い結果を得ている。

一方、界面を捉える別な方法として界面捕獲法がある。Kelecy-Pletcher⁽¹¹⁾は衝撃波捕獲法の MUSCL 法⁽¹²⁾を気液界面の捕獲に適用し、その有効性を示している。しかしながら、表面張力の影響を考慮した計算は行っていない。MUSCL 法などの衝撃波捕獲法を界面捕獲法として利用する場合、界面追跡法と比較して界面追

* 原稿受付 2004 年 6 月 30 日。

^{*1} 正員、弘前大学理工学部 (〒036-8561 弘前市文京町 3)。

E-mail: yanaoka@cc.hirosaki-u.ac.jp

跡のための特別な操作を必要とせずアルゴリズムが簡単であり、また三次元への拡張が容易である。しかしながら、数値拡散のため界面が不鮮明となる傾向があり、液滴分裂の解析に適用する場合、数値拡散を抑える改良が必要である。

本研究では、三次元への拡張が容易であり、特別な界面追跡を必要としない界面捕獲法の提案を考え、衝撃波捕獲法の一つである WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) スキーム⁽¹³⁾を気液界面の捕捉に改良し、VOF 法⁽¹⁾に適用することにより数値拡散の少ない高次精度の界面捕獲法を構築することを目的とする。

2. 主 な 記 号

- C : 体積分率
 $\mathbf{D}$: ひずみ速度テンソル
 $\mathbf{e}_g$: 重力方向の単位法線ベクトル
 Fr : フルード数 $Fr = U_{ref}^2 / (gL_{ref})$
 F_{sa} : 表面張力
 F_{sv} : 表面張力による体積分力
 g : 重力加速度
 L_{ref} : 代表寸法
 $\mathbf{n}$: 法線ベクトル
 $\hat{\mathbf{n}}$: 単位法線ベクトル
 p : 圧力
 Re : レイノルズ数 $Re = U_{ref} L_{ref} / \nu_{ref}$
 t : 時間
 $\mathbf{u}$: 速度ベクトル (u, v, w)
 U_{ref} : 代表速度
 We : ウェーバー数 $We = \rho_{ref} L_{ref} U_{ref}^2 / \sigma$
 $\mathbf{x}$: デカルト座標系 (x, y, z)
 δ_s : 界面デルタ関数
 κ : 界面曲率
 μ : 粘性係数
 ν : 動粘度
 ρ : 密度
 σ : 表面張力係数
- 添 字
 ref : 代表値
 1 : 流体 1
 2 : 流体 2

3. 基礎方程式および数値解法

気相、液相とも非圧縮性流体と仮定し、二流体を体積分率を用いて区別する。支配方程式は次に示す連続の式、ナビエ・ストークスの運動方程式である。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla (2\mu \mathbf{D}) + \frac{1}{\rho} \mathbf{F}_{sv} + g \mathbf{e}_g \quad (2)$$

ひずみ速度テンソルは次式で定義される。

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (3)$$

密度と粘性係数は以下のように定義する。

$$\rho = C\rho_1 + (1-C)\rho_2 \quad (4)$$

$$\mu = C\mu_1 + (1-C)\mu_2 \quad (5)$$

ここで、下添字 1, 2 は各流体を示し、 C は体積分率を表す。

$$C = \begin{cases} 1 & \text{inside fluid 1} \\ 0 & \text{inside fluid 2} \end{cases} \quad (6)$$

体積分率 C に関する輸送方程式は以下のように表される。

$$C_t + \nabla \cdot (C\mathbf{u}) = 0 \quad (7)$$

代表長さを L_{ref} 、代表速度を U_{ref} 、代表密度を $\rho_{ref} = \rho_1$ 、代表粘性係数を $\mu_{ref} = \mu_1$ とし、上式の変数を、

$$t^* = \frac{U_{ref} t}{L_{ref}}, \quad \mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L_{ref}}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U_{ref}},$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U_{ref}^2}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_{ref}}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_{ref}}$$

と無次元化すれば、支配方程式はそれぞれ式 (8), (9), (10) のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{Re} \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \frac{1}{\rho} \mathbf{F}_{sv} + \frac{\mathbf{e}_g}{Fr} \quad (9)$$

$$C_t + \nabla \cdot (C\mathbf{u}) = 0 \quad (10)$$

ここで、

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (11)$$

$$\rho = C + \frac{\rho_2}{\rho_1} (1-C) \quad (12)$$

$$\mu = C + \frac{\mu_2}{\mu_1} (1-C) \quad (13)$$

なお、簡単化のため上式中では上添字 * は省略してある。

本研究では、既報告⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾の計算手法を気液二相流の解析に改良する。上式の解法には既報告と同様 SMAC 法⁽¹⁶⁾を用いる。時間微分の離散化に関しては、対流項および粘性項には Crank–Nicholson 法、圧力項には Euler 後退差分を用い時間進行を行う。ナビエ・ストー

Table 1 Interpolation coefficients and linear weights for $r = 3$

	$\alpha'_{k,l}$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	β'_k
WENO ₅ ⁽¹³⁾	$k = 0$	2/6	-7/6	11/6	1/10
	$k = 1$	-1/6	5/6	2/6	6/10
	$k = 2$	2/6	5/6	-1/6	3/10
OPPG-WENO ₅ ⁽²²⁾	$k = 0$	0.37231	-1.02576	1.65345	0.10973
	$k = 1$	-0.19734	0.81691	0.38043	0.42235
	$k = 2$	0.38043	0.81691	-0.19734	0.38179
	$k = 3$	1.65345	-1.02576	0.37231	0.08613

クス方程式の空間微分については、対流項には五次精度上流差分⁽¹⁷⁾、ひずみ速度テンソルには四次精度中心差分を適用する。その他の空間微分については二次精度中心差分を用いる。体積分率の輸送方程式については次に示す五次精度の WENO スキーム⁽¹³⁾を用いた界面捕獲法を適用する。

4. WENO スキームを用いた界面捕獲法

圧縮性流体の解析において、衝撃波捕獲法として ENO (Essentially Non-Oscillatory) スキーム⁽¹⁸⁾が広く使われている。その考え方は、セル界面の流束を高次精度で近似し、さらに衝撃波近傍で振動を回避するため、いくつかの候補となるステンシルの中から最も滑らかなステンシルを使うことである。これにより、一様に高次精度を確保することができる。しかしながら、この ENO スキームには欠点があり、計算コードの中に条件文が多く、スーパーコンピュータを使った解析には適していない。さらに、解が滑らかなところでは選ぶステンシルに任意性が生じる。

WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) スキーム⁽¹³⁾は ENO スキームの欠点を改良した方法であり、ENO スキームより精度の高い結果が得られている。WENO スキームでは候補となるステンシルをすべて使い、重み結合によりセル界面の流束を求める。解が滑らかな領域では重みは最適値に漸近し、高次精度が確保され、不連続面のある領域では不連続面を含むステンシルの重みはゼロとなる。これにより、ENO スキームより精度が高く、ENO の特性を持ち振動が発生せず、さらにはスーパーコンピュータに適した解法となる。本研究では、この WENO スキームを界面捕獲法として改良する。

4.1 WENO スキーム 体積分率の輸送方程式における対流項を以下のように離散化する。なお、ここでは x 方向の離散化についてのみ述べる。

$$\frac{\partial uC}{\partial x} = \frac{f_{j+1/2} - f_{j-1/2}}{\Delta x} \quad (14)$$

このとき、数値流束 $f_{j+1/2}$ は以下のようにになる。

$$f_{j+1/2} = u_{j+1/2}^+ C_{j+1/2}^L + u_{j+1/2}^- C_{j+1/2}^R \quad (15)$$

$$u^+ = \frac{u + |u|}{2}, \quad u^- = \frac{u - |u|}{2}$$

ここで、 L と R は境界の左と右の値を意味する。本研究では、 $C_{j+1/2}^L, C_{j+1/2}^R$ を求めるのに WENO スキーム⁽¹³⁾を用いる。以下では $C_{j+1/2}^L$ について説明するが、 $C_{j+1/2}^R$ は $x_{j+1/2}$ について対称であることから簡単に求まる。

r 個のステンシルを S_k ($k = 0, \dots, r-1$) とする。ステンシル S_k は $S_k = \{x_{j+k-r+1}, \dots, x_{j+k}\}$ と r 個の点を含む。 $C_{j+1/2}^L$ はステンシル k 上の流束 q_k^r を使い、以下のように定義する。

$$C_{j+1/2}^L = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_k q_k^r \quad (16)$$

ここで、 ω_k は重みである。 q_k^r は r 次精度の多項式補間であり、ステンシル k 上の値を使って以下のように求める。

$$q_k^r|_{j+1/2} = \sum_{l=0}^{r-1} a_{k,l}^r C_{j-r+1+k+l} \quad (17)$$

ここで、 $a_{k,l}$ は補間係数であり、 $r = 3$ のとき表 1 のように与えられる⁽¹³⁾。 $r = 3$ の場合、WENO スキームは五次精度となる。重みは Jiang-Shu と同様に次のように定義する。

$$\omega_k = \frac{\beta'_k / (\varepsilon + IS_k)^p}{\sum_{m=0}^{r-1} \beta'_m / (\varepsilon + IS_m)^p} \quad (18)$$

β'_k は線形の重み係数であり、 ε はゼロ除算を防ぐための小さな値で本研究では $\varepsilon = 10^{-10}$ とする。さらに、本研究ではべき指数の p については $p = 3$ とする。 IS_k は解の滑らかさを測るインジケータであり、次のように与えられる。

$$IS_k = \sum_{m=1}^{r-1} \left(\sum_{l=0}^{r-1} \gamma_{m,k} C_{j-r+1+k+l} \right)^2 \quad (19)$$

$r = 3$ のときの係数 $\gamma_{m,k}$ を表 2 に示す。

Table 2 Smoothness measurement coefficients for $r = 3$, where $b_2 = \sqrt{13/12}$

$\gamma_{l,k}$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$
$k = 0$	1/2	-4/2	3/2
$k = 1$	-1/2	0	1/2
$k = 2$	3/2	-4/2	1/2
$k = 3$	-5/2	8/2	-3/2

$\gamma_{l,k}$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$
$k = 0$	b_2	$-2b_2$	b_2
$k = 1$	b_2	$-2b_2$	b_2
$k = 2$	b_2	$-2b_2$	b_2
$k = 3$	b_2	$-2b_2$	b_2

4.2 WENOスキームの最適化 WENOスキームなどの差分法を用いた解法では、捉えることができる小スケールは格子サイズによって決まる。Tam-Webb⁽¹⁹⁾は中心差分における分散誤差を最小化することによって差分法の最適化を行い、DRP (Dispersion Relation Preserving) スキームを提案している。Weis-Candler⁽²⁰⁾, Wang-Chen⁽²¹⁾, Ponziani ら⁽²²⁾は Tam-Webb の考え方を WENO スキームの最適化に適用し、従来の WENO スキームより解像度の高い方法を提案している。本研究では Ponziani らの方法を適用し、WENO スキームの最適化を行う。すべてのステンシルの補間係数 $a_{k,l}^r$ と重み β_k^r の最適化を行い、さらに Weis-Candler⁽²⁰⁾ と同様に数値散逸を抑えるため、ステンシルを追加する。

$$C_{j+1/2}^L = \sum_{k=0}^r \omega_k q_k^r \quad (20)$$

このとき、重みは次のように定義する。

$$\omega_k = \frac{\beta_k^r / (\varepsilon + IS_k)^p}{\sum_{m=0}^r \beta_m^r / (\varepsilon + IS_m)^p} \quad (21)$$

ここで、 IS_r は下流の影響を少なくするため、以下のように定義する⁽²⁰⁾。

$$IS_r = \max_{0 \leq k \leq r} IS_k \quad (22)$$

最適化した補間係数 $a_{k,l}^r$ と重み β_k^r を従来の WENO スキーム⁽¹³⁾と比較して表 1 に示す⁽²²⁾。

4.3 ACM の適用 不連続面の伝播速度が一定の線形の波の場合、WENO スキームなどの衝撃波捕獲法を用いると波の広がり大きいことが知られている。Jiang-Shu⁽¹³⁾は線形問題に対して Yang⁽²³⁾の ACM (Artificial Compression Method) を用い、数値拡散による波の広がりを抑えている。本研究のような二相流の問題に WENO スキームのみを適用すると、やはり波

の広がりが大きいことがわかった。したがって、不連続面をより鋭くに捉えるため、セル界面の数値流束の算出に ACM を適用する。セル界面の流束を以下のように修正する。

$$\begin{aligned} \hat{C}_{j+1/2}^L &= C_{j+1/2}^L + \delta C_{j+1/2}, \\ \hat{C}_{j+1/2}^R &= C_{j+1/2}^R - \delta C_{j+3/2} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\delta C_{j+1/2} = \minmod[$$

$$\begin{aligned} &\alpha_j \minmod(C_{j-1/2}^R - C_{j-1/2}^L, C_{j+1/2}^R - C_{j+1/2}^L), \\ &\minmod(C_{j+1} - C_{j+1/2}^L, C_{j-1/2}^R - C_{j-1})] \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 $\minmod$ は $\minmod$ 関数、 α_j は圧縮の度合いを表すパラメータであり、本研究では $\alpha_j = 3.3$ と設定した。解が滑らかな領域では、この ACM による流束の修正で加える $\delta C_{j+1/2}$ は打ち切り誤差と同じオーダーなので精度の低下にはならない⁽¹³⁾⁽²³⁾。

4.4 非物理的な体積分率の修正 計算過程において、体積分率の値が $C < 0$ あるいは $C > 1$ となることがある。通常は強制的に $C = 0$ あるいは $C = 1$ と置き換える⁽¹⁾。このような非物理的な体積分率の修正に関して、Ubbink-Issa⁽²⁴⁾はセル界面の流束を修正する方法を提案している。本研究ではその考え方を適用し、流束の修正を行う。セル内の体積分率が $C = -\delta C < 0$ となるのはセル界面を流出する流束が大きいためである。このような場合、求めたセル界面の流束から δC の分だけ差し引く。セルの体積分率が $C = 1 + \delta C > 1$ となることはセル界面を流出する流束が小さいことを表している。このときは、求めたセル界面の流束に δC の分だけ加える。この考え方をまとめて式で表すと次のようになる。

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \begin{cases} f_{j+1/2} - \text{dev} & \text{when } u \geq 0 \\ f_{j+1/2} + \text{dev} & \text{when } u < 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\text{dev} = (E^- - E^+) \Delta x / \Delta t \quad (26)$$

$$E^- = \max(-\tilde{C}, 0), \quad E^+ = \max(\tilde{C} - 1, 0) \quad (27)$$

$$\tilde{C} = \begin{cases} C_j & \text{when } u \geq 0 \\ -C_{j+1} & \text{when } u < 0 \end{cases} \quad (28)$$

本研究において、上記の数値流束の修正の有効性を確認するため、Ubbink-Issa⁽²⁴⁾と同様にせん断流中における二次元円の輸送問題の解析を行った。その結果、数値流束の修正を施した場合、2500 回の時間ステップにおける体積誤差が、数値流束を修正しない方法により得られる誤差の約 22% の減少が達成でき、このような非物理的な体積分率の修正は、界面輸送時の体積保存を良好にすることを確認している。

5. 表面張力

表面張力の評価に関しては主に三種類の方法があり、従来の VOF 法で使われた高さ関数に基づく方法⁽¹⁾、CSF (Continuum Surface Force) 法⁽⁴⁾、CSS (Continuous Surface Stress) 法⁽⁷⁾である。本研究では表面張力の評価に CSF 法⁽⁴⁾を用い、表面張力を体積力として考慮する。

$$\mathbf{F}_{sv} = \mathbf{F}_{sa} \delta_s \quad (29)$$

ここで、 δ_s はデルタ関数、 $\mathbf{F}_{sa}$ は界面上の単位面積当たりの表面張力であり、表面張力係数 σ が一定の場合には以下のように与えられる。

$$\mathbf{F}_{sa} = \sigma \kappa \hat{\mathbf{n}} \quad (30)$$

界面曲率 κ は体積分率を用いて以下のように表される。

$$\kappa = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (31)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla C}{|\nabla C|} \quad (32)$$

よって、表面張力による体積力 $\mathbf{F}_{sv}$ は次のように定義できる。

$$\mathbf{F}_{sv} = \sigma \kappa \hat{\mathbf{n}} \delta_s \quad (33)$$

Brackbill ら⁽⁴⁾は界面でのデルタ関数を以下のように提案している。

$$\delta_s = \frac{|\nabla C|}{|C|} \quad (34)$$

ここで、 $|C|$ は界面でのジャンプを表し、体積分率を考えると $|C| = 1$ となる。Kothe ら⁽²⁵⁾が指摘しているように、計算結果は界面デルタ関数 δ_s に非常に敏感であり、CSF モデルの質はこの界面デルタ関数 δ_s の型に依存する。本研究では、Brackbill らと同様の界面デルタ関数を用い、このとき、表面張力による体積力は以下ようになる。

$$\mathbf{F}_{sv} = \sigma \kappa \nabla C \quad (35)$$

また、無次元の体積力はウェーバー数 We を用いて以下のように表される。

$$\mathbf{F}_{sv} = \frac{1}{We} \kappa \nabla C \quad (36)$$

上式の離散化には二次精度の中心差分を適用する。本研究では食い違い格子を用いており、速度はセル界面、体積分率はセル中心に定義する。したがって、セル界面における曲率 κ を求める必要がある。Renardy-Renardy⁽²⁶⁾は、体積分率の値を使った重み平均により曲率を求めている。本研究でも同様にセル界面の曲率を次のように求める。

$$\kappa_{j+1/2} = \frac{w_1 \kappa_j + w_2 \kappa_{j+1}}{w_1 + w_2} \quad (37)$$

Fig. 1 Flow configuration and coordinate system

$$w_1 = \sqrt{C_j(1-C_j)}, \quad w_2 = \sqrt{C_{j+1}(1-C_{j+1})} \quad (38)$$

ここで、 w_1, w_2 は重み関数である。Renardy-Renardy⁽²⁶⁾は重み関数を $w_1 = C_j(1-C_j), w_2 = C_{j+1}(1-C_{j+1})$ と定義している。この補間の精度を確認するため、Brackbill ら⁽⁴⁾と同様に二次元静止液柱の非粘性解析を行った。液柱半径 R と格子幅 Δx の比を $R/\Delta x = 13.3$ とし、500 ステップ後の平均圧力 $\langle p \rangle$ と理論値 $p_{\text{drop}} = \sigma/R$ の比を求めたところ、 $w_1 = w_2 = 1$ とする方法、Renardy-Renardy の方法および本研究の補間の結果は、それぞれ $\langle p \rangle / p_{\text{drop}} = 1.34, 1.06, 0.99$ であり、式 (38) より求める方法で良い結果が得られた。しかしながら、異なる $R/\Delta x$ の条件では Renardy-Renardy の方法の方が良いこともあり、補間の方法については更なる検討が必要であると考えている。

6. 界面捕獲法の適用

界面捕獲に WENO スキームを用いた本計算手法の妥当性を調べるため、孤立波の伝播問題の解析を行い、波の衝突や反射を伴う波の移動現象を捉えることができるか検討する。

図 1 に流れ場および座標系を示す。上側が開いた容器の中央に高さ H の単一の波が存在する。時刻 $t = 0$ において、波は右側の壁面に向かって伝播を開始する。本研究では波の初期高さ H を変化させて計算を行い、波が側壁に衝突したときの最大到達高さや波が反射したときの位相差を既存値^{(27)~(30)}と比較する。

6-1 計算条件 計算は二次元計算とし、計算領域は x 軸方向に $-8d \sim 8d$ 、 y 軸方向に $0 \sim 2.5d$ とする。計算には格子点数 101×41 、 201×81 、 301×121 の三種類の格子を用い、計算結果に対する格子の依存性を確認する。両側の壁と水面上の $y = d$ 近傍において格子が密になるように設定し、最小格子幅はそれぞれ $0.02d$ 、 $0.01d$ 、 $0.005d$ である。

本計算において、波の初期形状、速度および圧力の初期条件については Laitone の理論式⁽³¹⁾を用いる。また、静止した水の体積分率を 1、周囲空気の体積分率を 0 とする。境界条件については、速度について壁面

Fig. 2 Time variations of free surface motion ($H/d = 0.4$, grid 201×81)

ではすべりなし、上側境界ではすべり境界とする。体積分率についてはすべての境界で一次導関数零とする。

本計算では波の初期高さ $H/d = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ について計算を行う。水深 d は 1m とし、重力加速度は $g = 9.81\text{m/s}^2$ とする。水の密度と粘性係数はそれぞれ $\rho_1 = 998.89\text{kg/m}^3$, $\mu_1 = 1198.25\mu\text{Pas}$ 、空気については $\rho_2 = 1.20\text{kg/m}^3$, $\mu_2 = 18.27\mu\text{Pas}$ とする。また、表面張力係数は $\sigma = 72.75 \times 10^{-3}\text{N/m}$ とする。計算に使用した代表値はそれぞれ $L_{\text{ref}} = d$, $U_{\text{ref}} = \sqrt{gd}$, $\rho_{\text{ref}} = \rho_1$, $\mu_{\text{ref}} = \mu_1$ であり、このときの Re 数と We 数は $Re = 2.68 \times 10^6$, $We = 1.35 \times 10^5$ となる。

6.2 計算結果 波の初期高さ $H/d = 0.4$ における界面分布の時間変化を図2に示す。ここで、 T は無次元時刻であり、 $T = t/\sqrt{d/g}$ と定義される。計算結果は格子点数 201×81 における結果である。時間の経過とともに波は側壁に向かって伝播し、壁面と衝突する。衝突時の側壁における波の高さは初期高さより高くなるのが確認できる。さらに時間が経過すると波は反射し、初期位置の方向に向かって再び伝播する。

Fig. 3 Time variations of velocity vectors ($H/d = 0.4$, grid 201×81)

図3に速度ベクトルの時間変化を示す。界面付近では速度の変化が大きく、界面から離れた位置では速度の変化は小さい。波の頂点付近では、側壁衝突前には反時計回り、衝突後は時計回りの渦が形成されているのが確認できる。また、波の頂点以外にも界面に沿って弱い渦が生成されている。これは、波の頂点において形成される渦と両側壁の影響により形成されると考えられ、既存の研究においても確認できる⁽³²⁾。

伝播する波が側壁に衝突すると、壁面における波の高さは上昇する。このときの各初期高さ H における最大到達高さ R_{max} を既存値^{(27)~(29)}と比較して図4に示す。格子点数による計算結果の違いを見ると、 $H/d = 0.5$ までは格子点数による相違は小さく、計算結果に対する格子の依存性は少ないといえる。次に、既存値との比較をすると、 $H/d = 0.1, 0.2, 0.3$ の結果は理論値⁽²⁸⁾と良く一致しているが、 $H/d = 0.4, 0.5$ の結果では理論値との差が大きくなる。この傾向は Chan-Street⁽²⁷⁾ の計算結果においても同様に見られる。このような結果になった原因については、理論は波の初期高さが小

Fig. 4 Maximum run-up heights

Fig. 5 Spatial phase shift of wave crest

さいという仮定に基づいたものであるため、初期高さの増加とともに非線形性の影響が大きくなり、計算値と理論値に差が生じたものと考えられる。また、本計算値は既存の実験値⁽²⁹⁾とも良く一致し、 $R_{\max}$ は H の二倍以上に達する。

波が伝播を開始してから側壁に衝突するまで伝播速度は一定であり、理論値と良く一致するが、波の衝突後は時間遅れが生じ、計算値と理論値の反射波には位相差が生じる。このような位相差については既存の実験⁽²⁹⁾においても確認されている。本研究における位相差 ΔX の初期高さ H による変化を理論値⁽³⁰⁾と比較して図5に示す。なお、理論値は波同士の衝突による位相差であり、厳密には本計算条件とは異なる。 H/d が低い場合は理論値と良く一致しているが、 H/d が高くなるにつれて理論値より高い値を示す傾向が見られる。これは、最大到達高さの場合と同様に非線形性の影響によるものと思われる。既存の実験⁽²⁹⁾において、位相差は波の初期高さによらず約 $1.0d$ であることが確認されている。これは本計算結果の傾向と異なる。実験では位相差の測定に大きな誤差が含まれており、初期高さが非常に小さい場合、測定できなかったことが報告されている⁽²⁹⁾。また、本計算値は理論値とは同

(a) $H/d = 0.2$ (b) $H/d = 0.4$ Fig. 6 Volume fraction distributions in y -direction across position of wave crest ($T = 15$, grid 201×81)

じ傾向を示していることから、必ずしも計算精度の問題ではないと考えられる。格子点数による結果の相違に関しては、波の初期高さが小さい場合は格子点数による結果の相違は小さいことがわかる。しかしながら、 $H/d = 0.5$ においては細かい格子を用いた結果は他の計算格子を用いた結果と比較して大きい。これより、初期高さが大きい場合の位相差の予測には格子点数に注意する必要がある。

界面捕獲法を用いた場合、数値拡散による波の広がり問題となる。したがって、WENO スキームを改良した界面捕獲法によって、界面を鋭く捉えているか検討する必要がある。時刻 $T = 15$ の波の頂点位置における体積分率の y 方向変化を図6に示す。計算結果は格子点数 201×81 によるものであり、図中の縦線は波の頂点の位置を示している。 $H/d = 0.2, 0.4$ の結果とも本計算結果は不連続な界面を格子数点で良く捉えているが、数値拡散による波の広がり確認できる。他の格子点数による結果でも同様の結果が得られている。本研究では、数値拡散の低減のために WENO スキー

ムを改良し界面捕獲法を構築したが、最近の VOF 法を改良した方法⁽³³⁾と比較して、本計算手法では数値拡散の影響が依然として問題となるため、この影響を可能な限り小さくするための更なる修正が必要である。

界面輸送時の体積誤差を評価するため、以下のよう
に体積変化 E を定義する。

$$E = \frac{V(t) - V(0)}{V(0)}, \quad V(t) = \int_V C dV \quad (39)$$

ここで、 $V(t)$ はある時刻における液体の体積である。本研究で扱ったすべての計算条件と計算格子における結果において、時刻 $T = 15$ の体積変化の最大値は $7.44 \times 10^{-2}\%$ であった。

7. 結 言

本研究では、衝撃波捕獲法の一つである WENO スキーム⁽¹³⁾を気液界面の捕獲に改良し、VOF 法⁽¹⁾に適用することにより新しい高次精度の界面捕獲法を提案した。この方法は特別な界面追跡を必要とせず、三次元への拡張も容易である。

本研究で構築した界面捕獲法をナビエ・ストークス方程式と組み合わせ、孤立波の伝播問題の解析を行った。界面捕獲法は移動する気液界面を正確に捕獲し、最大到達高さに関しては本計算結果は既存の実験値および計算値と良く一致していた。位相誤差に関しては実験値との相違が見られ、今後詳しく調査する必要がある。また、本計算手法は不連続な界面を格子数点で捉えることができたが、数値拡散による波の広がりが確認された。

本研究では二次元計算の結果に関して報告したが、今後は三次元解析と表面張力が大きく影響する問題に対する本計算手法の妥当性を明らかにする予定である。

謝 辞

本研究を遂行するにあたり、大学院生 斎藤幸一郎氏、学部学生 三上恭史氏の協力を得た。ここに謝意を表する。

文 献

- (1) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., *J. Comput. Phys.*, **39**(1981), 201–225.
- (2) 富山明男・宋明良・南川久人・坂口忠司, 機論, **57**-539, B(1991), 2167–2173.
- (3) Richards, J. R., Beris, A. N. and Lenhoff, A. M., *Phys. Fluids A*, **5**-7(1993), 1703–1717.
- (4) Brackbill, J. U., Kothe, D. B. and Zemach, C., *J. Comput. Phys.*, **100**(1992), 335–354.
- (5) 稲村隆夫・蔦川武仁・趙成鎮・升谷五郎, 機論, **65**-631, B(1999), 981–987.
- (6) Ashgriz, N. and Poo, J. Y., *J. Comput. Phys.*, **93**(1991), 449–468.
- (7) Lafaurie, B., Nardone, C., Scardovelli, R., Zaleski, S. and Zanetti, G., *J. Comput. Phys.*, **113**(1994), 134–147.
- (8) Zaleski, S., Li, J., Succi, S., Scardovelli, R. and Zanetti, G., *Proc. 2nd Int. Conf. Multiphase Flow*, Kyoto, Japan, April 3–7, (1995), PT2-1–PT2-12.
- (9) 功刀資彰, 機論, **63**-609, B(1997), 1576–1584.
- (10) Kim, M. S. and Lee, W. I., *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **42**(2003), 765–790.
- (11) Kelecy, F. J. and Pletcher, R. H., *J. Comput. Phys.*, **138**(1997), 939–980.
- (12) Van Leer, B., *J. Comput. Phys.*, **23**(1977), 101–136.
- (13) Jiang, G. S. and Shu, C. W., *J. Comput. Phys.*, **126**(1996), 202–228.
- (14) Ota, T. and Yanaoka, H., *Proc. 5th Int. Symp. Comput. Fluid Dyn.*, H. Daiguji, ed., Jpn. Soc. Comp. Fluid Dynamics, Sendai, **2**(1993), 423–428.
- (15) 太田照和・柳岡英樹, 機論, **61**-586, B(1995), 2213–2220.
- (16) Amsden, A. A. and Harlow, F. H., *J. Comput. Phys.*, **6**(1970), 322–325.
- (17) Rai, M. M. and Moin, P., *J. Comput. Phys.*, **96**(1991), 15–53.
- (18) Harten, A., Engquist, B., Osher, S. and Chakravarthy, S. R., *J. Comput. Phys.*, **71**(1987), 231–303.
- (19) Tam, C. K. W. and Webb, J. C., *J. Comput. Phys.*, **107**(1993), 262–281.
- (20) Weirs, V. G. and Candler, G. V., *AIAA Paper*, No.97-1940(1997).
- (21) Wang, Z. J. and Chen, R. F., *AIAA Paper*, No.01-1101(2001).
- (22) Ponziani, D., Pirozzoli, S. and Grasso, F., *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **42**(2003), 953–977.
- (23) Yang, H., *J. Comput. Phys.*, **89**(1990), 125–160.
- (24) Ubbink, O. and Issa, R. I., *J. Comput. Phys.*, Vol.153, 1999, 26–50.
- (25) Kothe, D. B., Rider, W. J., Mosso, S. J. and Brock, J. S., *AIAA Paper*, No.96-0859(1996).
- (26) Renardy, Y. and Renardy, M., *J. Comput. Phys.*, **183**(2002), 400–421.
- (27) Chan, R. K. C. and Street, R. L., *J. Comput. Phys.*, **6**(1970), 68–94.
- (28) Byatt-Smith, J. G. B., *J. Fluid Mech.*, **49**(1971), 625–633.
- (29) Maxworthy, T., *J. Fluid Mech.*, **76**-1(1976), 177–185.
- (30) Oikawa, M. and Yajima, N., *J. Phys. Soc. Japan*, **34**-4(1973), 1093–1099.
- (31) Laitone, E. V., *J. Fluid Mech.*, **9**(1960), 430–444.
- (32) Ramaswamy, B., *J. Comput. Physics*, **90**(1990), 396–430.
- (33) 宋明良・林公祐・富山明男, 機論, **70**-698, B(2004), 2538–2544.