熱流束振動を加えた正方容器内熱対流場の内部重力波共鳴*

松村 聖大^{*1}, 石田 秀士^{*2}, 木本 日出夫^{*2}Internal Gravity Wave Resonance of Thermal Convection Fields
in a Square Cavity with Heat-Flux VibrationSyota MATSUMURA^{*3}, Hideshi ISHIDA and Hideo KIMOTO^{*3} Graduate School of Engineering Science, Osaka University,
1-3 Machikaneyama, Toyonaka-shi, Osaka, 560-8531 Japan

In this paper, the thermal convection field and its resonance phenomena in a square cavity with sinusoidal heat-flux vibration were numerically examined. As angular velocity ω is changed, the thermal convection field at $Pr=0.71$, $Ra=10^6$ is found to be classified into 5 regions and, particularly, the field has the local maximum of relative amplitude of midplane Nusselt's number at $\omega_c=350$, which corresponds to the angular velocity of internal gravity wave ω_r estimated by a theoretical equation proposed by Thorpe. This shows the local enhancement is induced by an internal gravity wave resonance. Such correspondence is observed for $Ra \geq 10^5$, $Ra \geq 10^6$ for $Pr=0.71$, 7.1 , respectively. For the range of Ra we proposed a correlation equation, a function of Pr and Gr only, to estimate the resonant angular velocity.

Key Words: Numerical Analysis, Natural Convection, Square Cavity, Internal Gravity Wave, Resonance

1. 緒 論

何らかの振動条件を与えた場合の密閉容器内自然対流場の応答に関してはこれまでに数多くの研究が行われている^{①,②,③}。特に振動を加えた場合の共鳴現象は熱伝達促進^④や反応槽における層流混合の促進^⑤と関連づけられるため工学的にも極めて重要である。

Ra ら^{⑥,⑦}、石田ら^{⑧,⑨}は正方容器に鉛直方向強制振動を加えた場合の熱対流場を数値解析によって調べ、加振周波数の変化に伴って熱対流場が5通りに変化することを示すと同時に、ある種の周波数(共鳴周波数)を容器に加えた場合に伝熱面平均熱伝達率が著しく増加することを示した。この共鳴現象はストークス層内部の流速から求まる対流場の循環周期と加振周期が一致することから生じている^⑩。

一方、密閉容器に熱的振動を加えた場合についても数多くの研究が行われているが、この場合には強制振動の場合と異なり、内部重力波^⑪、すなわち密度成層に伴う振動の周期と熱的振動の周期が一致する場合に共鳴現象が起こることが知られている^{⑫,⑬}。Kimら^⑭は中心断面における鉛直方向平均温度勾配よりThorpe^⑮の理論式から共鳴周波数を計算し、実際の共

鳴周波数と一致することを明らかにした。しかしながらこれらの熱的振動は、高温壁面温度、もしくは流体の内部発熱を周期的に変動させたものであり、壁面での熱流束を変動させたものは少ない^⑯。しかしながら工業的には壁面での熱流束を変動させるのが最も容易で、これによる熱対流場の応答や共鳴現象は興味のあるところである。また、そもそもこの密閉容器槽内部の内部重力波との共鳴現象について、その発生条件を含め、詳細に検討しているものは見あたらない。

そこで本研究においては正方密閉容器壁面で熱流束振動を加えることによって生じる熱対流場を数値解析的に検討した。まず、レイレー数(Ra)とプラントル数(Pr)を固定し、熱流束振動角速度(ω)を変化させた場合の流れ場の変化を調べ、共鳴時の流れ場の特性を明らかにすると同時に、流れ場の分類法を提案した。次に共鳴角速度についても調べ、 Ra , Pr を変化させた場合の共鳴角速度の変化を相関式で表すことを試み、さらに共鳴現象が起こる限界 Ra についても調べた。

おもな記号

- a : 加熱面の熱流束振幅 (=0.8)
- a_{Nm} : Nu_m の無次元振幅
- C_p : 定圧比熱 [J/kg°C]
- Gr : グラスホフ数 ($=g\beta_0 L^3/\nu^2$)
- G_θ : 定常状態における中央温度勾配
- k : 熱伝導率 [W/m°C]
- L : 代表長さ(容器の幅) [m]

* 原稿受付 2005年2月3日。

^{*1} 学生員、大阪大学大学院基礎工学研究科(〒560-8531 豊中市待兼山町1-3)。^{*2} 正員、大阪大学大学院基礎工学研究科。

E-mail: matumura@me.es.osaka-u.ac.jp

Nu_m : 中央断面における平均ヌセルト数

Pr : プラントル数 ($=\mu C_p/k$)

Q_0 : 加熱熱流束 [W/m^2]

q : 無次元熱流束

Ra : レイレー数 ($=Gr \times Pr$)

t : 無次元時間

u : 無次元 X 方向速度

v : 無次元 Y 方向速度

x : 無次元 X 座標

y : 無次元 Y 座標

α : 振幅比

α_m : Nu_m 振幅比 ($=a_{Nm}/a$)

ψ : 無次元流れ関数

μ : 粘性係数 [$Pa \cdot s$]

ν : 動粘性係数 [m^2/s]

Θ : 代表温度差 ($=Q_0 L/k$)

θ : 無次元温度

ω : 無次元角速度

ζ : 無次元渦度

2. 計 算 法

2.1 計算モデル・基礎式

本研究で用いる計算モデルを図 1 に示す。現象は紙面に垂直方向に一様で 2 次元であるとして、計算には図のような 2 次元座標を用いる。高さ・幅共に L の正方形断面容器の鉛直二面（左右側面）の片面（左側）を、無次元化された時間平均熱流束 1（実次元で Q_0 ）を基準として振幅 a ($=0.8$) で正弦振動させた無次元熱流束 q を与え加熱する。一方、他方（右側）を温度一定 ($\theta=0$) の冷却壁とし、上下面を断熱壁とした。重力は鉛直下向きに作用している。また、壁面は滑りなしで静止している。初期条件として、流体の流速 0、流体の温度は冷却壁と同温とする。

Fig.1 Physical model

Table.1

Mesh	80×80	100×100	200×200
α_m	0.933	0.929	0.926

本研究では、内部の流体の物性値は一定とし、厳密な基礎方程式系に対して浮力項のみの密度変化を考慮する Boussinesq 近似を適用する。代表長さ L 、動粘性係数 ν 、代表温度差 Θ ($=Q_0 L/k$, k : 熱伝導率) で無次元化された基礎式は以下の(1)~(3)で表される。

$$\Delta\phi = -\zeta, \quad u = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{.....(1)}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + u \frac{\partial\zeta}{\partial x} + v \frac{\partial\zeta}{\partial y} = Gr \frac{\partial\theta}{\partial x} + \Delta\zeta \quad \text{.....(2)}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + u \frac{\partial\theta}{\partial x} + v \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \Delta\theta \quad \text{.....(3)}$$

ただし、式(2),(3)においてグラスホフ数 Gr 、プラントル数 Pr はそれぞれ $Gr = g\beta\Theta L^3/\nu^2$, $Pr = \mu C_p/k$ で定義されている。計算の際は基礎式を時間項について前進差分、対流項について QUICK、拡散項について中心差分でそれぞれ離散化した。また、熱対流場の計算の際は計算領域を 100×100 の格子に分割し、時間刻み Δt を 1.0×10^{-6} とした。

2.2 精度検討

まず本節では本研究で行った計算の精度を検証する。本研究では $Kwak$ ら⁹と同様 (3)式で $0 \leq y \leq 1$ で数値積分することにより、振動による熱対流場の特性の変化をよく表す物理量として中央断面平均ヌセルト数 Nu_m を以下のように定義する。

$$Nu_m = \int_0^1 \left(Pr u \theta - \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) \bigg|_{x=1/2} dy \quad \text{.....(4)}$$

本節では Ra ($=Gr \times Pr$)、 Pr 、無次元角速度 ω をそれぞれ 10^6 、0.71、10 に固定し、準定常状態における中央断面での平均ヌセルト数 Nu_m の振幅 a_{Nm} と加熱壁熱流束振幅 a との振幅比 α_m ($=a_{Nm}/a$) を格子分割数、時間刻みを変化させて求めた。

表 1 に時間刻み $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$ における格子分割数 80×80 、 100×100 、 200×200 における α_m を示す。表 1 より格子分割数 80×80 、 100×100 の結果は格子分割数 200×200 の結果に比べ相対誤差 0.79% 以内に収まっており、特に格子分割数 100×100 の結果は格子分割数 200×200 の結果に比べ高々相対誤差 0.38% である。また、同条件において格子分割数 100×100 、時間刻み Δt

$=1.0 \times 10^{-7}$ の計算を行ったが、時間刻み $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$ と $\Delta t = 1.0 \times 10^{-7}$ の相対誤差は高々 0.019% であった。

本論文の計算は $Pr = 0.71$ において $\omega = 2800$ まで、 $Pr = 7.1$ においては $\omega = 1000$ までの計算を行っており、角速度の大きい計算を行う場合のメッシュ分割の影響についても考慮すべきところである。今回の計算の場合には既報^③で扱った速度境界層(ストークス層)の厚さに加え、温度境界層の厚さとしてこの厚さに $Pr^{-1/2}$ をかけたものの両方がメッシュ分割の妥当性を考える上での基準となる。 Pr が 1 より小さい場合にはストークス層の方が薄くなるのでこれを用いることにすると、メッシュを 100 分割する場合には $Pr = 0.71$ の場合この境界層内部に最小で約 12 個の計算セルが配置されることになる。また $Pr = 7.1$ の場合には温度境界層内部に最小で約 8 個のセルが配置される。既報^③の結果によると振動熱対流場の計算のためには境界層内部に 7 個のセルが存在すれば十分であるとの結果が得られている。

以上の結果から本研究で行った格子分割数 100×100 、時間刻み $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$ による計算結果は十分な精度を有しているとみなせる。

3. 計算結果

本章では熱流束振動角速度 ω を変化させた場合の共鳴現象を含む熱対流場の変化を詳説する。ただし、本章では $Pr = 0.71$ 、 $Ra = 10^6$ に固定している。

3.1 ω の変化に伴う熱対流場の変化

ω を変化させていくと、熱対流場もそれに応じて変化する。図 2 (a)~(f) に代表的な ω における位相 $\pi/2$ における流れ関数を示す。これらの図から ω を変化させると全く異なった流れ場を示していることが分かる。

$\omega = 0$ での流れ関数を図 2 (a) に示しているが、これは熱流束を変化させない場合の流れ場である。この場合の流れ場は、容器の中心断面と冷却壁面の中央あたり ($x = 0.8$ 付近) を渦の中心とした流れ関数の分布

Fig.2 Stream function

になっている。この条件では流れ場は自励振動せずに定常状態が実現している。

振動を加えた例として $\omega=2$ での流れ関数を図2(b)に示しているが、 $\omega=0$ の場合に比べ、全体的な流れ場は相似であるが、流れ関数の絶対値が少し大きい。つまり容器内全体の循環流量が $\omega=0$ の場合に比べて少し大きい事を示している。

さらに振動数を上げた例として $\omega=20$ での流れ関数を図2(c)に示しているが、 $\omega=0$ の場合のように渦の中心の位置に偏りなく、全体の流れ場がほぼ中心対称になっている。

次に $\omega=300$ での流れ関数を図2(d)に示しているが、他のケースに比べ全く流れ場が異なっている。中央断面よりやや左側を中心として流れ関数の絶対値が図2で示した中で一番大きい渦ができており、容器内の循環流量が図2に示した中で一番大きくなっている。その結果、壁面近傍の速度境界層も薄くなっている様子が見て取れる。そのため、図には示していないが、他のケースと異なり位相が π の周辺で非常に強い循環流が形成されており、後述の共鳴現象が現れている。

また $\omega=500$ での流れ関数を図2(e)に示しているが、これも他のケースに比べ大きく流れ場が異なっており、中央断面の右側と左側の両方に渦ができています。また、流れ関数の絶対値は図2の中で一番小さく、その結果、容器内の循環流量は図2の中で一番小さくなっている。

最後に最も角速度を大きくした場合の例として $\omega=2800$ での流れ関数を図2(f)に示しているが、これは $\omega=0$ の流れ場とほぼ同じである。これは、 ω が大きすぎるために熱流束の正弦振動の影響域は加熱壁のごく近傍に限られ、全体としては時間平均効果しか現れず、時間平均された熱流束は $\omega=0$ の場合と等しいためと考えられる。

Fig.3 Relative amplitude of midplane Nusselt's number, minimum stream function and maximum vorticity on the heated side wall at $Pr=0.71$ and $Ra=10^6$

3.2 ω の変化に伴う中央断面平均ヌセルト数振幅の変化

また、図3に振幅比 α_m 、1周期全体で見た場合の容器内部の最小流れ関数 ϕ_{min} ならびに加熱壁上の最大渦度 ζ_{max} のグラフを示しているが、この図より、 ω を1から増加させていくと $\omega=5$ 付近までは α_m はほぼ1で変わらず、 $\omega=5 \sim 100$ では α_m は減少していることが分かる。しかし、 $\omega=100$ を超えると α_m は急激に増大し、 $\omega=350$ で α_m はピークになる。この α_m がピークになる角速度を本研究では臨界角速度 ω_c と定義する。図3によるとこの角速度において ϕ_{min} 、 ζ_{max} はそれぞれ最小、最大となっている。さらに ω が増大すると α_m は急激に減少して、 $\omega > 1000$ では α_m はほぼ0となる。以上の結果は前節で述べた定性的傾向に対応するものである。

図3で、 $\omega=100 \sim 350$ で α_m が急激に増加するのは実は内部重力波(密度成層に伴う浮力を復元力にした波動)との共鳴によるものであり、 ω_c は図3中に示されている内部重力波の振動角速度 ω_r に一致する。これについては後述する。

3.3 ω の変化に伴う中央断面平均ヌセルト数変動量成分の振幅の変化

前項で考察した振幅比の変化を詳細に分析するため、次に本節では Nu_m の変動量の各成分とその振幅、位相の変化を考えてみたい。

無次元温度 θ 、無次元 x 方向速度 u 、中央断面平均ヌセルト数 Nu_m は次式のように1周期平均量($\bar{\quad}$)とその周りの変動量($\prime$)に分割することができる。

$$\theta = \bar{\theta} + \theta', \quad u = \bar{u} + u', \quad Nu_m = \bar{Nu}_m + Nu_m' \quad (5)$$

(4)に(5)を代入して整理すると、

$$Nu_m = \int_0^1 \left(Pr \bar{u} \bar{\theta} - \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + Pr \bar{u} \theta' + Pr \bar{\theta} u' - \frac{\partial \theta'}{\partial x} + Pr u' \theta' \right) \Big|_{x=1/2} dy \quad \cdots \cdots (6)$$

となる。変動部分の1周期平均は0だから、

$$\bar{Nu}_m' = \int_0^1 \left(Pr \bar{u} \bar{\theta} - \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + Pr \bar{u} \theta' \right) \Big|_{x=1/2} dy \quad \cdots \cdots (7)$$

となる。(5)~(7)より

$$Nu_m' = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \quad \cdots \cdots (8)$$

$$C_1 = \int_0^1 (Pr \bar{u} \theta') \Big|_{x=1/2} dy$$

$$C_2 = \int_0^1 (Pr \bar{\theta} u') \Big|_{x=1/2} dy$$

$$C_3 = \int_0^1 [Pr(u' \theta' - \overline{u' \theta'})] \Big|_{x=1/2} dy$$

$$C_4 = \int_0^1 \left(-\frac{\partial \theta'}{\partial x} \right) \Big|_{x=1/2} dy$$

と表現できる。\$C_1, C_2, C_3, C_4\$が中央断面平均ヌセルト数変動量の各成分である。

\$\omega\$を変化させた時の中央断面平均ヌセルト数変動量 \$C_1, C_2, C_3, C_4\$ の振幅と加熱壁熱流束振幅 \$a\$ との振幅比をそれぞれ \$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\$ とし、これらの振幅比のグラフを図4に示す。

Fig.4 Relative amplitude of fluctuating components of midplane Nusselt number at \$Pr=0.71\$ and \$Ra=10^6\$

この図より、まず \$\alpha_1\$ は \$\omega\$ が增大するにつれ単調に減少していることが分かる。一方 \$\alpha_2\$ は \$\omega\$ を 1 から増大させていくと単調に増大していき、\$\alpha_m\$ がピークになる \$\omega_c \approx 350\$ のところで \$\alpha_2\$ もピークになり、さらに \$\omega\$ が増大すると急激に減少する。また \$\alpha_3\$ は \$\omega\$ が 1~5 の範囲ではほぼ変わらず、\$\omega\$ が 5~100 の範囲で減少し、\$\omega\$ が 100~350 の範囲で増大し、\$\omega_c \approx 350\$ でピークになり、\$\omega > 350\$ では急激に減少する特性を持っており、これは \$\alpha_m\$ の特性とよく似ているが値の大きさは \$\alpha_1\$ や \$\alpha_2\$ と比較して極めて小さい。\$\alpha_4\$ の大きさは \$\omega_c \approx 350\$ 付近で \$\alpha_3\$ と同程度となるがそれ以外ではほぼ 0 である。

つまり、中央断面での平均ヌセルト数振幅は位相のずれは妨けにして、主に \$\alpha_1\$ と \$\alpha_2\$ によって決まる。\$\omega\$ が小さな領域 (1~100) では \$\alpha_1\$ が支配的であり、\$\omega\$ が大きな領域 (100~1000)、特に共鳴現象が起こっている \$\omega\$ の領域 (100~350) では \$\alpha_2\$ が支配的である。つまり、この領域における熱対流場は速度振幅が大きくなっており、このことは 3.1 節における \$\omega=300\$ の流れ関数の絶対値 (図 2(d) 参照) が他のケースに比べてもっとも大きいことと対応している。

以上の考察は各成分の振動振幅の変化に関してであるが振動位相の変化もまた重要である。温度場、流れ場の変動の様子をそれぞれ \$C_1, C_2\$ に代表させて考えた場合、図には示していないが低角速度領域では加熱壁での熱流束振動の位相は \$C_1, C_2\$ の位相とよく一致しており、角速度の増大とともに位相のずれが増大していく。このとき \$C_1, C_2\$ の変動の位相のずれもまた増大していくが、共鳴角速度付近では温度場振動 \$C_1\$ の位相と速度場振動 \$C_2\$ の位相が一致し、さらにそれらの位相が熱流束振動の位相より約 \$\pi/2\$ 遅れた状態となる。その後角速度の増大とともに \$C_1, C_2\$ の変動の位相のずれが再び生じ、同時にこれらの振動と熱流束振動の間の位相のずれもさらに大きくなっていく。

3.4 \$\omega\$ による熱対流場の領域分け

\$\omega\$ の変化に伴う熱対流場 (3.1 節)、中央断面での平均ヌセルト数振幅 (3.2 節)、ならびに中央断面での平均ヌセルト数変動量 (3.3 節) の変化の特性から \$Fu\$ から \$\omega\$ の領域分けを参考にすると熱対流場を次の 5 つの領域に分類することができる。

- \$\omega \leq 5\$ の準静的振動対流領域 (I)
- \$5 < \omega \leq 100\$ の振動対流領域 (II)
- \$100 < \omega \leq 350\$ の共鳴振動対流領域 (III)
- \$350 < \omega \leq 1000\$ の中間対流領域 (IV)
- \$\omega > 1000\$ の高周波振動対流領域 (V)

中央断面平均ヌセルト数振幅 (図 3) と各中央断面平均ヌセルト数変動量成分の振幅 (図 4) を例にとると、準静的振動対流領域 (I) では \$\alpha_m \approx 1\$ であり、また各変動量成分の振幅はほぼ一定である。振動対流領域 (II) では \$\omega\$ が増大するにつれ \$\alpha_m\$ は減少していく。一方 \$\alpha_1\$ は減少するが \$\alpha_2\$ は増大する。この領域では \$\alpha_1\$ の減少量よりも \$\alpha_2\$ の増大量が少ないので \$\alpha_m\$ は減少すると考えられる。共鳴振動対流領域 (III) では共鳴現象により \$\omega\$ が増大すると \$\alpha_m\$ は急激に増大する。この領域でも \$\alpha_1\$ は減少し \$\alpha_2\$ は増大するが、\$\alpha_1\$ の減少量は少なくなり \$\alpha_2\$ は急激に増加している。従って、この領域においては \$\alpha_2\$ の増大が \$\alpha_m\$ の増大に深く関わっている。中間対流領域 (IV) になると、\$\omega\$ が増大すると \$\alpha_m\$ は急激に減少している。この領域では、\$\alpha_1\$ はゆるやかに減少するが \$\alpha_2\$ が急激に減少しており、\$\alpha_2\$ の減少が \$\alpha_m\$ の減少に寄与している。つまり、共鳴振動対流領域 (III) と中間対流領域 (IV) では \$\alpha_m\$ は \$\alpha_2\$ が主たる成分である。高周波振動対流領域 (V) では \$\alpha_m \approx 0\$ であり、各変動量成分の振幅もほぼ 0 である。以上の領域分けにおいて、共鳴振動対流領域 (III) と中

間対流領域 (IV) の境界で α_m は極大になり、この境界の $\omega=350$ が臨界角速度 ω_c である。

4. 共鳴角速度

4.1 Ra , Pr の変化に伴う共鳴角速度の変化

以上で述べたような α_m の増大がもし内部重力波との共鳴によって引き起こされているならば、その臨界角速度 ω_c は内部重力波の振動角速度 ω_i に一致するはずである。密度勾配 (温度勾配) が y 方向に一定である場合には、Thape⁶⁾によると、

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1}} \cdot G_\theta \cdot Gr \quad \dots\dots\dots (9)$$

である。ここで α はアスペクト比で、本研究では1である。また G_θ は温度勾配であり、本研究で扱っているような密閉容器槽の場合には G_θ は高さ方向に一定ではなくこの値の評価の仕方には議論のある所であるが、Kim¹⁰⁾は内部発熱を周期変動させた場合において $\omega=0$ における中央断面の $0.2 \leq y \leq 0.8$ の範囲内における平均温度勾配により G_θ を評価すると、(9)式で求まる ω_r と実際の共鳴角速度 ω_c が一致することを報告している。仮にこの方法を採用すると、 $Pr=0.71$ で $Ra=10^5$, $Ra=10^7$ の2通りに変化させた場合と $Pr=7.1$, $Ra=10^6$ において、 α_m の α に対する変化と、(9)式から求まる共鳴角速度 ω_r を表示したものを図3,5に示す。

(a) $Ra=10^5$, $Pr=0.71$

(b) $Ra=10^7$, $Pr=0.71$

(c) $Ra=10^6$, $Pr=7.1$

Fig.5 Relative amplitude of midplane Nusselt number et al against angular velocity

4.2 共鳴角速度関係式の導出

しかしながら Kim¹⁰⁾による G_θ の評価法は値としての問題はないが $0.2 \leq y \leq 0.8$ における平均温度勾配という物理的根拠に乏しい方法を採用している。そこで、本節ではこの G_θ の妥当な与え方を考えてみたい。図6に $Pr=0.71$, $Pr=7.1$ における $Ra=10^0 \sim 10^7$ における Kim¹⁰⁾の方法によって求めた G_θ と静止状態 ($\omega=0$) における加熱壁面での平均温度 θ_s を示す。

Fig.6 Temperature gradient and surface-averaged temperature on the heated side wall at $\omega=0$

この図から G_θ と θ_s は $Ra=10^4 \sim 10^7$ の範囲で $Pr=0.71$, $Pr=7.1$ のいずれでもほぼ一致していることが分かる。これは、物理的には加熱壁によって温められた流体は容器上方に向かい、冷却壁によって冷やされた流体は容器下方に向かうためと考えられる。従って、(9)式の G_θ を θ_s に置き換えるほうが代表温度勾配として G_θ の物理的意味がよりはっきりとする。

もちろんこのような G_θ が加熱壁の時間平均温度を固定するような境界条件を用いる場合には意味を持たず、本研究のような時間平均熱流束を固定するケースのみ意味を持つことは明らかである。

種々の Pr , Ra における θ_s は図7に示しているが、この図から分かるように θ_s は Pr に依存せず、 Ra のみ

に依存している。そこで図7より θ_s の相関式を求めると以下ようになる。

Fig.7 Surface-averaged temperature on the heated side wall at $\omega=0$

$$\theta_s = 4.63 \times Ra^{-0.238} \dots\dots\dots (10)$$

図7に示しているように上式で予測される θ_s の値は実際の値と非常によく一致している。従って、(9)式の G_θ を(10)式の θ_s に置き換えると次式となる。

$$\omega_r = 1.52 Gr^{0.381} Pr^{-0.119} \dots\dots\dots (11)$$

この式から求まる ω_r を、図5に表示した(9)式による ω_r と比較するとよく一致していることが確認できる。(11)式は(9)式と違って G_θ を含まないので ω_r を Pr , Gr から求めることができ便利である。

4.3 共鳴現象が起こる限界 Ra

式(11)の適用範囲は図6より G_θ が θ_s にほぼ一致する $0.71 \leq Pr \leq 7.1$, $10^4 \leq Ra \leq 10^7$ の範囲であるように思われる。しかし実際はそうではない。例として $Ra=10^4$, $Pr=0.71$ において、 ω を変化させた時の振幅比 α_m その他のグラフを図8に示す。

Fig.8 Relative amplitude of midplane Nusselt number et al at $Ra=10^4$, $Pr=0.71$

この図から、 $Ra=10^4$, $Pr=0.71$ においては α_m が増大する振動対流領域IIIは存在せず、 ω_c は定義できないことが分かる。また ϕ_{max} , ζ_{max} をみると共鳴現象らしきも

のが $\omega=40$ で観察されるがKimら⁽¹⁰⁾ (もしくは(11)式)で評価される ω_r とは一致しない。この原因としては図には示していないが Ra が小さいために左右の加熱・冷却壁の温度境界層の幅が容器の幅に比べて無視できなくなり、鉛直方向の内部重力波を引き起こす温度(密度)成層と温度境界層が相互作用を起こしているためと考えられる。このような条件下ではThorp⁽⁹⁾の理論式(9)は適用できない。したがって図5より式(9),(11)で評価可能な共鳴現象が現れる限界レイレー数 Ra は $Pr=0.71$ においては 10^5 , $Pr=7.1$ においては 10^6 と定まる。

これ以下のレイレー数においては温度境界層との相互作用により、そしてまた逆に Ra が 10^7 を越えると自励振動との相互作用により共鳴現象は極めて複雑となると予想され、今後の検討が必要である。さらに、本研究では熱流束の振動振幅 a を0.8に固定しているが、この振幅を変えた場合の熱対流場の変化の問題も残されている。 a が小さい場合には、熱流束振動の影響は定常熱対流場に対する微小擾乱(線形)とみなせるので振幅比 α_m の角速度に対する特性は変化しないと考えられ、実際 $a=0.4$ における $Ra=10^6$, $Pr=0.71$ の振幅比 α_m の挙動は $a=0.8$ の α_m の挙動とほぼ一致することを確認している。しかし、 a が大きくなると非線形効果が顕著になり、 α_m の挙動が大きく異なってくると考えられる。また共鳴角速度についてはThorpの理論式より、振幅 a には無関係と予想されるが、上述の限界 Ra に対する影響はないとは断定できない。これらは今後の課題である。

5. 結 論

本研究では正方密閉容器に熱流束振動を加えることによって生じる熱対流場を数値解析的に検討した。まず $Ra=10^6$, $Pr=0.71$ に固定し熱流束振動角速度 ω を変化させ、共鳴時の流れ場の特性を明らかにし、さらに Ra , Pr を変化させた時の共鳴角速度を調べることで以下に結論を得た。

- (1) $Ra=10^6$, $Pr=0.71$ に固定し ω を変化させると、ある臨界角速度において非常に強い循環流が形成されることを流れ場から確認した。またその臨界角速度では、非常に強い循環流が形成されているので、中央断面平均ヌセルト数変動量のうち速度変動に基づく成分の振幅も大きく増大し、結果として中央断面平均ヌセルト数の振幅が最大となる。この臨界角速度は内部重力波による振動角速度と一致し、これらの現象が内部重力波との共鳴現象であることが確認できた。

- (2) Fu の領域分けを参考に熱流束振動角速度によって $Ra=10^6$, $Pr=0.71$ に固定した熱対流場を 5 領域に分類した。熱対流場、中央断面平均ヌセルト数振幅、中央断面平均ヌセルト数変動量はこの 5 領域で全く違った特性を示しているの、この分類法は妥当なものである。
- (3) Ra , Pr を変化させた時の共鳴角速度 ω_r は Thorpe に よって導出された式によってほぼ正確に求められることを確認した。また、その式に使われる温度勾配は、本研究で行ったような熱流束振動を与える場合には $\omega=0$ における加熱壁平均温度 θ_s に置きかえることができ、この温度は Pr に依存せず、 Ra のみに依存していることを示した。以上の結果より、本研究では θ_s を Ra で表現する相関式を数値計算で求めることにより、 ω_r を Pr , Gr の関数として与えることができた。この式によってほぼ正確に共鳴角速度を求めることができる。
- (4) Thorpe が理論的に扱っている共鳴現象が起こるには、壁面近傍における温度境界層が薄く、内部重力波による振動を励起しうる十分な水平方向の幅を持った密度成層が形成される必要がある。本研究においては $Pr=0.71$ の場合に $Ra \geq 10^5$, $Pr=7.1$ の場合に $Ra \geq 10^6$ の範囲でそのような条件が満たされ、Thorpe の理論によって予測される共鳴角速度で共鳴現象が起こることを現象論的に確認した。上述の範囲は本研究で提案する共鳴角速度の相関式のレイレー数の適用下限を与える。

本研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金若手研究 B (No.15760132)の援助を受けた。ここに記して謝意を表する。

文 献

- (1) W.S. Fu and W.J. Shieh, A study of thermal convection in an enclosure induced simultaneously by gravity and vibration, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **35**(1992), 1695-1710.
- (2) 井上義郎, 工学としての流体混合機構の解析と混合評価, *数理解析研究所講義録*, **1368**(2004), 160-167.
- (3) 石田秀士・木本日出夫, 容器内自然対流場における平均熱伝達特性に対する加振の影響, *機論 B*, **65**(1999), 2413-2419.
- (4) 石田秀士・木本日出夫, 容器内の振動熱対流場における平均熱伝達率の時系列データから再構築されるアトラクタの幾何学構造, *機論 B*, **65**(1999), 2420-2425.
- (5) C.-S. Yih, Gravity waves in a stratified fluid, *J. Fluid Mech.*, **8**(1959), 481-508.
- (6) S. A. Thorpe, On standing internal gravity waves of finite amplitude, *J. Fluid Mech.*, **32**(1968), 489-528.
- (7) J. Patterson and J. Imberger, Unsteady natural convection in a rectangular cavity, *J. Fluid Mech.*, **100**(1980), 65-86.
- (8) S. Paolucci and D. R. Chenoveth, Transition to chaos in a differentially heated vertical cavity, *J. Fluid Mech.*, **201**(1989), 379-410.
- (9) H. S. Kwak, K. Kuwahara and J. M. Hyun, Resonant enhancement of natural convection heat transfer in a square enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **41**(1998), 2837-2846.
- (10) G. B. Kim, J. M. Hyun and H. S. Kwak, Enclosed buoyant convection with internal heat generation under oscillating sidewall temperature, *ASME J. Heat Transfer*, **124**(2002), 577-580.
- (11) B. V. Antohe and J. L. Lage, Amplitude effect on convection induced by time-periodic horizontal heating, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **39**(1996), 1121-1133.