壁面による乱流のブロック効果に及ぼすレイノルズ数の影響* (第2報, Townsend のモデル渦によるフォーシングを用いた直接数値計算)

長田 孝二^{*1}, 相良 文彦^{*2}, 小森 悟^{*3}
Julian C. R. HUNT^{*4}, Peter A. DAVIDSON^{*5}

Reynolds Number Influence on Turbulent Blocking Effects of a Rigid Plane Boundary (2nd Report, Direct Numerical Simulation Using Townsend's Eddy Forcing)

Kouji NAGATA^{*6}, Fumihiko SAGARA, Satoru KOMORI,
Julian C. R. HUNT and Peter A. DAVIDSON

^{*6} Department of Mechanical Science and Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

The Reynolds number influence on turbulent blocking effects by a rigid plane boundary is studied using direct numerical simulation (DNS). A new forcing method using 'simple model eddies' (Townsend 1976) for DNS of stationary homogeneous isotropic turbulence is proposed. A force field is obtained in real space by sprinkling many space-filling 'simple model eddies' whose centers are randomly but uniformly distributed in space and whose axes of rotation are random. The method is applied to a shear-free turbulent boundary layer over a rigid plane boundary and the blocking effects are investigated. The results show that stationary homogeneous isotropic turbulence is generated in real space using the present method. By using different model eddies with different sizes and rotation speeds, we could change the turbulence properties such as the integral and micro scales, the turbulent Reynolds number and the isotropy of turbulence. Turbulence intensities near the wall showed good agreements with the previous measurement and the linear analysis based on a rapid distortion theory (RDT). The splat effect (i.e., turbulence intensities of the components parallel to the boundary are amplified) occurs near the boundary and the viscous effect prohibits the splat effect at the quasi steady state at low Reynolds number.

Key Words: Turbulence, Boundary Layer, Unsteady Flow, Forcing, Blocking Effect

1. 緒 言

第1報⁽¹⁾において, 著者らは, Rapid Distortion Theory (RDT) 解析により, 壁面による乱流のブロック効果に及ぼすレイノルズ数の影響について考察を行った。その結果, レイノルズ数が低い場合には, 壁面近傍で壁面に平行な乱流成分が増大する「スブラッ

ト効果^{(2)~(4)}が顕著に起こることが解析的に示された。このスブラット効果は, 壁面に垂直方向の乱れ成分が壁面上で零にならなければならないという境界条件により発生するものであり, 物理的には鉛直方向の乱流エネルギーが水平方向成分に再分配されることで起こる。第1報⁽¹⁾で用いた RDT では高レイノルズ数を有する乱流場の乱流統計量を解析的に求めることができ, また, 初期条件や境界条件の影響を比較的容易に調べることができるという大きな利点がある。しかし, 一方で, 線形解析であるためにその適用が $t < T_L = L_\infty/u'_\infty$ に限られるという問題がある。ここで, L_∞ および u'_∞ はそれぞれ初期乱流の積分距離スケールと速度変動の rms 値である。そこで, 今回は, 第1報の RDT によって予測された壁面ブロック効果

* 原稿受付 2004 年 11 月 19 日。

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科 [元: 京都大学大学院工学研究科] (〒464-8603 名古屋市千種区不老町)。

^{*2} 京都大学大学院工学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)。

^{*3} 正員, 京都大学大学院工学研究科。

^{*4} Department of Geological Science & Department of Space & Climate Physics, University College London (Gower Street, London WC1E 6BT, UK)

^{*5} Department of Engineering, University of Cambridge (Trumpington Street, Cambridge CB2 1PZ, UK)

E-mail: nagata@mech.nagoya-u.ac.jp

に及ぼすレイノルズ数の影響を、直接数値計算 (DNS) を用いて調べることを目的とする。

DNS において定常な一様等方性乱流場を生成する場合、低波数域にエネルギーを与えるフォーシングの手法が一般的に用いられている。最近では、低波数域のみではなく指数型のエネルギースペクトルを有する外力場を用いてフォーシングを行う‘フラクタルフォーシング’も提案されている⁽⁵⁾。これらのフォーシングは、通常、波数空間内で行われ、一様等方性乱流場における渦構造や乱流拡散現象等を明らかにするうえでは、計算精度の面からも適している。しかし、フーリエ変換を必要とするこの方法は、簡単な幾何形状を有する計算領域にその適用が限定され、計算領域が複雑な場合や計算領域内に障害物を含む場合には適用することができない。この問題を解決する方法として、本研究では、Townsend のモデル渦⁽⁶⁾を用いて物理空間内でフォーシングを行うことにより定常な一様等方性乱流場を生成する方法を提案した。これは、‘simple model eddy’と呼ばれる多数の球形渦を物理空間内にランダムに配置することによってフォーシングを行うものであり、このフォーシングにより指数型のパワースペクトルをもつ外力場を生成させた。本手法を用いて生成した定常な一様等方性乱流場に、時刻 $t_w = 0$ においてフラットな壁面を挿入し、一様等方性乱流に及ぼす壁面のブロック効果について考察を行った。壁面上に形成される、平均シアのない乱流境界層 (壁面のブロック効果を受けて乱流場が変化する層) 中の速度変動強度分布を計算し、過去の実験結果⁽⁷⁾および RDT による解析結果⁽¹⁾と比較した。

2. おもな記号

F_i	: 外力の i 方向成分
L_∞	: 定常な一様等方性乱流の積分距離スケール
l_e	: フォーシング渦の代表長さスケール
p	: 圧力
Re_L	: 乱流レイノルズ数 ($= u'_\infty L_\infty / \nu$)
u_i	: i 方向瞬間速度
u'_∞	: 定常な一様等方性乱流の速度変動の rms 値
N_{eddy}	: 配置するフォーシング渦の個数
t	: 時間
t_w	: 壁面を挿入してから時間
T_L	: turnover 時間 ($= L_\infty / u'_\infty$)
Y	: L_∞ で無次元した壁面からの距離

$\delta^{(v)}$	: 粘性層の厚さ
ν	: 動粘性係数
ρ	: 密度
Ω	: フォーシング渦の回転角速度

3. Townsend のモデル渦によるフォーシングおよび DNS

物理空間内でフォーシングを行う方法として、本研究では Townsend のモデル渦⁽⁶⁾を利用した。本来、Townsend のモデル渦は一様等方性乱流場における速度場のモデルとして提案されたものであり、

$$u_1 = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left(e^{-\frac{\alpha_i^2 x_i^2}{2}} \cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2 \cos l_3 x_3 \right) \quad (1)$$

$$u_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(e^{-\frac{\alpha_i^2 x_i^2}{2}} \cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2 \cos l_3 x_3 \right) \quad (2)$$

$$u_3 = 0 \dots\dots\dots (3)$$

で記述される渦が空間内に多数、ランダムに配置された場合に、これらの要素渦の重ね合わせによって速度場を表す。ここで、 α は乱流の特性により決定される定数である。本研究では、‘simple model eddy’、すなわち、 $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合を考え、その中でも、等方性乱流場を得るために‘球形渦’($\alpha_i = \alpha$)を用いる。この速度場に対する三次元エネルギースペクトルとして、

$$E(k) = \frac{\overline{u^2} l_e}{24\pi^{1/2}} (kl_e)^4 e^{-\frac{1}{4}k^2 l_e^2} \dots\dots\dots (4)$$

が得られる⁽⁸⁾。ここで、 l_e は渦の代表長さスケール、 $\overline{u^2}$ は速度変動強度である。当然であるが、Townsend のモデルはある瞬間における一様等方性乱流をモデル化したものであり、その時間発展や圧力分布を得ることはできない。そこで、本研究では、Townsend の球形渦と同様の渦を用いて、物理空間内でフォーシングを行うことを考える。円柱座標 (r, θ, z) を用い、中心を原点にもち z 軸まわりに回転する球形渦による外力 $\mathbf{F}_{eddy}$ を、

$$\mathbf{F}_{eddy} = \Omega^2 r e^{-\frac{2(r^2+z^2)}{l_e^2}} \mathbf{e}_\theta \dots\dots\dots (5)$$

で表す。ただし、 Ω は渦の回転角速度、 $\mathbf{e}_\theta$ は周方向の単位ベクトルである。この渦が空間上に多数ランダムに配置された場合を考え、外力をこれらの渦による外力の重ね合わせで表す。これらの渦によって得られる外力を非圧縮性流体に対するナビエ・ストークス方程式に組み込み、連続の式と連立させて解いた。すなわ

ち、支配方程式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i \dots (7)$$

である。ただし、

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = \sum_{i=1}^{N_{\text{eddy}}} \mathbf{F}_{\text{eddy},i} \dots\dots\dots (8)$$

であり、 $\mathbf{F}_{\text{eddy},i}$ は i 番目 ($i = 1, 2, \dots, N_{\text{eddy}}$) の渦が
つくる外力である。ここで、外力 $\mathbf{F}$ はソレノイダル
条件を満たすことに注意されたい。支配方程式の数値
解法には有限差分法に基づく MAC (Marker and Cell)
法を用い、空間微分には二次精度の中心差分を、時間
積分には Euler 陰解法を用いた。

外力場の評価は一辺の長さが L の立方体領域で行
い、配置する渦の個数 N_{eddy} を $10^3 \sim 50^3$ とした。前
述のように渦の配置はランダムとし、実際には乱数を用
いて渦の中心位置および回転軸のベクトルを決定した。
格子点数を、 $N_{\text{eddy}} = 50^3$ の場合には x, y, z 方向
にそれぞれ 257 点、その他の場合にはそれぞれ 129 点
とした。

外力場を組み込んだ DNS においては、計算領域を
 x, z (水平) 方向に L , y (鉛直) 方向に $1.2L$ の長さをも
つ直方体とした。発達した定常乱流場が得られた後、
時刻 $t_w = 0$ において $y/L = 0.2$ の位置に壁面を挿
入し、以後の計算は $y/L \geq 0.2$ の領域でのみ行った。
配置する渦の個数を $N_{\text{eddy}} = 1200$ とし、格子点数を
 x, y, z 方向にそれぞれ 129, 151, 129 点とした。い
ずれの計算においても、計算格子数を二倍の 258, 302,
258 点にして計算を行った結果、計算結果は格子数が
129, 151, 129 点の場合と完全に一致した。したがって、
本計算に対する計算格子数は 129, 151, 129 点で十分
であることが確認された。速度の境界条件としては、
壁面を挿入しない場合は全境界面に対してスリップ条
件を、壁面を挿入した場合には壁面上にのみ粘着条件
を用いた。また、圧力の境界条件に関しては、いずれ
の場合もこう配を零とするノイマン条件を用いた。速
度と圧力の初期値は全て零とした。すなわち、本手法
では、乱数等による初期条件としての‘乱流場’を準備
する必要がある。計算は国立環境研究所地球環境セン
ターのスーパーコンピュータ: NEC SX-6 を用いて行わ
れた。

Fig. 1 (a) The longitudinal correlation function $f(r)$ and (b) the transverse correlation function $g(r)$ in the isotropic force field

4. 結果および考察

4.1 外力場の評価 図1に外力場の縦相関関数
 $f(r)$ および横相関関数 $g(r)$ を示す。Townsend の球
形渦を用いてモデル化された外力場に対する $f(r)$ と
 $g(r)$ の理論式は、

$$f(r) = e^{-(\frac{r}{l_e})^2} \dots\dots\dots (9)$$

$$g(r) = \left\{ 1 - \left(\frac{r}{l_e} \right)^2 \right\} e^{-(\frac{r}{l_e})^2} \dots\dots\dots (10)$$

である。ここで、 r は空間内の二点間距離である。図
1より、モデルと理論式は良好な一致を示すことがわ
かる。なお、図を省略するが、試験的に $N_{\text{eddy}} = 5^3$
の場合の計算を行ったところ、特に $g(r)$ において理
論値からのずれが大きく、 $N_{\text{eddy}} = 5^3$ では渦の個数

が少ないことが確認された。

図2に外力場の一次元パワースペクトルを示す。Townsendの球形渦を用いてモデル化された外力場に対する一次元パワースペクトルの理論式は、

$$S_{F_x}(k_1) = \frac{l_e}{\pi^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} l_e^2 k_1^2} \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} S_{F_y}(k_1) &= S_{F_z}(k_1) \\ &= \frac{l_e}{4\pi^{1/2}} (l_e^2 k_1^2 + 2) e^{-\frac{1}{2} l_e^2 k_1^2} \dots (12) \end{aligned}$$

である。ただし、それぞれのパワースペクトルは各変動強度で規格化されている。図2より、渦の個数が多いほど、パワースペクトルはより高波数域まで理論式に従うことがわかる。一方、いずれの場合も低波数域のスペクトルは理論値と良好に一致する。ここで、外力場に対するスペクトルの高周波成分のずれは計算格子解像度の不足によるものではなく、渦の個数によるものであることに注意されたい。したがって、より等方性に近い外力場を得るためには渦の個数を増やすことが有効である。しかし、渦を整列させた場合に計算領域をちょうど満たすだけの個数の渦を用いるため(すなわち、 $N_{eddy} l_e = \text{const.}$)、計算領域が一定のサイズであれば渦の個数を増やすにつれて渦の代表長さスケールが小さくなり、レイノルズ数も低下することになる。また、渦の大きさを変化させずに個数だけを変化させた計算も試験的に行ったが、空間をちょうど満たすだけの個数の渦をランダムに配置させた場合に最も良い結果が得られた。

4.2 一様等方性乱流場の DNS 外力場が一様等方性をほぼ満足することが確認できたので、この外力を組み込んだDNSを行った。配置する渦の個数を増やすほどDNSの結果も等方性に近づくことが予想されるが、渦の個数を増やすほどレイノルズ数が低くなり、また、計算に多大な時間を要するため、本研究では $N_{eddy} = 1200$ とした。 $Re_L = 40$ の場合の速度変動強度の時間発展を図3に示す。ここで、 $\langle \rangle$ はある瞬間における空間平均値を表す。図3より、フォーミングにより徐々に速度変動強度が増加し、 $t/T_L \sim 3$ でほぼ定常な乱流場となることがわかる。三方向の速度変動強度がほぼ一致し、また、図3(b)に示すようにレイノルズ応力も非常に小さいことから、本DNSにより定常な一様等方性乱流場が形成されていることがわかる。図4に $Re_L = 75$ に対する速度変動の一次元パワースペクトル θ_{ii} を示す。図4より、乱流レイノルズ数が十分大きいとはいえないために明確な慣性領域は現れていないものの、良好なパワースペクトル

Fig. 2 The one dimensional power spectra for (a) $N_{eddy} = 10^3$ and $l_e/L = 1/10$, (b) $N_{eddy} = 30^3$ and $l_e/L = 1/30$ and (c) $N_{eddy} = 50^3$ and $l_e/L = 1/50$

が得られていることがわかる。ここで、DNSにより得られたパワースペクトル θ_{ii} は、外力場のパワースペクトル S_{Fi} とは異なり、高周波域での乱れが増加していることがわかる。すなわち、外力場のかく乱効果によって新たな乱れが生成されていることが確認できる。なお、図を省略するが、レイノルズ数が大きくなるほど小スケールの乱れが増加し、慣性領域が拡大する傾向がみられた。レイノルズ数がさらに高い場合に

Fig. 3 Time developments of (a) the turbulence intensities of velocity fluctuations and (b) the Reynolds stresses at $Re_L = 40$ obtained by DNS

Fig. 4 The one dimensional power spectra of velocity fluctuations at $Re_L = 75$ obtained by DNS

対する DNS は、計算精度と計算時間の制約から実行されなかった。

4.3 一様等方性乱流に及ぼす壁面のブロック効果
レイノルズ数 ($Re_L = u'_\infty L_\infty / \nu$) が 40 の場合の速度

Fig. 5 The vertical distributions of the turbulence intensities at $Re_L = 40$: (a) time variation, (b) comparison with the previous measurement in a mixing box⁽⁷⁾ at the quasi steady state

変動強度の壁からの距離に対する分布を図5に示す。ここで、速度変動強度および壁からの距離は、壁面から十分離れた位置における速度変動の rms 値 u'_∞ および積分距離スケール L_∞ でそれぞれ無次元化されている。また、図中の $\delta^{(v)}$ は粘性層⁽¹⁾⁽²⁾の厚さであり、 $\overline{u_h^2}$ は壁面に平行な速度変動強度成分、 $\overline{u_v^2}$ は壁面に垂直な速度変動強度成分である。なお、このレイノルズ数 ($Re_L = 40$) は、格子乱流水槽を用いた McDougall の実験⁽⁷⁾と同一である。参考として、 $t_w/T_L = 0.005$ における瞬間速度のベクトル図を図6に示す。図5(a)より、壁面近傍において水平方向の速度変動強度 $\overline{u_h^2}$ が急激に増加するスプラット効果が起こることがわかる。また、スプラット効果は時間の経過とともに小さくなる。なお、本DNSにおける時間の経過は、格子乱流を用いた過去の研究 (e.g., Thomas & Hancock⁽³⁾) においては、乱流格子からの下流方向距離に相当する ($t_w = x/\bar{U}$)。 $t_w/T_L = 1$ 以降では乱流統計量の時間変化が非常に小さい擬定常状態となり、このとき、図

Fig. 6 A typical instantaneous velocity field over the wall at $Re_L = 40$

5(b) に示すように、DNS の結果は実験結果⁽⁷⁾と良好に一致した。

スプラット効果に及ぼすレイノルズ数の影響を調べるために、レイノルズ数が低い、 $Re_L = 6$ の場合について速度変動強度を計算した結果を図 7 に示す。図 7 より、レイノルズ数が低い場合には $t_w \ll T_L$ においてはスプラット効果がより顕著に起こる。これは、乱流が持つ運動エネルギーが小さいために壁面のブロック効果を受けやすいためであると考えられ、第一報にて報告した RDT の結果とも定性的に一致する。しかし、 $Re_L = 40$ の場合と同様に、時間の経過とともに粘性の効果によりスプラット効果が抑制され、 $\overline{u_h^2}$ も $\overline{u_v^2}$ と同様に壁面に近づくにつれて値が減少することがわかる。すなわち、図 5 に示した $Re_L = 40$ の場合と同様に、レイノルズ数が低い場合には、擬定常状態においてはスプラット効果が起こらないことがわかる。また、レイノルズ数が低い場合には、擬定常状態において、壁面近傍における水平方向および鉛直方向の速度変動強度の減少が顕著になる。

$Re_L = 75$ の場合の速度変動強度分布を図 8 に示す。このレイノルズ数は、第一報において報告した RDT と同程度である。図 8 より、DNS の結果は RDT の結果とかなり良好に一致することがわかる。格子乱流を用いた Thomas の実験⁽³⁾ではレイノルズ数がさらに高い ($Re_L = O(10^3)$) ため、本 DNS との定量的な比較を行うことはできなかったものの、定性的な分布傾向は本 DNS 結果と一致した。なお、この場合も擬定常状態ではスプラット効果は現れなかった。

以上の結果より、レイノルズ数が低い ($Re_L < 100$)

Fig. 7 The vertical distributions of the turbulence intensities at $Re_L = 6$

Fig. 8 Comparison with the RDT⁽¹⁾ at $t_w / T_L = 0.01$ at $Re_L = 75$

場合には、粘性の影響が非常に小さい範囲、すなわち、乱流格子下流の平板境界層⁽³⁾⁽⁹⁾ではリーディングエッジからの距離が短い区間でのみスプラット効果が起こり、格子乱流水槽実験⁽⁷⁾のように擬定常状態での実験ではスプラット効果が起こらないことがわかる。

5. 結 言

Townsend のモデル渦を用いて物理空間内でフォーシングを行うことにより、定常な一様等方性乱流場を生成する方法を提案した。さらに、生成した定常な一様等方性乱流場に時刻 $t_w = 0$ においてフラットな壁面を挿入した場合の速度変動強度の変化を計算し、過去の実験⁽⁷⁾および RDT⁽¹⁾と比較した。本研究で得られた結論は以下の通りである。

- (1) Townsend の球形渦によるフォーシングによって、定常な一様等方性乱流場を物理空間内で生成することができた。用いる渦の大きさや回転角速度を変化させることによって、積分距離スケール、マ

イクロスケール, 乱流レイノルズ数等を変化させることが可能である。

- (2) レイノルズ数が低い場合には擬定常状態においてスプラット効果が起こらず, 壁面近傍において水平方向および鉛直方向の速度変動強度が減少する。この傾向は, レイノルズ数が低いほど顕著になる。また, 粘性の影響が小さい範囲 (リーディングエッジからの距離が短い区間) においては, レイノルズ数が低い場合にスプラット効果がより顕著に起こる。これは, 乱流運動エネルギーが小さいために壁面の影響をより強く受けるためであり, 第1報で報告したRDTによる結果とも定性的に一致する。
- (3) 本DNS結果は, $Re_L = 40$ に対する格子乱流水槽での実験値, および $Re_L \sim 100$ に対するRDTの結果と良好に一致した。

本DNS手法の大きな利点は, フォーシングを行う渦の軸の向きや形を制御することによって一様軸対称乱流場等の様々な乱流場を生成できるということである。本研究は等方性乱流を対象とし, 同じく等方性乱流を用いた過去の実験とRDT結果について考察を行ったものであるが, 今後, 本DNS手法を非等方性乱流へも適用し, 壁面による非等方性乱流のブロック効果を明らかにすることが重要であると考えられる。現在, 本手法によって, 典型的な非等方性乱流のひとつである軸対称乱流場を生成できることを確認している。今後, 本手法が, 等方性乱流場における乱流拡散現象だけでなく, 非等方性乱流場における乱流拡散現象に関する研究にも役立つことが期待される。

謝 辞

本DNSは国立環境研究所地球環境センターのスーパーコンピュータ:NEC SX-6 を用いて行われた。セン

ターの関係者各位に深謝する。本研究は, 文部科学省科学研究費補助金 (16760126, 14102016) および 21 世紀 COE プログラム「動的機能機械システムの数理モデルと設計論」の援助を受けて行われた。乱数の発生には, MT(Mersenne Twister) を用いた。

文 献

- (1) Nagata, K. & J. C. R. Hunt, Reynolds Number Influence on Turbulent Blocking Effect of a Rigid Plane Boundary (1st Report, Linear Analysis Using the Rapid Distortion Theory) (in Japanese), *Nihon Kikai Gakkai Ronbunshu, B (Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B)*, **71**-709 (2005).
- (2) Hunt, J. C. R. & J. M. R. Graham, Free-stream turbulence near plane boundaries, *Journal of Fluid Mechanics*, **84** (2) (1978), 209–235.
- (3) Thomas, N. H. & P. E. Hancock, Grid turbulence near a moving wall, *Journal of Fluid Mechanics*, **82** (1977), 481–496.
- (4) Kit, E. L. G. et al., Measurement of turbulence near shear-free density interfaces, *Journal of Fluid Mechanics*, **334** (1997), 293–314.
- (5) Mazzi, B. & J. C. Vassilicos, Fractal-generated turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, **502** (2004), 65–87.
- (6) Townsend, A. A., *The Structure of Turbulent Shear Flow*, 2nd edn. (1976), Cambridge Univ. Press.
- (7) McDougall, T. J., Measurements of turbulence in a zero-mean-shear mixed layer, *Journal of Fluid Mechanics*, **94** (1979), 409–431.
- (8) Davidson, P. A., *Turbulence* (2004), Oxford Univ. Press.
- (9) Uzkan, T. & W. C. Reynolds, A shear-free turbulent boundary layer, *Journal of Fluid Mechanics*, **28** (1967), 803–821.