平行壁間においてスーパーキャビテーションを伴う 三次元翼の解析法*

伊 藤 惇^{*1}, 石 井 優^{*2}

Characteristic Analysis of Supercavitating Three Dimensional Hydrofoil between Parallel Walls

Jun ITO^{*3} and Yutaka ISHII^{*3} Department of Mechanical Engineering, Akita National College of Technology,
1-1 Bunkyo-cho, Iijima, Akita-shi, Akita, 011-8511 Japan

While a supercavitating propeller is put to practical use, a supercavitating machinery like pump or turbine is not so many. One of the causes is that an interaction in supercavitation between the flow around the rotor or stator and the casing or hub is not clarified. It seems that the interaction is unsteady and the flow behavior is very complex, but in this paper, unsteady inviscid incompressible and small disturbance flow are assumed. An internal flow of axial flow machine is modeled into a flow between parallel plane walls and a velocity distribution is assumed to be the Karman-Prandtl $1/n$ power law of turbulent flow. Under these assumptions, three-dimensional characteristics of supercavitating hydrofoil between parallel plane walls are analyzed.

Key Words: Cavitation, Blade, Three-dimensional Flow, Shear Flow, $1/n$ Power Law, Supercavitation, Parallel Walls

1. 緒 言

スーパーキャビテーション・プロペラが高速船用プロペラサとして実用化されているにもかかわらず、スーパーキャビテーション・ポンプや水車など流体機械への実用例は少ない。この原因の一つとしては、スーパーキャビテーションを伴う動翼や静翼回りの流れと、これを取り囲むケーシングやボスあるいは内筒との干渉が明らかでないことが挙げられる。

このような干渉は非定常的で非常に複雑な挙動を示すものと考えられるが、ここでは定常、非粘性、非圧縮性を仮定し、平行壁間の流れにモデル化し、 $1/n$ 乗べき法則に従う乱流速度分布の中に置かれた三次元スーパーキャビテーション翼に対する解析法を示した。

平行壁間のスーパーキャビテーション翼を扱った例としては、せん断流中の影響を検討した著者らの研究^{(1)~(3)}がある。

図1に示すように、幅 λ の平行壁間を流れる主流は、側壁の影響を受けた乱流の速度分布を有するせん断流 $U(y)$ であり、無限前方から x 軸方向に流れて翼をよぎるものとする。

この平行壁間にまたがる弦長 c なる三次元翼は、長さ ℓ なるスーパーキャビテーション状態にあり、平行壁に垂直かつ xy 平面に迎角 α で配置されている。また流れは定常、非圧縮性、非粘性を仮定する。

オイラーの運動方程式と連続の式から微小じょう乱の仮定の範囲で、じょう乱圧力 p に関して式(1)が成立する。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + U^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

式(1)で変数分離解を仮定すると一般解は次式(2)より求めることが出来る。

Fig.1 Coordinate System

2. 支配方程式と境界条件

2.1 支配方程式 (4)

* 原稿受付 2005 年 7 月 15 日。

^{*1} 正員, 秋田工業高等専門学校機械工学科 (〒011-8511 秋田市飯島文京町 1-1)。^{*2} 学生員, 秋田工業高等専門学校専攻科。

E-mail: cavi@akita-nct.jp

$$\frac{p}{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} F(k_n) Y(y; k_n) P(x, z; k_n) \quad (2)$$

ここで k_n は分離定数であり、後に固有値となるものである。 $Y(y; k)$, $P(x, z; k)$ はそれぞれ翼幅方向と翼断面の基本解であり、 $R(k)$ は $Y(y; k)$ と $P(x, z; k)$ (ここでは圧力関数と呼ぶことにする) の線形結合のスペクトルである。従って式(1)は翼幅方向と翼断面に分かれ、それぞれについて次のような微分方程式が成立する。

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{U^2} \frac{dY}{dy} \right) + k_n^2 \frac{Y}{U^2} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - k_n^2 P = 0 \quad (4)$$

2.2 境界条件

境界条件はキャビテーション発生のない流れ⁸を拡張して、以下のようになる。

無限遠ではじょう乱圧力 p は零であることから式(5)が成立する。

$$p = 0; z^2 + x^2 = \infty \quad (5)$$

両側壁面においては、垂直な圧力勾配は零であることから式(6)が成立する。

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; y = 0, \lambda \quad (6)$$

翼下面では、線形化した接線流れの条件から式(7)が成立する。

$$\frac{w(x, y, -0)}{U(y)} = \frac{d}{dx} z_f(x) \quad (7)$$

ここで z は翼下面の z 座標であり、 w はじょう乱速度の z 成分である。

キャビティ部分では圧力一定条件より式(8)が成立する。

$$p(x, y, \pm 0) = \text{const.}; 0 < x < c, y = +0 \\ ; c < x < \ell, y = 0 \quad (8)$$

3 翼断面の解析

3.1 積分方程式と付帯条件

誘導速度 w と圧力関数 P を求め、境界条件に代入すると翼下面では式(9)のようになる。

$$\frac{d}{dx} z_f(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \Gamma(\xi; k_n) \frac{d\xi}{x-\xi} \\ - \frac{1}{2} \Sigma_1(x; k_n) + \Delta w_n(x; k_n) \quad (9)$$

翼上面側のキャビティ部分では式(10)のようになる。

$$\frac{1}{2} \sigma_n(k_n) = \frac{1}{2} \Gamma(x; k_n) + \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Sigma_1(\xi; k_n) \frac{d\xi}{x-\xi} \\ + \frac{1}{2\pi} \int_c^\ell \Sigma_2(\xi; k_n) \frac{d\xi}{x-\xi} + \Delta u_n(x; k_n) \quad (10)$$

翼後縁より下流側のキャビティ部分では式(11)のようになる。

$$\frac{1}{2} \sigma_n(k_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Sigma_1(\xi; k_n) \frac{d\xi}{x-\xi} \\ + \frac{1}{2\pi} \int_c^\ell \Sigma_2(\xi; k_n) \frac{d\xi}{x-\xi} + \Delta u_n(x; k_n) \quad (11)$$

ここで Δu_n 、及び Δw_n はそれぞれ、式(12)、式(13)のようになる。

$$\Delta u_n(x; k_n) = \frac{1}{2\pi} k_n \int_0^c \Sigma_1(\xi; k_n) \text{sgn}(x-\xi) \\ \times R_1(k_n | x-\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} k_n \int_0^c \Sigma_2(\xi; k_n) \\ \times \text{sgn}(x-\xi) R_1(k_n | x-\xi) d\xi \quad (12)$$

$$\Delta w_n(x; k_n) = -\frac{1}{4} k_n \int_0^c \Gamma(\xi; k_n) dx \\ - \frac{1}{2\pi} k_n \int_0^c \Gamma(\xi; k_n) \text{sgn}(x-\xi) \\ \times \left\{ R_1(k_n | x-\xi) + \int_0^{k_n | x-\xi} K_0(t) dt \right\} d\xi \quad (13)$$

また K_0 , K_1 は第二種変形ベッセル関数で R_1 は式(14)のようになる。

$$R_1(z) = K_1(z) - \frac{1}{z} \quad (14)$$

吹き出し分布が翼後縁で滑らかに接続するためには式(15)が成立しなければならない。

$$\Sigma_1(c; k_n) = \Sigma_2(c; k_n) \quad (15)$$

また、スーパーキャビテーションのキャビティ後端モデルとしては西山らの文献⁹より半閉鎖型を用いるものとする式(16)が成立する。

$$\int_0^c \Sigma_1(x; k) dx + \int_c^\ell \Sigma_2(x; k) dx = \frac{1}{2} \alpha c \quad (16)$$

以上の式(9)、(10)、(11)及び式(15)、(16)は $\Gamma(x; k)$, $\Sigma_1(x; k)$, $\Sigma_2(x; k)$ を未知数とする連立積分方程式及び付帯条件式であり、スーパーキャビテーション三次元翼の特性を解析するための翼断面問題の基礎方程式である。

3.2 級数展開

連立方程式(9)、(10)、(11)を解くために、特異点分布を西山の提案した級数表示⁹を改良した戸松による次のような級数⁹に展開する。

$$\Gamma(x; k_n) = A_0(k_n) \sqrt{\frac{1 - \sin \phi / 2}{\sin \phi / 2}} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(k_n) \sin m\phi; x = \frac{c}{2}(1 - \cos \phi) \quad (17)$$

$$\Sigma_1(x; k_n) = B_{-1}(k_n) + B_0(k_n) \sqrt{\frac{1 - \cos \theta / 2}{\cos \theta / 2}} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(k_n) \sin m\theta; x = \frac{c}{2}(1 + \cos \theta) \quad (18)$$

$$\Sigma_2(x; k_n) = C_{-1}(k_n) + C_0(k_n) \cot \frac{\tau}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m(k_n) \sin m\tau; x = \frac{\ell - c}{2}(1 - \cos \tau) + c \quad (19)$$

これらの級数を式(15)に代入すると接続条件は式(20)のようになる。

$$B_{-1}(k_n) - C_{-1}(k_n) = 0 \quad (20)$$

またキャビティ後端の流れモデルの式(16)は式(21)のようになる。

$$cB_{-1}(k_n) + \frac{1}{4}\pi\{B_0(k_n) + B_1(k_n)\} + C_{-1}(k_n)(\ell - c) + \frac{1}{2}\pi(\ell - c) \times \left\{C_0(k_n) + \frac{1}{2}C_1(k_n)\right\} = \frac{1}{2}\alpha c \quad (21)$$

以上の級数の式(17), (18), (19)を連立積分方程式に代入し, 新たに式(20), (21)の条件を加えて解くことにより級数の係数及びキャビテーション係数が求まり翼断面の問題は解決する。

4 翼幅方向の解析

4.1 固有値問題

対象性を考慮すると翼幅方向の問題は次の式(22), (23), (24)のようになる。

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \left(\frac{U}{2} \frac{dU}{dy} \right) \frac{dY}{dy} + k_n^2 Y = 0; 0 < y < \frac{\lambda}{2} \quad (22)$$

$$\frac{dY}{dy} = 0; y = 0 \quad (23)$$

$$\frac{dY}{dy} = 0; y = \frac{\lambda}{2} \quad (24)$$

式(23), (24)の下に式(22)を解く問題はスツルム・リュウヴィル型の固有値問題となっており, 無限個の固有

値 $k_n \geq 0$ が存在し, それに対応する直交関数系 $Y(y; k_n)$ を解に持つ。従って式(25)が成立する。

$$\int_0^{\lambda/2} \frac{Y(y; k_n) Y(y; k_r)}{U(y)^2} dy = 0 \quad (n \neq r) \quad (25)$$

さらに式(26)のように正規化すると式(27), (28)の関係が成り立つ。

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^{\lambda/2} \frac{Y(y; k_n)^2}{U(y)^2} dy = 1 \quad (26)$$

$$F(k_n) = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} Y(y; k_n) dy \quad (27)$$

$$F(0) = Y(y; 0) = \left[\frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} \frac{1}{U(y)^2} dy \right]^{-1/2} \quad (28)$$

4.2 差分方程式

0 から $\lambda/2$ を N 分割し, それぞれの小区間の幅を h とし, 式(22)を次のように差分によって離散化することもとする。

$$Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1} - \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2U_i} \times (Y_{i+1} - Y_{i-1}) + k_n^2 h^2 Y_i = 0 \quad (29)$$

また, 式(23), (24)はそれぞれ式(30), (31)のようになる。

$$Y_1 - Y_{-1} = 0 \quad (30)$$

$$Y_{N+1} - Y_{N-1} = 0 \quad (31)$$

差分表示を用いれば主流の速度分布についても何ら制約はなく, 任意に与えることができる。ここでは, 乱流速度分布で成立するカルマン・プラントルにより提案されたべき乗法則を導入する。

4.3 固有関数

べき乗法則の指数を $1/n$ とした場合, 式(22)の第二項は,

$$-\frac{2}{ny} \frac{dY}{dy} \quad (32)$$

上式は, $y=0$ では $dY/dy=0$ より不定形となる。よって

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{ny} \frac{dY}{dy} = \frac{2}{n} \frac{d^2 Y}{dy^2} \Big|_{y=0} \quad (33)$$

の関係をを用いると, $y=0$, すなわち $i=0$ では式(34)が, $i=1, 2, \dots$ では式(35)がそれぞれ成立する。

$$\left(2 - K - \frac{4}{n} \right) Y_0 + \left(\frac{4}{n} - 2 \right) Y_1 = 0; i = 0 \quad (34)$$

$$-\left(1 + \frac{1}{in}\right)Y_{i-1} + (2-K)Y_i - \left(1 - \frac{1}{in}\right)Y_{i+1} = 0$$

$$; i = 1, 2, \dots, N$$

$$\dots\dots\dots (35)$$

式(35)の $i=N$ で境界条件式(31)を考慮すると式(34), (35)は Y_0 から Y_N までの $N+1$ 個の未知数をもつ同次型連立一次方程式となる。この連立方程式が有為な解をもつための必要十分条件として式(36)が成立しなければならない。

$$\begin{vmatrix} 2-K-\frac{4}{n} & -2+\frac{4}{n} & & & \\ -\frac{n+1}{n} & 2-K & -\frac{n-1}{n} & & \\ & -\frac{2n+1}{2n} & 2-K & -\frac{2n-1}{2n} & \\ & & \vdots & & \\ & & -\frac{in+1}{in} & 2-K & -\frac{in-1}{in} \\ & & & \vdots & \\ & & & -2 & 2-K \end{vmatrix} = 0$$

$$\dots\dots\dots (36)$$

ここで K は式(37)のようになる。

$$K_n = \left(\frac{\lambda k_n}{2N}\right)^2 \dots\dots\dots (37)$$

式(36)を QR 法¹⁰⁾を用いて解くことによつて K が求まり固有値 k_n が決定される。

Y_j を求めるためには式(34), (35)を変形した次の式(38), (39), (40)を用いる。

$$Y_1 = \frac{1}{2} K' Y_0 \dots\dots\dots (38)$$

$$Y_{j+1} = -\frac{1}{B} (A Y_{j-1} + K' Y_j), j = 1, 2, \dots, N-2$$

$$\dots\dots\dots (39)$$

$$Y_N = \frac{1}{K'} Y_{N-1} \dots\dots\dots (40)$$

ここで, K' , A , B はそれぞれ式(41), (42), (43)のようになる。

$$K' = 2-K \dots\dots\dots (41)$$

$$A = \frac{jn+1}{jn} \dots\dots\dots (42)$$

$$B = \frac{jn-1}{jn} \dots\dots\dots (43)$$

次に得られた固有関数の規格化を行う。 $Y_0=1$ として式(38), (39), (40)によりすべての Y_j を求め、これらを用いて式(26)の積分を行いその積分値を S とする。

$Y(y; k_n) / S^{\frac{1}{2}}$ を新たな $Y(y; k_n)$ として定義しなおすことによつて規格化の条件を満足させることが出来る。

5. 翼特性

5.1 局所揚力係数

局所揚力係数を式(44)のように定義する。

$$C_l(y) = \frac{2l(y)}{\rho U(y)^2} \dots\dots\dots (44)$$

局所揚力係数 $C_l(y)$ は式(2), (44)から式(45)のようになる。

$$C_l(y) = \frac{\pi c}{2U(y)^2} \sum_{n=1}^{\infty} F(k_n) Y(y; k_n) \{A_0(k_n) + A_1(k_n)\}$$

$$\dots\dots\dots (45)$$

5.2 全揚力係数と誘導抗力係数

全揚力係数を式(46)のように定義する。

$$C_L = \frac{2L}{\rho c \int_0^{\lambda} U(y)^2 dy} \dots\dots\dots (46)$$

これより全揚力係数は、積分

$$\int_0^{\lambda} U(y)^2 dy = \frac{n}{n+2} \lambda U\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \dots\dots\dots (47)$$

より、

$$C_L = \frac{2\lambda}{\rho c \frac{n}{n+2} \lambda U\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle F(k_n) \left[\frac{\pi}{2} \{A_0(k_n) + A_1(k_n)\} \right] \right\rangle \dots\dots (48)$$

また同様に誘導抗力係数を式(49)のように定義する。

$$C_{D_i} = \frac{2D_i}{\rho c \int_0^{\lambda} U(y)^2 dy} \dots\dots\dots (49)$$

これより誘導抗力係数 C_{D_i} は、

$$C_{D_i} = \frac{1}{8} \frac{c\lambda}{\rho c \frac{n}{n+2} \lambda U\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle k_n F(k_n) \left[\frac{\pi}{2} \{A_0(k_n) + A_1(k_n)\} \right] \right\rangle \cdot (50)$$

5.3 キャビティ厚さ分布

キャビティ厚さ分布はは吹き出し分布を積分して、 $0 < x < c$ の範囲に対しては、

$$y_{a1} = \frac{c}{2U(y)} \sum_{n=1}^{\infty} F(k_n) Y(y; k_n) [B_{-1}(k_n)]$$

$$\begin{aligned}
 & \times (1 - \cos \theta) + B_0(k_n) \\
 & \times \left\{ \frac{\pi}{2} + \sqrt{\cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)} \left(2 \cos \frac{\theta}{2} - 1 \right) \right. \\
 & \left. - \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}} \right\} + B_1(k_n) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \right. \\
 & \times \sin 2\theta) + \sum_{m=2}^{\infty} B_m(k_n) \\
 & \times \left\{ \frac{m \sin \theta \cos m\theta - \sin m\theta \cos \theta}{(m-1)(m+1)} \right\} \dots \dots \dots (51)
 \end{aligned}$$

$c < x < \ell$ の範囲に対しては、

$$\begin{aligned}
 y_{a2} = & \frac{1}{U(y)} \sum_{n=1}^{\infty} F(k_n) Y(y; k_n) \{ B_{-1}(k_n) c \\
 & + B_0(k_n) \frac{\pi c}{4} + B_1(k_n) \frac{\pi c}{4} + \frac{\ell - c}{2} [C_{-1}(k_n) \\
 & \times (1 + \cos \tau) + C_0(k_n) (\pi - \tau - \sin \tau) \\
 & + C_1(k_n) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\tau}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\tau \right) + \sum_{m=2}^{\infty} C_m(k_n) \\
 & \times \left\{ \frac{m \sin \tau \cos m\tau - \sin m\tau \cos \tau}{(m-1)(m+1)} \right\} \dots \dots (52)
 \end{aligned}$$

6. 数値計算例

具体的な計算例として矩形平板翼を取り上げ、迎角は 4° とし、主流の速度分布としては $1/7$ および $1/9$ 乗べき法則を仮定している。 ℓ/c はキャビティ長さ、 λ/c はアスペクト比、 η ($=2y/\lambda$) は無次元翼断面位置を表している。

図2は翼幅方向の局所揚力係数分布 $C_l(y)$ に及ぼすキャビティ長さ ℓ/c の影響を示したものである。 ℓ/c が大きくなるにつれ $C_l(y)$ は小さくなる。翼端に近づくにつれて $C_l(y)$ は急激に上昇しているが、これは二次流れによる翼端側の加速効果によるものと考えられる。

図3は翼幅方向の局所揚力係数に及ぼす主流速度分布のべき指数の影響を示している。 $1/7$ 乗と $1/9$ 乗で大差は見られない。

図4は全揚力係数 C_L および誘導抗力係数 C_D と、アスペクト比の逆数 c/λ の関係に及ぼすキャビティ

長さ ℓ/c の影響を示したものである。 C_L 、 C_D いずれも ℓ/c が大なるほど小さな値を示している。

図5は全揚力係数 C_L および誘導抗力係数 C_D と、アスペクト比の逆数 c/λ の関係に及ぼす主流速度分布のべき指数の影響を示している。揚力係数に対しては影響の少ないのに比べ、誘導抗力係数にはかなりの差が見られる。これは主流の速度分布の差が随伴渦に影響を与えているものと考えられる。詳しいメカニズムは今後の検討事項である。

図6は翼断面位置 $\eta=0.202$ における弦長方向キャビティ厚さ分布を表している。翼弦部分では大きな差は見られないが、 ℓ/c が大きくなるにつれキャビティ厚みは増加している。

図7は翼断面位置 $\eta=0.202$ における弦長方向キャビティ厚さ分布に及ぼす主流速度分布のべき指数の影響を調べたものである。 $1/n$ が小さいほうが断面での速度が増加し、局所キャビテーション係数が小さくなることからキャビティ厚さが大きくなっている。

Fig2 Local lift coefficients (Effect of ℓ/c)

Fig3 Local lift coefficients (Effect of $1/n$)

Fig4 Lift coefficients and induced drag coefficients
(Effect of l/c)

Fig6 Cavity thickness distributions
(Effect of l/c)

Fig5 Lift coefficients and induced drag coefficients
(Effect of $1/n$)

Fig7 Cavity thickness distributions (Effect of $1/n$)

7. 結 言

乱流速度分布を有する平行壁間内の流れ中のスーパーキャビテーション三次元翼について、特性解析法が示され、これに基づき流体特性が明らかにされた。本論文の内容は以下のように要約される。

(1) 翼幅方向にキャビティ長さ一定の仮定を導入することにより、翼断面と翼幅方向の二種の問題に分けて扱うことができ、それぞれの解の線形結合として一般解が得られることが示された。

(2) 翼断面問題におけるじょう乱速度と圧力関数を翼表面の接線流れの条件とキャビティの圧力一定条件に代入することにより三元連立積分方程式が誘導され、翼及びキャビティの両後縁における二種の付帯条件の下に級数展開法により解かれた。

(3) 翼幅方向問題はスツルム・リュウヴィル型の固有値問題となり、差分方程式に変換され、主流の速度分布にカルマン・プラントルのべき乗法則を適用しながら固有方程式を誘導し、これより固有値、固有関数、スペクトルが得られた。

(4) 翼断面問題から得られた級数の係数と翼幅方向問題の解及び線形結合のスペクトルを用いて、乱流速度分布を考慮したスーパーキャビテーション状態の矩形平板翼について、翼幅方向揚力係数分布、全揚力係数、誘導抗力係数、及びキャビティ厚さ分布等の流体特性が明らかにされた。

参考文献

- (1) 伊藤，機論，56-530(1990-10)，2871.

- (2) 伊藤・成田, 機論, 57-537(1991-5), 1635.
 - (3) 伊藤・成田・中村, 機論, 59-567(1993-11), 3393.
 - (4) von Karman, Th. and Tsien, H.S., Q. Appl. Math., 3-1(1945), 1.
 - (5) Honda, M., Proc. R. Soc., Ser. A, 254(1960), 372.
 - (6) 伊藤・佐藤・高橋, 機論, 56-522(1990-2), 295.
 - (7) 西山・大田, Trans. ASME, Ser. D, 73-4(1972), 550.
 - (8) 西山, 機論, 35-277(1969-9), 1895.
 - (9) 戸松, 「2次元超空洞翼の解法」, 秋田高専卒論, (1975.3).
 - (10) 中村・伊藤・佐藤, 「FORTRAN 応用編、数値解法と理工学問題」3章, 森北出版, (1992.5).
-