弾性変形を伴う物体周りの二次元非定常流れの数値計算*

田中嘉宏^{*1}, 森西晃嗣^{*2}, 松野謙一^{*2}Numerical Simulation of Two Dimensional Unsteady Flows
Over an Elastic Cylinder Considering Fluid-Structure InteractionYoshihiro TANAKA, Koji MORINISHI^{*3} and Kenichi MATSUNO^{*3} Department of Science and Technology, Kyoto Institute of Technology,
Goshokaidocho, Matsugasaki, Sakyou-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

The purpose of this study is to propose a numerical simulation method for predicting unsteady deformation of structures in response to unsteady changes of fluid dynamic force acted on them. The numerical simulation is carried for elastic structures with weakly coupling a finite difference fluid solver and a finite element structure solver. An overset grid technique and a space-time finite volume technique are used in the fluid solver. In the finite element structure solver, kinetic nonlinear effects of the structures from large displacement, large rotations, and large strains are considered. A typical numerical simulations is carried out for vortex-induced vibrations of an elastic elliptic cylinder. The proposed method could be useful for the prediction of the periodic deformation of the structure under the vortex-induced vibrations.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Finite Difference Method, Viscous Flow, Finite Element Method, Fluid-Structure Interaction

はじめに

カルマン渦列が発生するような構造体まわりの流れ場を考えると、この周期的な揚力変動により構造体に繰り返し応力、繰り返しひずみが生じ、構造体を構成する材料の疲労・破壊が問題になることが考えられる。実際に発電所における配管内のさや管が流体振動により疲労損傷した事例も記憶に新しい。このような問題に対する解析例としては、弾性支持された剛体の構造体が流体力により振動する連成解析⁽¹⁾⁽²⁾が報告されているが、構造体を弾性体として、非定常に変化する流体力と連成させた解析例は少ない。しかし材料の疲労・破壊が起こる場所の特定や繰り返し回数の予測を行うためには、構造体自体を弾性体として取り扱い、流体力により構造体内に生じる応力やひずみの大きさや時間変化を解析する必要がある。すなわち、流れ場の中に置かれた弾性構造体に対して、流体-構造体連成解法により、流体力によって生じる応力やひずみの大きさとその時間変化を計算し、材料の疲労・破壊の予測を行なう手法を確立することは、安全・安心な社

会を築く一助になると考えられる。

このような観点から、流れの中に置かれた構造体が疲労・破壊を起こさないような安全設計を可能とする解析システムの確立を目指し、その第一段階として、本研究では解析に用いる時間刻みは充分に小さく、構造体の変形も充分に小さいと仮定して、構造体の準静的解析コードと、流体解析コードを組み合わせ、弱連成解法コードを開発した。構造体の解析コードにおいては、将来の発展性を考慮して、力学的非線形性⁽³⁾を考慮したが、今回の適用例では、構造体の変形が微小であるため、変位とひずみの関係が線形域での計算となっている。また、境界の移動・変形を比較的容易に取り扱えるように重量格子法⁽⁴⁾と幾何保存則 (Geometric Conservation Law)⁽⁵⁾を考慮した有限差分法を流体解析コードでは採用した。

本手法では、構造体に準静的解析を用いているため、構造体の疲労・破壊を直接取り扱うことはできないが、準静的変形の仮定が満たされる範囲内で得られた応力と許容応力を比較することにより、構造体の安全性の確認に利用できる。また流体力によって生じる構造体の応力・ひずみの集中個所の特定や、変形の繰り返し数を掌握することにより、安全設計への利用が期待できる。

* 原稿受付 2005年6月6日。

^{*1} 京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。^{*2} 正員、京都工芸繊維大学工芸学部。

E-mail: morinisi@ipc.kit.ac.jp

本論文では、最初の第1章と2章で、流体解析と構造体解析の基礎方程式、および、数値計算法を、それぞれ、簡単に説明する。作成した流体解析コードと構造体解析コードに対して、それぞれ個別に行った信頼性の検証結果例を第3章に示す。第4章では、流体-構造体連成解析例として、流れ場の中に置かれた2次元環状楕円物体を取り上げ、定常流れの場合とカルマン渦列の放出を伴う非定常流れの場合に対して、流体力により環状楕円物体内部に生じる応力やひずみの計算結果を示し、材料の疲労・破壊に対する構造体の安全性について検討する。最後の第5章で得られた結論を示す。

1. 基礎方程式

1.1 流体の支配方程式 物理時間 t 、擬似時間 τ 、圧力 p 、デカルト座標系における速度成分を u, v 、保存量ベクトルを q, h 、流束ベクトルを F, G 、粘性流束ベクトルを R, S 、レイノルズ数を Re とすると、一般座標系における2次元擬似圧縮性ナビエストークス方程式は式(1)のように書ける。

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}}{\partial \eta} \right) \quad (1)$$

$$\hat{q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad \hat{h} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta U' \\ uU + \xi_x p \\ vU + \xi_y p \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta V' \\ uV + \eta_x p \\ vV + \eta_y p \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\hat{R} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x R_2 + \xi_y S_2 \\ \xi_x R_3 + \xi_y S_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{S} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x R_2 + \eta_y S_2 \\ \eta_x R_3 + \eta_y S_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで添え字は偏微分を意味し、 $\xi_x, \xi_y, \xi_\tau, \eta_x, \eta_y, \eta_\tau$ は変換メトリックスを示し、反変速度 U, V は式(5)および式(6)、変換ヤコビアンは式(7)で定義される。

$$U = \xi_\tau + \xi_x u + \xi_y v \quad (5)$$

$$V = \eta_\tau + \eta_x u + \eta_y v \quad (6)$$

$$\frac{1}{J} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (7)$$

また U', V' は物理時間に依存しない反変速度として式(8)および式(9)で定義される。

$$U = \xi_x u + \xi_y v \quad (8)$$

$$V = \eta_x u + \eta_y v \quad (9)$$

1.2 構造体の支配方程式 大変形、大回転および大ひずみと言った力学的に非線形の効果を含んだ物体の運動方程式を、Lagrange 的記述 (Total Lagrangian⁽³⁾) により、仮想変位の原理を線形化することで求めると、式(10)を得る。

$$\int_{0V} {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta {}_0 e_{ij} d^0 V + \int_{0V} {}_0 S_{ij} \delta {}_0 \eta_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} R - \int_{0V} {}_0 S_{ij} \delta {}_0 e_{ij} d^0 V \quad (10)$$

ここで ${}_0 C_{ijrs}$ は時刻0の形状を基準とした時刻 t での応力ひずみ増分テンソル、 ${}_0 S_{ij}$ は時刻 t での2nd Piola-Kirchhoff 応力、 ${}_0 e_{ij}$ および ${}_0 \eta_{ij}$ は時刻0の形状を基準とした時刻 t での線形、非線形増分ひずみである。また ${}^{t+\Delta t} R$ は時刻 $t + \Delta t$ での仮想仕事である。

2. 数値計算法

2.1 流体の数値計算法 基礎方程式である二次元擬似圧縮性ナビエストークス方程式に対して、移流項の離散化には二次精度中心差分近似に圧力の数値的振動を抑えるために Jameson の人工粘性項⁽⁶⁾を付加し、粘性項の離散化には二次精度中心差分近似を用いた。また時間積分について物理時間には一次精度後退差分近似、また擬似時間には LU-SGS 陰解法⁽⁷⁾を用いた。

2.2 構造体の数値計算法 式(10)にひずみと変位の関係式⁽³⁾を代入し、整理すると式(11)を得る。ただし、ここでは、解析の時間刻みは充分小さく、また時間刻み内での構造体の変形も充分小さいとして、準静的な変形を仮定した。

$$({}_0 K_L + {}_0 K_{NL}) U = {}^{t+\Delta t} R - {}_0 F \quad (11)$$

ここで ${}_0 K_L$ は線形ひずみ増分剛性マトリックス、 ${}_0 K_{NL}$ は非線形ひずみ増分剛性マトリックス、 U は節点変位ベクトル、 ${}^{t+\Delta t} R$ は時刻 $t + \Delta t$ での外力として作用する節点荷重ベクトル、そして ${}_0 F$ は時刻 t で要素の応力と等価な節点力ベクトルである。有限要素方程式の解法として Newton-Raphson 法を用いた。その収束判定条件は式(12)のように、全変位に対する各反復ステップでの増分変位が判定基準値以下になるまで反復計算を行なう。判定の基準値として式(13)を用いた。

$$\frac{\| \Delta U^{(i)} \|_2}{\| {}^{t+\Delta t} U \|_2} < \varepsilon_D \quad (12)$$

Fig. 1 Computational strategy

Fig. 2 Computational domain

$$\varepsilon_D = 1.0^{-9} \quad (13)$$

2.3 流体と構造体の連成解法 1 物理時間における構造体の変形は微小であると仮定し、流体と構造体の連成解法として図 1 に示す弱連成解法を用いた。流体計算コードにより流れ場の計算を行ない、物体境界面上での流体に作用するせん断応力と圧力から各格子点での流体力を求めた。次にこの流体力を有限要素法の計算コードにおける外力として定義し、有限要素各節点での変位を求めた。この変位に基づき物体の形状更新を行い、同時に流体の計算格子を再形成する。この一連の計算プロセスが一物理時間段階の連成計算になる。

3. 開発計算コードの検定

最初に開発した流体計算コードと構造体の計算コードについて検定を行なう。

3.1 重畳格子法の検定 重畳格子法を用いた計算コードの信頼性を確認するために、固定円柱周りの計算を行ない C_D 値および C_L 値について Roger ら⁽⁸⁾ との比較を行なった。図 2 に計算領域の概略を示す。全計算領域を覆う主格子はデカルト格子で、格子点数は 228×141 、円柱に対する補助格子は O 型格子で 129×33 である。初期条件は計算領域内の全格子点に

Table 1 Comparison of drag and lift coefficients

	C_{Dmean}	C_{Damp}	C_{Lmean}	C_{Lamp}
present	1.305	0.008	0.000	0.307
Roger	1.376	0.011	0.000	0.358

Fig. 3 Bar assemblage subjected to apex load

Fig. 4 Load-displacement relation

一様流の値 ($p=1, u=1, v=0$) を与える衝撃出発とし、レイノルズ数 100、物理時間刻み $\Delta t = 0.02$ 、擬似時間刻み $\Delta \tau = 10^{12}$ とした。

Roger らとの C_D 値および C_L 値の比較を表 1 に示す。本計算結果は、Roger らの結果と比較して、計算領域や格子点数が異なるため、多少の相異は見られるが、ほぼ良好な結果が得られていることが確認できる。

3.2 有限要素法計算コードの検定 有限要素の計算コードの信頼性を確認するために、Bathe⁽³⁾ が報告した棒要素の荷重と変位の関係の理論解と開発した計算コードより求めた解との比較を行なった。その計算に用いたモデルを図 3 に示す。荷重は鉛直方向下向きに無負荷の状態から 14.7[N] まで変化をさせた。荷重を負荷している節点については水平方向は拘束条件を与えた。材料定数として棒のヤングモジュラスは $9.2 \times 10^9 [\text{kg/s}^2\text{m}]$ 、ポアソン比 0.49 と定義した。

節点での荷重と鉛直方向の節点変位の関係を図 4 に示す。横軸は棒の長さ L で無次元化した変位であり、縦軸は棒の長さ L と棒の鉛直方向のばね定数で無次元化した荷重である。理論解と計算値は良好な合致を示し、有限要素法の計算コードの信頼性を確認することができた。

Fig. 5 Histories of displacement, drag coefficient and lift coefficient

Fig. 6 Result of frequency analysis

3.3 移動・変形格子解法の検定 移動・変形格子を用いた計算コードの信頼性を確認するために、浅野ら⁽⁹⁾による一様流中で流れ方向に正弦的に強制振動している円柱周りの流れについて計算を行ない、結果の比較を行なった。なお計算領域は重畳格子法の検定と同様のものを用いた。

はじめにレイノルズ数 490 における静止円柱周りの流れの計算を行なった。計算結果として円柱静止時のカルマン渦放出周波数 0.22 を得た。Blevins⁽¹⁰⁾はストローハル数をレイノルズ数の関数として実験的に求め、レイノルズ数が 500 程度から臨界レイノルズ数 300000 までの範囲でストローハル数はほぼ 0.2 であると報じている。また浅野ら⁽⁹⁾は円柱静止時における抗力係数の時間平均 1.37、揚力係数の自乗平均 0.74 と報告しているが、本計算結果は抗力係数の時間平均 1.38、揚力係数の自乗平均 0.69 となった。従って本計算により得られた静止円柱周りの流れは妥当な結果であることが理解できる。

この結果をもとに強制振動の計算を行なった。円柱静止時のカルマン渦放出周波数に対する、円柱の振動周波数の比が 0.90 となるように、円柱の振動周波数を

Fig. 7 Elastic body model

Fig. 8 Histories of displacement, C_d and C_l

設定した。計算条件としてはレイノルズ数 490、物理時間刻み $\Delta t = 0.002$ 、擬似時間刻み $\Delta \tau = 10^{14}$ 、円柱の振動振幅 $0.1D$ とした。ここで D は円柱の直径を示す。無次元時間に対する C_D 値および C_L 値の履歴の比較を図 5 に示す。この結果より円柱の振動に対し渦の振動が同期していることが確認できる。浅野らは C_D 値および C_L 値の周波数分析を行ない円柱の振動数にピークを持つと報じている。本計算についても同様に周波数分析を行なった。その結果を図 6 に示す。この結果からも C_D 値および C_L 値は円柱の振動数にピークを持つことが確認できた。以上の検定結果から本計算コードの信頼性が確認できた。

4. 弾性変形を考慮した楕円体周りの流れ

4.1 計算条件 図 7 に示すように楕円物体は環状になっており、その幅は楕円の高さ D に対し $0.3D$ とし、楕円環の肉厚は $0.013D$ としてモデル化を行なった。この環状の物体内部を有限要素で定義した。本計算に用いた有限要素モデルは 4 節点要素で、数値積分の次数は 2×2 である。この環状モデルは節点数 256、要素数 128 で、楕円の水平方向の中心にある節点とその両側 2 点ずつ、合計 10 節点を完全拘束した。完全

Fig. 9 Displacement distribution

Fig. 10 Definition of polar angle θ

拘束条件とは2次元問題の場合、拘束した節点はx方向およびy方向ともに自由度を持たないことを意味する。この計算に用いた流体は原油を想定し、その物性は粘性係数 $8.0 \times 10^{-2} [\text{kg/sm}]$ 、密度 $0.9 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$ とした。また楕円物体は鋼材を想定し、レイノルズ数10の場合は楕円体の高さを $0.5 \times 10^{-3} [\text{m}]$ 、レイノルズ数100の場合は楕円体の高さを $5.0 \times 10^{-3} [\text{m}]$ として、ヤングモジュラスは動圧で無次元化を行い、その値は 7.38×10^7 である。またポアソン比は0.33として定義した。

流れ場の計算については図2と同じ計算領域上に弾性変形を考慮した楕円物体を置いた。初期条件は主格子、補助格子共に静止剛体楕円物体周りの充分発達した解を与え、物理時間刻み $\Delta t = 0.005$ 、擬似時間刻み $\Delta \tau = 10^{12}$ として連成問題の計算を行なった。

4.2 レイノルズ数10の流れ 図8に無次元時間に対する楕円上端と下端のx方向変位、 C_D 値および C_L 値の時間履歴を示す。この図から C_L 値は時刻が進んでもゼロであるので、x軸に対して対称な圧力分布を持つ定常流れとなることが確認できた。変形は非常に小さいので C_D 値は静止剛体楕円の場合とほとんど変わらないことも確認した。また楕円物体の上端と下

Fig. 11 Pressure and shear stress contours

Fig. 12 Shear stress distribution of elastic body

端のx方向変位は時間が進んでもx軸に対称な変形形状を保持することが確認できた。図9に無次元時間250における物体境界面のx方向およびy方向変位分布を示す。各点の位置の定義は図10に示す通りである。この図から物体の変位もx軸に対して完全に対称であることが確認できた。ここでx方向の変位が正であることは主流方向に変形したことを、またy方向の変位が正であることは鉛直上方へ変形したことを意味するものである。

図11に連成計算の結果として無次元時間250における楕円物体周りの等圧線図と物体内部のせん断応力分布を示す。また図12は物体内部のせん断応力分布を示す。この図よりx軸に対して対称な流れ場に置かれた線対称形状の物体はx軸に対して対称なせん断応力分布となることが確認できた。ここで楕円体前方の水平方向中心部でせん断応力の変化が局部的に大きくなるのは、楕円の水平方向の中心にある節点とその両側2点ずつ、合計10節点を完全拘束点として定義したので、完全拘束点の近傍でひずみが高くなったことにより、応力が高くなったためと考えられる。特に楕円前方の方が高くなったのは、楕円前方の流体力が後方に比べて高いためと考えられる。今回の条件での計算にお

Fig. 13 Histories of displacement, CD and CL

Fig. 16 Pressure and shear stress contours(t=52.2)

Fig. 14 Pressure and shear stress contours(t=50.7)

Fig. 17 Shear stress distribution of elastic body(t=52.2)

Fig. 15 Shear stress distribution of elastic body(t=50.7)

Fig. 18 Pressure and shear stress contours(t=53.6)

いて楕円物体内部に生じるせん断応力の絶対値についての最大値は有次元量に換算した場合、楕円物体前方側の中央部の完全拘束箇所では $4.4 \times 10^6 [kg/s^2m]$ となる。また楕円物体の上端および下端では $1.6 \times 10^6 [kg/s^2m]$ である。これに対し鋼材の静荷重でのせん断応力の許容応力⁽¹¹⁾は $7.1 \times 10^7 [kg/s^2m]$ から $1.2 \times 10^8 [kg/s^2m]$ である。この流れ場は定常流れであり、時間が発展しても楕円物体には常に一定の流体力が作用するために、静荷重下での許容応力との比較を行なった。本計算法を用いれば、流体力による物体内部の応力分布がわか

るので、応力の集中箇所が特定でき、許容応力に対して、計算結果として得られた構造体の応力値を比較することにより、構造体の安全性を確認することが可能になった。

4.3 レイノルズ数 100 の流れ 図 13 に無次元時間に対する楕円上端と下端の x 方向変位、 C_D 値および C_L 値の時間履歴を示す。この図から C_D 値および C_L 値が周期的に振動しているので、周期的に渦が放出されることがわかる。また楕円物体の上端と下端の x 方向変位は互いに逆位相で一定の周期で振動し、そ

Fig. 19 Shear stress distribution of elastic body($t=53.6$) Fig. 21 Fluid stress distribution($t=53.6$) Fig. 20 Fluid stress distribution($t=50.7$)

Fig. 22 Histories of shear stress

の周期は C_L 値の振動と同期することが確認できる。

図 14 から図 19 に楕円物体の上端の x 方向変位が最小値、中心値、最大値となったときの楕円物体周りの等圧線図と楕円物体内部のせん断応力分布を示す。また図 20, 図 21 は楕円物体上端の x 方向変位が最小、最大となったときの楕円物体境界面上の x 方向と y 方向の単位面積あたりの流体力の分布を示す。これらの図から渦が放出される側の楕円物体端の単位面積あたりの流体力は、反対側の物体端の単位面積あたりの流体力に比べて大きくなる。これに伴い、渦が放出される側の楕円物体の物体端の x 方向変位が大きくなることが確認できた。また同時に渦が放出する側の楕円物体端のせん断応力についても、反対側の物体端に比べて大きくなることが確認できた。

図 22 に無次元時間に対する楕円物体上端と下端のせん断応力の時間履歴を示す。この図から渦の周期的な放出とともに、物体の上端と下端のせん断応力は、上端のせん断応力の絶対値が最大値をとるとき、下端のせん断応力が絶対値の最小値をとるといった周期的な変化をすることが確認できた。このときのせん断応力の絶対値について最小値、最大値は有次元量に換算した場合、それぞれ $3.4 \times 10^6 [\text{kg}/\text{s}^2\text{m}]$, $5.1 \times 10^6 [\text{kg}/\text{s}^2\text{m}]$

でこの間の値で繰り返し変化をすることになる。またこの流れ場において物体の下端の変位が最大となるときは、物体前方中央部の完全拘束箇所の下側でせん断応力が最大値をとり、物体の上端の変位が最大となるときは、上側でせん断応力が最大値をとる。この楕円物体前方中央部の完全拘束箇所のせん断応力は、 $8.3 \times 10^6 [\text{kg}/\text{s}^2\text{m}]$ から $1.2 \times 10^7 [\text{kg}/\text{s}^2\text{m}]$ の値で繰り返し変化をすることになる。ここで鋼材の繰り返し荷重のもとでのせん断応力に関する許容応力⁽¹¹⁾は $4.7 \times 10^7 [\text{kg}/\text{s}^2\text{m}]$ から $7.8 \times 10^7 [\text{kg}/\text{s}^2\text{m}]$ であり、今回計算したせん断応力は材料の許容応力以下であるが、流体の速度が今回の計算条件の数倍になるような流れ場の場合は許容応力を超え、構造体の設計において安全性を十分に考慮した上での設計が必要になる。このとき物体の前方中央部の完全拘束箇所特に物体の安全性を十分に考慮した設計が必要になる。この流れ場は非定常流れであり、時間発展とともに楕円物体は周期的に流体力が作用するために、繰り返し荷重下での許容応力との比較を行なった。

このように非定常流れにおける連成計算を行なうことにより、流体力による材料の変形の繰り返し回数の予測と応力が集中する箇所の特定制を行なうことが可能

であり、許容応力と比較することにより、構造体の安全性を確認することができる。

お わ り に

本研究では流体解析コードと構造解析コードを組み合わせ、弾性変形を考慮した物体周りの非定常流れ解析コードを開発し、楕円物体周りの流れに適用し以下のような結論を得た。

(1) レイノルズ数 10 における弾性変形を考慮した楕円物体周りの流れでは、楕円物体の上端と下端は x 軸に対して対称な一定の変形形状を保持し、定常流れになることが確認できた。またそのときの物体内部のせん断応力分布も x 軸に対して対称であり、楕円上端と下端に対称なピークを持つことが確認できた。

(2) レイノルズ数 100 における弾性変形を考慮した楕円物体周りの流れでは、楕円物体の上端と下端の x 方向変位は周期的な振動となり、その振動周期は C_L 値と同期し、上端と下端は同じ振幅で逆位相で振動することが確認できた。また渦が上端部、下端部で放出されるとき、放出される部位のせん断応力が反対側端部に比べ高くなることが確認できた。

(3) 渦が放出される非定常流れに弾性体が置かれた場合、物体の内部応力が渦の放出周波数と共に繰り返し変化することが確認できた。また時間と共に応力の集中する個所が変化することも確認できた。このように、本解析コードでは構造体内の変形は小さいと仮定しているが、その仮定が成り立つ範囲においては、構造体の安全性の確認や、応力集中個所の特定、応力変動周期の掌握などが、ある程度可能になった。

文 献

- (1) Nakamura, T. and Matsuzawa, R., *Finite Element Analysis of Flows-Induced Vibration of a Two-Dimensional Rigid Body Using Composite Overlapping Meshes*, Computational Fluid Dynamics'98, Wiley, (1998), 1046-1051.
- (2) Schulz, K.W. and Kallinderis, Y., *Numerical Prediction of Unsteady Fluid-Structure Interaction for Offshore Applications*, Computational Fluid Dynamics'98, Wiley, (1998), 1282-1287.
- (3) Bathe, K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall International, (1996).
- (4) Steger, J.L. and Benek, J.A., *On the Use of Composite Grid Schemes in Computational Aerodynamics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, (1987), 301-320.
- (5) Fujii, K., *Numerical Methods for Computational Fluid Dynamics*, University of Tokyo Press, (1994).
- (6) Jameson, A. and Backer, T.J., *Solution of the Euler Equations for Complex Configurations*, AIAA Paper 83-1929, (1983).
- (7) Yoon, S. and Jameson, A., *Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel Method for the Euler and Navier-Stokes Equations*, AIAA Journal 26, (1988), 1025-1026.
- (8) Roger, S.E. and Kwak, D., *Steady and Unsteady Solutions of Incompressible Navier-Stokes Equations*, AIAA Journal 29, (1991), 603-610.
- (9) Asano, H. and Morishita, E., *Numerical Analysis of Flow around an Oscillating Circular Cylinder*, Proceedings of the thirty-fourth Fluid Dynamics Conference, (2002), 393-396.
- (10) Blevins, R.D., *Flow-induced vibration*, Krieger publishing company, (1990).
- (11) Nakahara, I., *Strength of Materials, the first book*, YOKENDO,LPD, (1965).