差分格子ボルツマン法に対するダイナミック Smagorinsky モデルの適用*

蔦原 道久^{*1}, 平石 雅之^{*2}

Application of Dynamic Smagorinsky Model to the Finite Difference Lattice Boltzmann Method

Michihisa TSUTAHARA^{*3} and Masayuki HIRAISHI

^{*3} Graduate School of Science and Technology, Kobe University,
1-1 Rokkodaimachi, Nada-ku, kobe-shi, Hyogo, 657-8501 Japan

Three-dimensional turbulent flows past a square cylinder are simulated by the Finite Difference Lattice Boltzmann Method (FDLBM). We carry out two sort of approaches, i.e., first case is carried out by fourth order numerical viscosity without any turbulent model and second case is simulated using the Dynamic Smagorinsky Model (DSM). These results are compared with those by the experiments conducted by Lyn et al. Numerical results by DSM agree with experimental ones and it is confirmed that this method is useful for numerical simulations of turbulent flows.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Lattice Boltzmann Method, Turbulent Flow, Incompressible Flow, Large-Eddy Simulation

1. 緒 言

差分格子ボルツマン法(以下 FDLBM)は, 格子ボルツマン法(以下 LBM)を発展させた, 従来の流体の運動方程式を用いない流体の数値計算法である。FDLBM は過去の研究から, 流体計算手法として有効であることが示されている。また, 精度よく音波の計算ができる⁽¹⁾ といった優れた利点も見いだされている。

しかし, FDLBM による乱流場の計算に関しては, まだあまり研究が行われていない。流体の流れのほとんどは乱流であり, 工学的問題において乱流場の解析を行うことは今日非常に重要になってきている。しかし, 乱流はその構造が非常に微細なため, 多大な計算負荷を要する。そのため, ナビエ・ストークス方程式系による乱流の直接計算を行うには困難であり, 計算機が発達した現在でも, 乱流モデルを用いて数値計算を行うことが一般的である。しかし, その乱流モデルもいまだ完璧といえるものがないのが現状である。

FDLBM は微視的な現象から流体の運動を表現する手法であり, 微細な構造の解明が重要である乱流場の解析にも有効と考えられる。また非圧縮性ナビエ・ストークス方程式系による計算のようにポアソン方程式を解く必要がなく, 計算の並列化が容易である。そこで, 本研究では FDLBM に Large-Eddy Simulation(以下 LES)を導入し, 角柱周りの流れの数値計算を行い, Lyn らの実験結果⁽²⁾ との比較により, その計算法としての有効性を検証した。

2. 差分格子ボルツマン法

2・1 基礎方程式 差分格子ボルツマン法は, 格子ボルツマン法に差分スキームを導入し, 格子と離散的粒子速度を独立に扱えるようにした手法である。一連の粒子運動は速度 c_i をもつ粒子数密度を表す分布関数 f_i を用いて表される。本研究では, 格子 BGK モデルに修正項を付加したモデルを使用し, 基礎方程式は次式で表される⁽³⁾。

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + c_{ia} \frac{\partial f_i}{\partial x_a} - ac_{ia} \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{f_i - f_i^{(0)}}{\phi} = -\frac{1}{\phi} (f_i - f_i^{(0)}) \dots\dots\dots (1)$$

ここで ϕ は 1 タイムステップにおける時間間隔を基準にとったときの粒子分布が平衡状態に達するまでに

* 原稿受付 2005 年 7 月 25 日。

^{*1} 正員, 神戸大学大学院自然科学研究科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)。

^{*2} 学生員, 神戸大学大学院自然科学研究科。
E-mail: tutahara@mech.kobe-u.ac.jp

要する時間に相当し、一般に単一時間緩和係数と呼ばれる。 $f_i^{(0)}$ は平衡分布関数である。式(1)の左辺第3項は巨視的な式としてのナビエ・ストークス方程式に現れる粘性係数と、単一時間緩和係数との関係を調整する項であり、この項を加えることにより計算を安定に高速化できる⁽⁶⁾。右辺は衝突により粒子分布が平衡状態に向かうことを意味する。

FDLBM では LBM の定義同様、格子点における流体のマクロ量は、全粒子の状態を粒子速度のモーメントをかけて足し合わせたものに等しい。したがって格子点上での流体の密度、運動量は分布関数を用いて次のように定義される。

$$\rho = \sum_i f_i \quad \dots\dots\dots (2\cdot a)$$

$$\rho u_a = \sum_i f_i c_{ia} \quad \dots\dots\dots (2\cdot b)$$

ここで u_a は流速ベクトルを表す。また $c_i = |c_{ia}|$ である。ただし本研究では、非熱流体モデルのみでの解析を行っているため、数値計算において流体の内部エネルギーを定義する必要はない。

2.2 モデルの詳細 離散化 BGK モデルとして図1に示す三次元非熱流体モデル(3D15Vモデル)を採用する。式(1)における局所平衡分布関数は

$$f_i^{(0)} = \rho [A_n + B_n c_{ia} u_a + C_n (c_{ia} u_a)^2 + D_n u_a^2] \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表される。ここで $n=0, 1, 2$ であり、それぞれ静止粒子、速度2の運動粒子、速度 $\sqrt{3}$ の運動粒子を表している。

このように、非熱流体モデルの場合、局所平衡分布関数は巨視的な流体の変数である密度と流速によって表され、流速の二次の項まで含む多項式となっている。

また流体運動の巨視的な支配方程式であるナビエ・ストークス方程式系は式(1)および式(3)から、チャップマン・エンスコグ展開を用いて導かれる。その際式(3)における係数は次のように決定される。

$$A_0 = \frac{1}{23}, B_0 = 0, C_0 = 0, D_0 = -\frac{7}{24} \quad \dots\dots\dots (4\cdot a)$$

$$A_1 = \frac{1}{23}, B_1 = \frac{1}{24}, C_1 = \frac{1}{32}, D_1 = -\frac{1}{48} \quad \dots\dots\dots (4\cdot b)$$

Fig. 1 Distribution of particles in 3D15V model

$$A_2 = \frac{2}{23}, B_2 = \frac{1}{12}, C_2 = \frac{1}{16}, D_2 = -\frac{1}{24} \quad \dots\dots\dots (4\cdot c)$$

圧力 P 、動粘性係数 ν は次式で与えられる。

$$P = \frac{24}{23} \rho \quad \dots\dots\dots (5\cdot a)$$

$$\nu = \frac{2}{3} (\phi - a) \quad \dots\dots\dots (5\cdot b)$$

3. Large-Eddy Simulation

3.1 FDLBM サブグリッドモデル FDLBM に LES を導入する際には、方程式の平均化が施される。平均化にはグリッドフィルタとして格子幅程度の代表長さをもつフィルタ関数 $G(t, y)$ が用いられ、以下の式で平均化される⁽⁶⁾。

$$\bar{u}(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, y) u(x - y) dy \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで u は速度、密度、圧力などの流れの物理量である。フィルタをかけた離散化 BGK 方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial t} + c_{ia} \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_a} - a c_{ia} \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\bar{f}_i - f_i^{(0)}}{\phi_{\text{total}}} \\ = -\frac{1}{\phi_{\text{total}}} (\bar{f}_i - f_i^{(0)}) \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで ϕ_{total} は緩和時間係数である。これは通常の離散化ボルツマン方程式に出てくる単一時間係数 ϕ と異なり、時間および空間に依存するが、緩和時間係数が時間および空間に依存するパラメータであってもチャップマン・エンスコグ展開によるナビエ・ストークス方程式の導出は変わることはなく式(7)は式(8・a)、(8・b)のようなフィルタをかけたナビエ・ストークス方程式系に帰着する⁽⁷⁾⁻⁽¹¹⁾。

$$\frac{\partial \bar{u}_a}{\partial x_a} = 0 \quad \dots\dots\dots (8\cdot a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_a}{\partial t} + \bar{u}_\beta \frac{\partial \bar{u}_a}{\partial x_\beta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_a} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \{ 2(\nu + \nu_t) \bar{S}_{a\beta} \} \\ \dots\dots\dots (8\cdot b) \end{aligned}$$

ν_t は渦粘性係数であり、 $\bar{S}_{a\beta}$ はひずみ速度テンソルで式(9)で与えられる。

$$\bar{S}_{a\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_a}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_a} \right) \quad \dots\dots\dots (9)$$

3.2 ダイナミック Smagorinsky モデル 乱流モデルとして Germano⁽¹²⁾ らにより提案されたダイナミック Smagorinsky モデル(以下 DS モデル)を用いた。SGS 応力のモデリングで、代表的なものとして Smagorinsky モデル(以下 S モデル)が挙げられる。これは SGS 応力の非等方部分を次式のようにモデル化したものである。

$$\tau_{a\beta} - \frac{\delta_{a\beta}}{3} \tau_{kk} = -2\nu_t \bar{S}_{a\beta} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタである。

S モデルでは、渦粘性 ν_t は次のようにモデル化される。

$$\nu_t = C\mathcal{D}^2|\bar{S}| \quad \dots\dots\dots (11\cdot a)$$

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{\alpha\beta}\bar{S}_{\alpha\beta}} \quad \dots\dots\dots (11\cdot b)$$

C は Smagorinsky 定数の二乗に対応する。

DS モデルでは新たにテストフィルタとしてフィルタ関数 $\hat{G}(t, y)$ を導入し、式 (11・b) の C の値を瞬時の計算結果から動的に同定する。本研究ではテストフィルタを格子幅の 2 倍とし、式 (12) のように差分近似した。

$$\tilde{u}_i = \frac{\bar{u}_{i-1} + 4\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}}{6} \quad \dots\dots\dots (12)$$

Germano らにより提案されたモデルに基づき、Lilly の最小二乗法による C の算出方法⁽¹³⁾ を用いる場合、 C は次式で与えられる。

$$C = -\frac{\lambda_{mn}M_{mn}}{M_{kl}M_{kl}} \quad \dots\dots\dots (13\cdot a)$$

$$\lambda_{\alpha\beta} = \widetilde{\bar{u}_\alpha \bar{u}_\beta} - \bar{u}_\alpha \bar{u}_\beta \quad \dots\dots\dots (13\cdot b)$$

$$M_{\alpha\beta} = \widetilde{\mathcal{D}^2|\bar{S}| \bar{S}_{\alpha\beta}} - \mathcal{D}^2|\bar{S}| \bar{S}_{\alpha\beta} \quad \dots\dots\dots (13\cdot c)$$

なお C が負値をとることでエネルギーの逆カスケードを表現できることが DS モデルの利点の一つであると言われているが、 C の負値を許したまま計算を行ったところ計算は発散した。そこで本研究では計算安定化のため C が負値をとった場合零としている。

DS モデルを用いると緩和時間係数 ϕ_{total} は、3D 15V モデルの場合以下の式で表される。

$$\nu_{\text{total}} = \frac{2}{3}(\phi_{\text{total}} - a) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで $\nu_{\text{total}} = \nu + \nu_t$ である。また、DS モデルでは ν_t は式 (11・a) で与えられることから、 ϕ_{total} は 3D 15V モデルにおいて、式 (15) で与えられる。

$$\phi_{\text{total}} = \frac{3}{2}(\nu + C\mathcal{D}^2|\bar{S}|) + a = \phi + \frac{3}{2}C\mathcal{D}^2|\bar{S}| \quad \dots\dots\dots (15)$$

4. 角柱周りの非定常流

4・1 計算条件 解析対象として正方角柱周りの非定常流の計算を行う (図 2)。座標の原点は角柱の中心である。本研究では二つのケースについて計算を行った。

Case 1 では乱流モデルは用いず、後述するように数値粘性で計算を安定化させた。Case 2 では Case 1 と同じ条件のもと、数値粘性をできる限り抑え、乱流モデルとして DS モデルを適用した。

Case 1, Case 2 ともに、計算領域は角柱の一辺の長

Fig. 2 Calculation area

Fig. 3 Calculation mesh

さ D に対して主流方向 (x/D 方向) に $31D$ (角柱風上側に $4.5D$ 、風下側に $25.5D$)、主流に対して垂直方向 (y/D 方向) に $21D$ 、角柱スパン方向 (z/D 方向) に $2D$ とした。計算格子は不等間隔格子であり、物体表面付近で格子を密にしている (図 3)。格子数は $160(x/D) \times 121(y/D) \times 41(z/D)$ 。最小格子幅は $\Delta x_{\min} = 0.025D$ 、 $\Delta y_{\min} = 0.025D$ 、 $\Delta z_{\min} = 0.05D$ (z/D 方向は等間隔)。また境界条件として物体上では粘着条件を適用し、計算空間の上下および左側では一様流を与えた。計算空間の右側には自由流出条件を与えた。角柱スパン方向は周期境界条件を与えた。基礎方程式の離散化は時間項を二次精度の Runge-Kutta 法、空間には式 (16) のように四次精度の中心差分に安定化のために重み付き数値粘性項を加えたものを用いた。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x} = & \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} \\ & + \alpha \frac{\Delta x^3}{12} \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{\Delta x^4} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 α は数値粘性項の重みを決める係数で、Case 1 では $\alpha = 0.4$ 、Case 2 では $\alpha = 0.2$ とした (ここでは用いないが $\alpha = 1.0$ は一般に用いられる三次風上差分である UTOPIA に対応する)。

初期条件は流れ場全体を一様流とし、一様流の流入速度 U_0 と角柱一辺の長さ D を用いたレイノルズ数を 2.14×10^4 、時間刻みを $\Delta t = 0.005$ とした。

4・2 計算結果 図 4～6 に実験結果 (Lyn ら) および Case 1, Case 2 における角柱の中心軸上の x/D

Fig. 4 Distribution of mean-velocity in the streamwise directions

Fig. 5 Distribution of $\overline{u'^2}$ in the streamwise directions

Fig. 6 Distribution of $\overline{v'^2}$ in the streamwise directions

方向の平均速度 $\bar{u}$ の分布, 変動速度の二乗平均 $\overline{u'^2}$ の分布, y/D 方向の変動速度の二乗平均 $\overline{v'^2}$ の分布を示す. また参考のために図 4 にナビエ・ストークス方程式系による計算結果⁽¹⁴⁾における角柱の中心軸上の x/D 方向の平均速度 $\bar{u}$ の分布を示す. 変動速度の二乗平均 $\overline{u'^2}$ の分布および y/D 方向の変動速度の二乗平均 $\overline{v'^2}$ の分布については参考文献(15)にこれまでのナビエ・ストークス方程式系による計算結果が示されており, 本研究における結果はそれらのデータと大き

Fig. 7 Schematic diagram of sampling line

く異なるものではない.

Case 2 における結果は, 角柱の中心軸上の x/D 方向の平均速度の分布, 変動速度の二乗平均の分布, y/D 方向の変動速度の二乗平均の分布のすべてにおいて Case 1 の結果に対して大きく改善されており, 実験結果ともよく一致していることが確認できる. また角柱後方 ($x/D > 4.0$) では x/D 方向の平均速度が過剰予測されているが, これはナビエ・ストークス方程式系による計算結果にも表れている傾向である. この原因として計算領域の境界で一様流条件を与えていることや, 実験では流入風にわずかながら乱れが入っているのに対し計算では乱れが入っていないということ⁽¹⁶⁾などが考えられる.

次に角柱側面(図 7)における x/D 方向の平均速度の分布, 変動速度の二乗平均の分布を図 8, 9 に示す. 平均速度の分布は Case 1, Case 2 とともに実験結果とおおむね一致しており, はく離点およびはく離による逆流域もある程度再現できていると考えられる. 変動速度の二乗平均の分布については Case 1 ではほとんど速度変動が捕えられていない. これは数値粘性により物体近傍の細かい速度変動が消されているためであると考えられる. Case 2 では Case 1 に比べて改善しているが, 実験値よりはやや小さな値をとっている. このことから物体近傍での細かな速度変動まで捕らえるためには格子数を増やし, 数値粘性を減らす必要があると考えられる.

4.3 流れのようす 図 10(a)~(c)および図 11(a)~(c)に Case 1(数値粘性による計算), Case 2(LES による計算)における無次元時間 $t=140$ から $t=160$ の角柱周りの等渦度線図を示す. Case 1, Case 2 のどちらについても角柱前面の角度からはく離れた流れが上下交互に角柱背後に回りこみ, 角柱の後方にカルマン渦列を形成しているようすが確認できる. 角柱のごく近傍では放出されるカルマン渦列より小さな渦も確認できるが, Case 2 のほうがより

Fig. 8 Distribution of mean-velocity in the side of square cylinder

複雑な構造となっている。図 10(d) および図 11(d) に無次元時間 $t=150$ における渦度の等値値面を示す。本研究のような高レイノルズ数の流れにおいては、角柱のようにスパン方向に様な構造物の周りの流れであっても三次元的な変動を示すことがわかる。また図 10(d), 11(d) においても Case 2 のほうが複雑な構造をしていることが見て取れる。

4・4 格子依存性 最後に格子依存性を確認するために Case 2 よりも粗い格子 [格子数 $140(x/D) \times 101(y/D) \times 26(z/D)$, 最小格子幅 $\Delta x_{\min}=0.033D$, $\Delta y_{\min}=0.033D$, $\Delta z_{\min}=0.08D$] を用いて Case 2 と同様の計算を行い、平均流速および変動速度の二乗平均の分布について Case 2 の結果と比較したものを図 12~14 に示す。角柱近傍の平均流速については粗い格子を用いた場合にも Case 2 とほとんど変化はなく実験値とよく一致しているが、角柱後方 ($x/D > 4.0$) では Case 2 よりもさらに過剰予測されている。これ

Fig. 9 Distribution of $\overline{u'^2}$ in the side of square cylinder

は数値粘性が増加したことにより速度の回復が早くなったことが原因であると考えられる⁽¹⁷⁾。また変動速度の二乗平均についてはピークでの値が若干減少している。

これらのことから FDLBM による乱流計算では数値粘性による効果に十分注意しなければならないと考えられる。

5. 結 言

差分格子ボルツマン法における非圧縮流体モデルを用いて数値粘性のみで計算を安定化させた場合と、数値粘性をできるだけ減らしダイナミック Smagorinsky モデルを適用した場合の、角柱周りの非定常流の計算を行った。その結果、ダイナミック Smagorinsky モデルを適用した場合では数値粘性のみで安定化させた場合に比べて大きな改善が見られ、平均流速や変動速度などの乱流統計量に対して実験結果とのよい一致が確認できた。また等渦度線図などから角柱後方

(a) $t=140$ (Case 1) (a) $t=140$ (Case 2) (b) $t=150$ (Case 1) (b) $t=150$ (Case 2) (c) $t=160$ (Case 1) (c) $t=160$ (Case 2) (d) $t=150$ (Case 1) (d) $t=150$ (Case 2)

Fig. 10 Vorticity distribution in x - y plane (a)(b) (c) and Isosurface of Vorticity at $t=150$ (d) for calculation by numerical viscosity

Fig. 11 Vorticity distribution in x - y plane (a)(b) (c) and Isosurface of Vorticity at $t=150$ (d) for calculation by LES

Fig. 12 Distribution of mean-velocity in the streamwise directions

Fig. 13 Distribution of $\overline{u'^2}$ in the streamwise directions

Fig. 14 Distribution of $\overline{v'^2}$ in the streamwise directions

におけるカルマン渦列の発生および角柱付近での複雑な渦構造も見てとれた。これにより差分格子ボルツマン法にダイナミック Smagorinsky モデルを適用することで、乱流の計算が可能であることが示された。

文 献

- (1) Tsutahara, M. et al., Direct Simulation of Acoustic Waves by the Finite Difference Lattice Boltzmann Method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 69, No. 680 (2003), pp. 89-95.
- (2) Lyn, D. A. et al., A laser-Doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder, *J. fluid Mech.*, Vol. 304 (1995), pp. 285-319.
- (3) Tsutahara, M. et al., *Lattice Gas and Lattice Boltzmann Methods -New Methods of Computational Fluid Dynamics-*, (1999), p. 56, CORONA PUBLISHING Co. Ltd.
- (4) Takada, N. and Tsutahara, M., Proposal of Lattice BGK Model with Internal Degrees of Freedom in Lattice Boltzmann Method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 65, No. 629 (1999), pp. 92-99.
- (5) Tsutahara, M. et al., A Study of New Finite Difference Lattice Boltzmann Model, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 68, No. 665 (2002), pp. 15-21.
- (6) Kajishima, T. *Numerical Simulation of Turbulent Flows*, (1999), p. 186, Yokendo Co. Ltd.
- (7) Hou, S. et al., A lattice Boltzmann Subgrid model for High Reynolds Number Flows, *Fields Institute Communications*, Vol. 6 (1996), pp. 151-166.
- (8) Succi, S. *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*, (2001), pp. 124-141, OXFORD UNIVERSITY PRESS.
- (9) Eggle, J. G. M., Direct and Large Eddy Simulations of Turbulent Fluid Using Lattice Boltzmann Scheme, *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 17 (1996), pp. 307.
- (10) Teixeira, C., Incorporating Turbulence Models into the Lattice Boltzmann Method, *Int. J. Mod. Phys., C*, Vol. 9 (1999), pp. 1159-1171.
- (11) Chen, H. et al., Analysis of Sub-Grid Fluid Turbulence Using the Boltzmann Bhatnagar-Gross-Krook Kinetic Equation, *Phys. Rev., E*, Vol. 59, R1 (1999), pp. 2527-2530.
- (12) Germano, M. et al., A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Phys. Fluids, A* Vol. 3, No. 7 (1991), pp. 1760-1765.
- (13) Lilly, D. K., A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure model, *Phys. Fluids, A* Vol. 4, No. 4 (1992), pp. 633-635.
- (14) Murakami, S., *Direct and Large-Eddy Simulation 2*, (1997), pp. 385-395, Kluwer Academic Publishers.
- (15) Voke, P., *Direct and Large-Eddy Simulation 2*, (1997), pp. 355-373, Kluwer Academic Publishers.
- (16) Mochida, A. et al., LES of flow past 2 D cylinder with impose inflow turbulence, *J. Wind Engineering*, No. 79 (1999), pp. 173-174.
- (17) Iizuka, S. et al., LES of Flow past 2 D Square Cylinder, Effect of Grid Stretching Ratio on Prediction Accuracy *J. Wind Engineering*, No. 71 (1997), pp. 191-192.