高解像度 DNS による平行平板間乱流熱伝達における 各種乱流統計量に対するプラントル数の影響*

関 洋 治^{*1}, 岩 本 薫^{*2}, 河 村 洋^{*2}

Prandtl Number Effect on Turbulence Statistics through High Spatial Resolution DNS of Turbulent Heat Transfer in a Channel Flow

Yohji SEKI^{*3}, Kaoru IWAMOTO and Hiroshi KAWAMURA

^{*3} Department of Mechanical Engineering, Tokyo University of Science,
2641 Yamazaki, Noda-shi, Chiba, 278-8510 Japan

Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in a channel flow through high spatial resolution has been carried out for $Re_\tau=180$, which is based on the friction velocity and the channel half width. The configuration is a fully developed turbulent channel flow with uniform heat flux heating from both walls. Molecular Prandtl numbers are set to be 0.71, 1.0, 2.0 and 10.0. The Prandtl number effect on the turbulence quantities such as turbulent Prandtl number, skewness and flatness factors of temperature derivatives are examined. Moreover, the resulting one-dimensional pre-multiplied energy spectra of temperature fluctuations at large wavenumbers are investigated to confirm the accuracy of the calculation.

Key Words: Turbulent Heat Transfer, DNS, Channel Flow, Prandtl Number Effect

1. 結 言

近年におけるコンピュータの飛躍的な進歩に伴い、直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation: DNS) が、乱流現象解明の強力なアプローチとして広く使用されている。また、乱流熱輸送の DNS を行うことにより、限られた範囲ではあるがさまざまなレイノルズ数、プラントル数 Pr (シュミット数 Sc) での詳細な結果を得ることが可能である。

現在では、コストや計算資源の制約などにより、 $Pr=0.025\sim10.0$ ⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾ までの限られた範囲でのみ DNS が行われている。Antonia⁽⁵⁾ は、Kim⁽¹⁾ が $Pr=0.1, 0.71, 2.0$ の範囲で行った DNS の計算結果を用いて、乱流プラントル数のプラントル数依存性に関して報告している。そのなかで、壁近傍における乱流プラントル数の値は、 $Pr=0.1, 0.71, 2.0$ の範囲において、プラントル数に依存性しないことを報告している。

さらに近年においては、高プラントル数に対する

DNS や Lagrangian 法を用いた数値シミュレーションも行われてきている⁽²⁾⁽⁶⁾。しかし著者らの知る限り、 $Pr=10.0$ において、スカラの最小スケールであるパチェラスケールをとらえ得る平行平板間乱流熱伝達の DNS の例はない。温度変動のこう配や温度散逸の輸送方程式、速度散逸-温度散逸-小領域におけるエネルギースペクトルの正確な分布を得るためには、高プラントル数においてもパチェラスケールを解像できる空間解像度は必要である。

本研究では、プラントル数の違いに対する影響を調べるために、一様熱流束加熱条件を課した平行平板間乱流熱伝達の DNS を行った。空間解像度をプラントル数 $Pr=10.0$ のパチェラスケール以下にとり、各プラントル数 ($Pr=0.71, 1.0, 2.0, 10.0$)、 $Re_\tau=180$ で計算を行った。得られた各種統計量から乱流プラントル数や変動こう配のひずみ度などのプラントル数依存性を示す。また、各プラントル数に対して一次元エネルギースペクトルのスケールリングを報告する。

2. 記 号

c_p : 定圧比熱 J/(kg・K)

F : 偏平度

k_x : x 方向波数 m^{-1}

* 原稿受付 2006 年 4 月 5 日。

^{*1} 正員, 東京理科大学大学院理工学研究科 (〒278-8510 野田市山崎 2641)。

^{*2} 正員, 東京理科大学理工学部。

E-mail: a7598074@rs.noda.tus.ac.jp

- L : 計算領域の長さ m
 N : 分割数
 p : 圧力 N/m²
 Pr, Pr_t : 分子および乱流プラントル数
 q : 熱流束 W/m²
 $R_{\phi\phi}$: 相互相関係数 $= \overline{\phi\phi} / \phi_{rms}\phi_{rms}$
 Re_τ : レイノルズ数 $= u_\tau\delta/\nu$
 S : ひずみ度
 t : 時間 s
 t_η : コルモゴロフ時間 $= (\nu/\epsilon)^{1/2}$ s
 T : 瞬間温度 K
 T_τ : 壁面摩擦温度 $= q_w / \rho c_p u_\tau$ K
 u, v, w : x, y, z 方向瞬間速度成分 m/s
 u_τ : 壁面摩擦速度 $= (\tau_w/\rho)^{1/2}$ m/s
 x, y, z : 流れ方向, 壁面垂直方向, スパン方向座標 m
 δ : チャネル半幅 m
 δ_{ij} : クロネッカのデルタ
 ϵ : 乱流エネルギーの散逸 m²/s³
 ϵ_θ : 温度分散の散逸 K²/s
 η_u : コルモゴロフ長 $= (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ m
 η_θ : パチエーラ長 $= (\chi^2\nu/\epsilon)^{1/4}$ m
 θ : 温度偏差 K
 κ : 温度伝導率 m²/s
 ν : 動粘性係数 m²/s
 ρ : 密度 kg/m³
 τ : せん断応力 N/m²
 χ : 温度変動強度の散逸 $= \kappa \overline{(\partial\theta'/\partial x_i)^2}$ K²/s
 ( )': 変動値
 ( )*: δ による無次元数
 ( )⁺: u_τ, ν, T_τ による無次元数
 ( ) $\bar{}$: 時間平均, 空間平均値
 ( )_w: 壁面上の値

3. 計算手法

解析対象を, 図1に示す. 流れ場は, 非圧縮性のニュートン流体とし, 平均圧力こう配により駆動される十分に発達した平行平板間乱流である. 速度場の支配方程式は以下に示す連続の式, Navier-Stokes 方程式で与えられる.

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial x_i^+} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t^+} + u_j^+ \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j^+} = -\frac{\partial p^+}{\partial x_i^+} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i^+}{\partial x_j^{*2}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

各方程式において, $i=1\sim 3$ はそれぞれ, 流れ方向, 壁垂直方向, スパン方向を示す. 圧力に対して, 圧力偏

Fig.1 Configuration

差を導入した以下の変換式を用いる.

$$p^+ = p'^+ + \frac{d\bar{p}^+}{dx^*} x^*, \quad \left(-\frac{d\bar{p}^+}{dx^*} > 0 \right) \quad \dots\dots\dots (3)$$

壁面摩擦と圧力こう配の釣り合いにより, 壁面摩擦速度の定義を用いると $-d\bar{p}^+/dx^* = 1$ であるから, 式(2)は以下ようになる.

$$\frac{\partial u_i^+}{\partial t^+} + u_j^+ \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j^+} = -\frac{\partial p^+}{\partial x_i^+} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 u_i^+}{\partial x_j^{*2}} + \delta_{i1} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで, レイノルズ数 Re_τ は, 180 とした. 式(4)の右辺第3項は, 時間に依存しない平均圧力こう配で, 右辺第1項は平均圧力こう配からの変動分である. 壁面上では滑りなし条件とし, x, z 方向に周期境界条件を適用した.

加熱条件として, 一様熱流束加熱条件を課した. 壁面上での温度境界条件を零とするために, 温度偏差 $\theta (= T_w - T)$ を導入する. この場合, 統計的に平均化された温度は, 流れ方向に対して線形的に増加する. それゆえ, 瞬時の温度 $T^+(x^*, y^*, z^*)$ は以下のように変換される.

$$T^+(x^*, y^*, z^*) = \frac{d\langle \bar{T}_m^+ \rangle}{dx^*} x^* - \theta^+(x^*, y^*, z^*) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで, $\langle \bar{T}_m^+ \rangle$ は混合平均温度であり, 以下のように定義される.

$$\langle \bar{T}_m^+ \rangle = \int_0^1 \bar{u}_1^+ \bar{T}^+ dy^* / \int_0^1 \bar{u}_1^+ dy^* \quad \dots\dots\dots (6)$$

なお, 本計算対象では, 流れ方向の温度こう配は

$$\frac{d\langle \bar{T}_m^+ \rangle}{dx^*} = \frac{1}{\langle \bar{u}_1^+ \rangle} \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる. 上記の変換より, エネルギー方程式は, 以下のように表される.

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial t^+} + u_j^+ \frac{\partial \theta^+}{\partial x_j^+} = \frac{1}{Re_\tau \cdot Pr} \frac{\partial^2 \theta^+}{\partial x_j^{*2}} + \frac{u_1^+}{\langle \bar{u}_1^+ \rangle} \quad \dots\dots\dots (8)$$

上下壁面での, 温度場の境界条件を以下に示す.

$$\theta^+ = 0 \text{ at } y^* = 0 \text{ and } 2. \quad \dots\dots\dots (9)$$

このように, 本 DNS における一様熱流束とは, 瞬時における局所の熱流束は変動するが, 時間平均ならば

Table 1 Computational conditions

Thermal boundary condition	Re_τ	Pr	$L_x \times L_y \times L_z$	$N_x \times N_y \times N_z$	Δx^+	Δy^+	Δz^+
Uniform heat flux heating	180	0.71, 1.0, 2.0, 10.0	$6.48 \times 2.8 \times 3.28$	$1024 \times 480 \times 512$	1.1	0.05 ~ 1.0	1.1

に空間平均された熱流束は一定であることを意味している。 Pr は 0.71, 1.0, 2.0, 10.0 の 4 ケースを行った。本研究では、乱流拡散による熱輸送の基本的性質を調べるため、浮力の影響は考慮していない。

本研究における計算条件を表 1 に示す。空間的離散化には有限差分法を用い、対流項においては、解析的微分操作と数値的微分操作の整合性を満たしたコンシステントスキーム⁽⁷⁾を用いた。本計算手法は、スペクトル法との比較でよい一致が確認されている⁽⁸⁾。流れ方向とスパン方向には、四次精度中心差分を用い、壁垂直方向に、二次精度中心差分を用いた。統計には、時間平均と x - z 平面の空間平均を施している。

4. 結果および考察

4.1 最小スケールと空間解像度の関係 乱流の最小渦のスケールを表すコルモゴロフ長 η_u^+ とスカラー場の最小スケールを表すバチェラー長 $\eta_\theta^+ = \eta_u^+ \cdot Pr^{-1/2}$ を図 2 に示す。本計算でのコルモゴロフ長が、スペクトル法⁽⁹⁾で得られたコルモゴロフ長とよく一致することを確認している。粘性長さで無次元化された両スケールは、壁近傍 ($y^+ < 2.0$) においてほぼ一定値をとり、チャンネル中心に向かうにつれ増加する。また、プラントル数の増加に伴い、 η_θ^+ は減少する。壁近傍での η_u^+ は約 1.55 であり、 $Pr=10.0$ での η_θ^+ は約 0.5 である。壁垂直方向の空間解像度 Δy^+ の大きさは、壁近傍で 0.05、チャンネル中心で 1.0 である。したがって、流れ場と温度場の全ケースにおいて、壁垂直方向の空間解像度が、最小スケール以下であることを確認できる。

4.2 主要な統計量 平均温度分布を図 3(b) に示す。比較のため、Kadar に提唱された平行平板間乱流の経験式⁽¹⁰⁾の値も示す。すべての Pr において、本計算結果と経験式の値はよく一致し、その妥当性が確認できる。熱伝導が支配的な伝導底層(拡散層)における直線分布式は、 $\bar{\theta}^+ = Pr y^+$ として与えられる。壁近傍に限られるこの領域の厚さ δ_θ は Pr に依存する。粘性底層の厚さを $\delta_u (\approx 5\nu/u_\tau)$ とすると、

$$\delta_\theta \approx Pr^{-1/3} \delta_u \dots \dots \dots (10)$$

が得られる⁽¹¹⁾。ここで、横軸を δ_θ で規格化した $\bar{\theta}^+ / (Pr \cdot y^+)$ のグラフを図 3(a) に示す。よく知られてい

Fig. 2 Distributions of η_u and η_θ

Fig. 3 Mean temperature

るように、拡散層内 ($y/\delta_\theta \leq 1.0$) で、平均温度は、壁からの距離に対し、 Pr に比例していることがよく確認できる。

温度変動強度の分布を図 4(b) に示す。プラントル数 Pr の増加に伴い、壁近傍のピーク値は、著しく増加する。一方、チャンネル中心における温度変動の値は、 Pr の増加に対する増加量は少ない。チャンネル中心において、他の Pr に比べ $Pr=10.0$ の温度変動強度が大きい。これは、温度変動強度におけるエネルギー収支において、プラントル数の増加に伴い、壁近傍で生成されるエネルギーが大きくなるためである。さらに乱流拡散の働きにより、 $Pr=10.0$ では、壁近傍の多くのエネルギーがチャンネル中心まで輸送されるためである。横軸を δ_θ で規格化した $\theta'^+_{rms} / (Pr \cdot y^+)$ のグラフを図 4(a) に示す。低プラントル数以外において、拡散層内の温度変動 θ'^+_{rms} は、壁からの距離に対し Pr に比例する。本結果からも、 $\theta'^+_{rms} / (Pr \cdot y^+)$ の壁面漸近値

Fig. 4 Rms of temperature fluctuation

Fig. 5 Turbulent Prandtl numbers

は、すべての Pr で一定値(約 0.4)を示すことが確認できる。

4.3 乱流プラントル数 図 5 に乱流プラントル数 Pr_t を示す。乱流プラントル数は以下の式で表される。

$$Pr_t \equiv \frac{\overline{u'^+ v'^+}}{\overline{v'^+ \theta'^+}} \cdot \frac{d\bar{\theta}/dy^+}{d\bar{u}/dy^+} \dots\dots\dots (11)$$

プラントル数 $Pr=0.71, 1.0, 2.0$ の場合、 Pr_t は $y^+=45$ 付近で最大値(約 1.06)をとる。また、壁から $y^+=20$ の領域においては、一定値(約 1.03)を示す。他方、 $Pr=10.0$ の場合、壁から $y^+=0.4$ において、他の Pr よりも大きい一定値(約 1.5)を示す。この傾向は、Na ら⁽⁶⁾ の計算結果からも観察される(図 5)。

相互相関係数 $R_{v\theta}$ と Pr_t との関係は、式(11)より、

$$Pr_t \equiv \frac{R_{uv}}{R_{v\theta}} \frac{u'_{rms}}{d\bar{u}/dy} \frac{d\bar{\theta}/dy}{\theta'_{rms}} \dots\dots\dots (12)$$

と表せる。ここで、 R_{uv} 、 u'_{rms} 、 $d\bar{u}/dy$ は、 Pr に依存しない値である。図 3(a) で示したように、平均温度は拡散層内で Pr に比例する。同様に、 θ'_{rms} の値も拡散層内で Pr に比例する [図 4(a)]。したがって、 $(d\bar{\theta}/dy)/\theta'_{rms}$ は Pr に依存しない値である。そこで、式(12)より、乱流プラントル数 Pr_t に対する Pr の影

Fig. 6 Cross-correlations between v' and θ' Fig. 7 One-dimensional streamwise pre-multiplied energy spectra normalized by t_η , η_θ and χ at the channel centerline

響を調べるため、相互相関係数 $R_{v\theta}$ の分布を図 6 に示す。拡散層内において、 $R_{v\theta}$ は、壁に向かって相関が減少する。 $Pr=0.71, 1.0, 2.0$ の $R_{v\theta}$ と比較して、 $Pr=10.0$ の値は、 $y^+=4.0$ から大きく相関が減少している。これは、 Pr の増加により、速度変動よりも温度変動のスケールが小さくなったためである。したがって、 $Pr=10.0$ の場合、 v' と θ' の相関の著しい減少が、 Pr_t を増加させている。

4.4 One-dimensional energy spectrum チャネル中心におけるパチェラスケールで無次元化された流れ方向一次元エネルギースペクトル ($k_x^2 \phi_{\theta\theta}$) を図 7 に示す。パチェラスケールでの無次元化において、すべての Pr のエネルギースペクトルの分布は、よくスケールアップされていることがわかる。一般に、パチェラスケールは、高プラントル数流体 ($Pr \sim 1000$) での正規化に用いられる。本研究により、 $Pr=0.71 \sim 10.0$ の範囲でもパチェラスケールによる正規化で、よく整理されることがわかった。温度変動の最小スケールが特に小さい $Pr=10.0$ においても(図 2)、 $k_x^2 \phi_{\theta\theta}$ の分布は、他の Pr の分布と一致している。さらに高波数領域に注目するため、 $Pr=10.0$ 以外の

Fig. 8 Intensities of fluctuation derivatives

$k_x^2\phi_{\theta\theta}$ と $k_x^4\phi_{\theta\theta}$ の分布を図7に示す。 $k_x\eta_\theta \geq 1$ の高波数領域において、両エネルギースペクトルの分布は、すべてよく一致している。

十分な空間解像度がある場合、エネルギースペクトルの分布は、高波数帯で単調減衰する。一方、空間解像度が足りない場合、単調減衰からのずれが生じる。 $Pr=10.0$ 以外の $k_x^2\phi_{\theta\theta}$, $k_k^2\phi_{\theta\theta}$, $k_x^4\phi_{\theta\theta}$ の分布では、空間解像度の不足時に観察される単調減衰からのずれが存在しない。したがって、 $Pr=0.71\sim 2.0$ の範囲において、温度変動の散逸の輸送方程式における散逸項まで正確に把握できる空間解像度をもつことがわかる。 $Pr=10.0$ の $k_x^2\phi_{\theta\theta}$ の分布は、 $k_x\eta_\theta \geq 0.7$ の波数帯で、単調減衰からの小さなずれが観察される。ここでは示さないが、 $Pr=10.0$ の $k_x^2\phi_{\theta\theta}$ と $k_x^4\phi_{\theta\theta}$ の分布に関しては、空間解像度の不足のために単調減衰からの大きなずれが生じた。このため、以後、 $Pr=10.0$ の温度変動こう配 $(\partial\theta'/\partial x)$ の三乗以上の統計量に関しては、議論しない。

4.5 速度および温度変動のこう配に関する統計量

温度変動のこう配は、温度変動の散逸や温度場の構造⁽¹²⁾を理解するうえで重要な統計量である。特に、主流方向の温度変動こう配は、空間解像度に大きく依存する値である。そこで、 $k_x^2\phi_{\theta\theta}$ の分布において、単調減衰からの大きなずれが生じることのない、十分な空間解像度が必要である(図7)。温度変動こう配の強度分布 $(\partial\theta'/\partial x)_{rms}$ を図8に示す。また、速度場との比較のため速度変動こう配の $(\partial u'/\partial x)_{rms}$ 分布も示す。プラントル数が大きいくほど、 $(\partial\theta'/\partial x)_{rms}$ の値も大きくなるのがわかる。一般に、温度場に一樣熱流束加熱条件を課した場合、速度場の統計量と高い相似性を得られることがよく知られている。一方、速度と温度の変動こう配強度の分布は、 $Pr=1.0$ においても大きく異なる。速度の変動こう配強度と比べて、 $(\partial\theta'/\partial x)_{rms}$ の値はすべての Pr で大きな値を示す。

Fig. 9 Skewness factor of fluctuation derivatives

Fig. 10 Flatness factor of fluctuation derivatives

速度場とは異なり、温度場には高温と低温の変動が直接衝突する領域があり、変動のこう配が大きくなるからである⁽¹²⁾。

変動こう配のひずみ度 S を図9に示す。速度場の $|S|$ と比較して、すべての Pr の $|S|$ の値は大きい。温度場では速度場よりも、強い負の変動のこう配が、間欠的に生じていることがわかる⁽¹²⁾。チャネル中心では、 Pr の増加に伴い、 $|S|$ は、減少する傾向がある。他方、 $y^+=40\sim 120$ において、 $Pr=0.71$ の S の分布に、一定値 ($|S(\partial\theta'/\partial x)| \approx 2.5$) が観察される。さらに $Pr=0.71\sim 2.0$ の範囲内で、 $|S|$ の最大値は、 Pr の増加に伴い大きくなる。 $|S|$ が大きな値を示すこの領域では、より間欠的な変動のこう配が存在することがわかる。

変動こう配の偏平度 F を図10に示す。速度場の F と比較して、すべての Pr において、 F の値は大きい。 Pr の増加に伴い、 $y^+=20\sim 60$ の範囲で、 F の値は増加する。さらに、 $Pr=1.0$ と 2.0 では、この領域で最大値を取り、rms 値よりも大きい温度変動のこう配が、多く存在していることがわかる。

5. 結 言

本研究では、一樣熱流束加熱条件を課した平行平板

間乱流熱伝達の DNS を行った。空間解像度をプラントル数 $Pr=10.0$ のパチェラスケールと同程度にとり、各プラントル数 ($Pr=0.71, 1.0, 2.0, 10.0$), $Re_\tau=180$ で計算を行った。各種統計量を通して、以下の知見を得た。

(1) 平均温度と温度変動の強度を拡散層の厚さで規格化することにより、拡散層内における異なる Pr でのスケーリングを行った。

(2) プラントル数 $Pr=10.0$ における乱流プラントル数の壁面漸近値が他の Pr よりも高い値を表す理由を示した。

(3) パチェラスケールで正規化された流れ方向一次元エネルギースペクトルを示し、 $Pr=0.71\sim 10.0$ の範囲でも、よく整理されることを示した。

(4) 変動こう配の強度の Pr の依存性と、速度場と温度場の非相似性を示した。

(5) 変動こう配のひずみ度、偏平度から、速度場と温度場の変動こう配の違いを示した。また、温度変動こう配のひずみ度の最大値に、特徴的な Pr の依存性が存在することを示した。

本研究を遂行するにあたり、Newcastle 大学 R. A. Antonia 教授ならびに宇宙航空研究開発機構 阿部浩幸研究員に助言をいただいた。また、本研究の計算の一部は、東北大学情報シナジーセンター大規模科学計算システムを利用して得られた。ここに付記して、謝意を表する。

文 献

- (1) Kim, J. and Moin, P., Transport of passive scalars in a turbulent channel flow, In: Andre, J.-C. et al., eds., *Turbulent shear flows*, Vol. 6 (1989), pp. 85-96, Springer, Berlin.
- (2) Papavassiliou, D. V., Scalar dispersion from an instantaneous line source at the wall of a turbulent channel flow for medium and high Prandtl number fluids, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 23 (2002), pp. 161-172.
- (3) Abe, H. et al., Reynolds- and Prandtl-Number Effects on Turbulence Quantities through DNS of Turbulent Heat Transfer in a Channel Flow up to $Re_\tau=640$, *Fourth International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer* (Hanjalić, K. et al. eds.), (2003), pp. 393-400.
- (4) Kawamura, H. et al., DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid, *J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 19 (1998), pp. 482-491.
- (5) Antonia, R. A. and Kim, J., Reynolds shear stress and heat flux calculations in a fully developed turbulent duct flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, No. 8 (1991), pp. 2013-2018.
- (6) Na, Y. and Hanratty, T. J., Limiting behavior of turbulent scalar transport close to a wall, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 43 (2000), pp. 1749-1758.
- (7) Kawamura, H., Direct numerical simulation of turbulence by finite difference scheme, In: Zhang, Z. S. and Miyake, Y. eds., *The Recent Developments in Turbulence Research*, (1994), pp. 54-60, International Academic Publishers.
- (8) Kawamura, H. and Kondoh, Y., Application of consistent finite difference scheme to DNS of turbulent heat transfer in channel flow, *Proc. 3rd KSME/JSME Therm. Eng. Conf., Kyongju, Korea*, Vol. 1 (1996), pp. 53-58.
- (9) Moser, R. D. et al., Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau=590$, *Physics of Fluids*, Vol. 11, No. 4 (1999), pp. 943-945.
- (10) Kader, B. A., Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 24, No. 9 (1981), pp. 1541-1544.
- (11) Calmet, I. and Magnaudet, J., Large-eddy simulation of high-Schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow, *Phys. Fluids*, Vol. 9, No. 2 (1997), pp. 438-455.
- (12) Warhaft, Z., Passive scalars in turbulent flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 32 (2000), pp. 203-240.