管路の圧力損失係数に関する巨視的評価* (第2報, エルボの損失係数)

板 橋 明 吉^{*1}

Macroscopic Analysis of Pressure Loss Coefficient in Pipes and Ducts (2nd Report, Loss Coefficient of Miter Bends)

Akiyoshi ITABASHI^{*2}

^{*2} Technical Department, Miura Protec Co., Ltd.,
7 Horie-cho, Matsuyama-shi, Ehime, 799-2696 Japan

For the famous formulas of pipes and ducts, for example, Weisbach's formulas of the pressure loss coefficients in entrance flush with wall at arbitrary angle, abrupt contraction, miter bend, and so on, it is still not clear whether some of these formulas could be derived from a simple flow model or not. In this paper, analysis was conducted by using linear momentum theorem for these equations from the macroscopic point of view. It was found that these formulas could be derived as modified equations of the equations obtained by using the momentum theorem. In the second report, the pressure loss coefficient of miter bends (elbows) and the effect of inner rounded corner (r/D) were examined.

Key Words: Internal Flow, Pipe Flow, Linear Momentum, Pressure Loss Coefficient, Contraction Coefficient, Abrupt Contraction, Miter Bend, Elbow, Rounded Entrance

1. は じ め に

Weisbach の入口損失やベンド・エルボ等の損失係数に関する実験式⁽¹⁾⁽²⁾をはじめとして、現在でも多くのテキストや文献に引用されている実験式や整理式がある。

しかし、これらの式がただ単に偶然合うだけなのか、それとも明確な流れモデルに基づいて導けるものなのか不明なままとなっているものがある。

現在までに、各管路形状に対して縦横比に代表される寸法比やレイノルズ数、表面粗さ等種々のパラメータの影響を含めた詳細な研究が行われてデータが整備されており、それらはテキストや技術資料、便覧等にまとめられて実用に供されている^{(3)~(13)}。

これらの資料を活用するに際して、技術者には、例えば船用ボイラや排ガスボイラの内部または接続ダクト内の圧力損失を許容値以下に抑えるために、最も圧損低減に効く部分を見つけ出して改善を加え、仕様を満足させることが要求される。そのため、厳密な実験データやそれらの整理式と同時に、現象に対する考え

方に重点を置いた評価方法が必要となる場合も多い。

また、数値解析手段を用いることによって、各機器の性能に対する各部の影響度合いを計算によって求めることが容易になる一方で、計算結果を正しく評価する能力もますます必要になってきている。

ここでは後者に重点を置き、古くから用いられているこれらの損失係数に関して、妹尾の著書⁽¹⁴⁾に詳述されている運動量理論を用いた巨視的な解釈を試みている⁽¹⁵⁾。第2報では、エルボの損失係数に対する評価結果について報告する。

2. お も な 記 号

A : 断面積 m^2
 b : 係数
 C : 係数
 c : 係数
 D : 流路高さ m
 e : 係数
 h : 流路の幅(紙面に垂直方向) m
 n : 整数 (1, 2, 3, ...)
 p : 圧力 Pa
 r : 丸み半径 m
 v : 速度 m/s

* 原稿受付 2006年7月12日。

^{*1} 正員, (株)三浦プロテック(☎799-2696 松山市堀江町7)。

E-mail: itabashi_akiyoshi@miuraz.co.jp

α : 縮流係数

β : 係数

δ : 係数

ε : 係数

ζ : 損失係数

θ : 角度 rad または $^{\circ}$

ρ : 密度 kg/m^3

ϕ : 角度 rad

添 字

r : 速度ベクトルの差を表す [式(1)]

0, 1: 上流側

2: 縮流部

3: 出口側

3. エルボの損失係数 ζ

エルボの損失係数に関する整理式は複数提案されている。ここでは出入口の断面積が等しい場合に対して、以下に示す式について考察する。

・Zeuner の式(1)⁽⁴⁾ は、エルボの入口と出口の速度をそれぞれ v_1 と v_3 、接続角度を θ とすると、速度ベクトルの差の速度 v_r に基づく動圧が損失になるとするものであり、流れモデルは明確である。

$$\zeta = \frac{\rho v_r^2}{2} \bigg/ \frac{\rho v_3^2}{2} = \frac{v_1^2 + v_3^2 - 2v_1 v_3 \cos \theta}{v_3^2}$$

$$= 2 - 2 \cos \theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

この式は、 $\theta = \pi/2$ のときに $\zeta = 2$ となって実際よりも大きな値を与える。

・Weisbach の式⁽¹⁾:

$$\zeta = 0.9457 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2.047 \sin^4 \frac{\theta}{2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

・Bambach の式⁽¹⁶⁾:

$$\zeta = C \sin^2 \frac{\theta}{4} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $C = 8.8^{(3)} \sim 9.5^{(11)} \sim 10^{(17)}$

・Gibson の式⁽¹⁸⁾:

$$\zeta = 0.4416 \theta^{2.17} \quad \dots\dots\dots (4)$$

・Matthew の式⁽¹⁹⁾:

$$\zeta = \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\cos \theta} \right)^2 = \frac{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \theta} \quad \dots\dots\dots (5)$$

・妹尾の式⁽¹⁴⁾ ($\theta = \pi/2$):

$$\zeta = (2 - \beta) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\beta = 0 \sim 1$

3・1 扇形流れモデルによるエルボの損失係数の解析

エルボの損失係数 ζ を扇形流れモデルで解析すると、狭まり通路の場合と同じように ζ は次式で与

えられる⁽¹⁵⁾。 α は縮流係数である。

$$\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 = 1 - \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(7)の右辺第2項を級数展開して整理すると、

$$\zeta = \frac{\theta^2}{3} - \frac{2\theta^4}{45} + \frac{\theta^6}{315} - \dots \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。Gibson の式(4)は、式(8)右辺第1項めの係数と指数を実験結果に合わせて修正したものと見ることができ。

3・2 対称2くさび形モデルによる解析 この場合の損失係数 ζ も、狭まり通路と同じように次式で与えられる⁽¹⁵⁾。

$$\zeta = \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

Weisbach の式(2)は、この式に右辺第2項を追加した形になっている。その際に、扇形流れモデルで考察したように ζ は接続角度 θ の $2n$ 乗 ($n=1, 2, 3, \dots$) で近似されることから、修正方法の一つとして $C \sin^4 (\theta/2)$ の形の修正項を採用したと見ることができ。

ここまでの考察から、エルボの損失係数 ζ は接続角度 θ の $2n$ 乗または $C \sin^{2n} (\theta/b)$ を基本の形として表すことができる。このように考えることによって、複数の実験式を合理的に説明することができる。

Bambach の式(3)は、 $C \sin^2 (\theta/b)$ において $b=4$ とし、係数 C を調整したものと見ることができ。

3・3 式(5)の改良 3・2節までは、速度分布を仮定したモデルを用いて考察を進めてきた。この節では、壁面の圧力分布も考慮に入れた流れモデルを考える。

Matthew の式(5)は、図1においてコーナ部の圧力 p_1 を上流側圧力 p_0 と等しいとして導かれたものであるが、Zeuner の式(1)に修正係数 $1/(1+\sin \theta)$ を掛けた形になっている。 $\theta = \pi/2$ において $\zeta = 2$ であったものが $\zeta = 1$ となっており、やや小さいか、または実際に近い値を与える。

ここでは図1に示すように検査空間として abefgha をとり、コーナ部圧力 p_1 が上流側動圧の β 倍だけ高いとして、 $p_1 = p_0 + \beta(\rho v_0^2/2)$ として式(5)を改良した例を示す。

連続の式より、

$$v_0 D = v_2 D \sin \phi = v_2 \alpha D = v_3 D \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$v_3 = v_0, \quad v_2 = v_0/\alpha, \quad v_2 \sin \phi = v_0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

エネルギー式より、

$$p_0 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_0^2) = \frac{\rho}{2} v_2^2 \cos^2 \phi \quad \dots\dots\dots (12)$$

力の釣合いより、

Fig. 1 Two-dimensional flow model of a miter bend of deflection angle θ

$$p_0 D + \rho D v_0^2 = \left(p_0 + \beta \frac{\rho v_0^2}{2} \right) D (1 - \cos \theta)$$

$$+ p_2 D \cos \theta + \rho D v_0 v_2' \sin(\phi + \theta),$$

これを整理して,

$$(p_0 - p_2) \cos \theta = \frac{\rho v_0^2}{2} \times \left[-(2 - \beta)(1 - \cos \theta) + 2 \frac{v_2' \cos \phi}{v_0} \sin \theta \right] \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(12)と式(13)より,

$$\left(\frac{v_2' \cos \phi}{v_0} \right)^2 \cos \theta - 2 \left(\frac{v_2' \cos \phi}{v_0} \right) \sin \theta + (2 - \beta)(1 - \cos \theta) = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(14)を解いて,

$$\frac{v_2' \cos \phi}{v_0} = \frac{\sin \theta - \sqrt{\sin^2 \theta - (2 - \beta)(1 - \cos \theta) \cos \theta}}{\cos \theta} \quad \dots\dots\dots (15)$$

次に, 検査空間を bcdfb にとって力の釣合式を立てると,

$$p_2 D + \rho D v_0 v_2' \sin \phi = p_3 D + \rho D v_0^2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(11)と式(16)より,

$$p_2 = p_3 \quad \dots\dots\dots (17)$$

式(12), (15), (17)を用いると, 損失係数 ζ は,

$$\zeta = \frac{p_0 - p_3}{\rho v_0^2 / 2} = \left(\frac{v_2' \cos \phi}{v_0} \right)^2 = \left\{ \frac{\sin \theta - \sqrt{(1 - \cos \theta)[1 - (1 - \beta) \cos \theta]}}{\cos \theta} \right\}^2 \quad \dots\dots\dots (18)$$

$\beta = 0$ の場合には, 式(18)は式(5)と一致する. 縮流係数 α は,

Fig. 2 Comparison of ζ for miter bend ($\zeta \leq 1$ at $\theta = \pi/2$)

$$\alpha = \frac{\cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta - \sqrt{(1 - \cos \theta)[1 - (1 - \beta) \cos \theta]}} \quad \dots\dots\dots (19)$$

図2には, 式(18)において $\beta = 0.2$ とした場合と, ポテンシャル流れ解析⁽²⁰⁾による縮流後の拡大損失係数, 式(2)と式(5), 後述する式(26)において $\beta = 0.75$, $\varepsilon = 0.6$ とした場合の $\theta = \pi/2$ において ζ が1以下のものを示している.

90°エルボの損失係数 ζ は1より大きい場合が多いが, 流路高さ D に対して幅 h の広い流路ほど, 損失係数 ζ が小さくなることは実験的にも確認されている⁽¹⁰⁾.

文献(10)によれば, 縦横比 h/D が0.25, 1, 4, ∞ に対して $\zeta = 1.24, 1.15, 0.90, 0.79$ となっていて, 縦横比が大きくなると ζ がポテンシャル流れ解析による縮流後の拡大損失係数 ($\zeta = 0.80$) に近づくことが示されている. 文献(7)には, 90°ベンドについても同様に縦横比が大きいかほど損失係数 ζ は小さくなることが示されている.

以上のことから, ポテンシャル流れ解析による縮流後の拡大損失係数や式(5), (18)および式(2)は, 縦横比の大きい流路に対して適用することができると考えられる.

3.4 式(6)の改良 式(18)から求まる損失係数は, $\beta = 0$ であっても最大で $\zeta = 1$ である. しかし, 実際の損失係数は1以上の場合が多い. ここでは, より適用範囲の広い式を求めたものとして, 式(6)を90°以外の場合にも適用できるように改良した例を示す.

図3に示すように検査空間を $a'abcde'a'$ にとる.

面 $e'e$ と $a'a$ の間には, 下流側の影響を受けてすでに圧力差が生じており⁽²¹⁾, 断面 $a-e$ を通過する流れは $a-e$ 面には垂直に流入していない. そのため, 流入

Fig. 3 Two-dimensional flow model of a miter bend showing another control volume

する流れが下流側の影響を無視できる断面 $a'-e'$ まで検査面を移し、 $a'-a$ 間の長さを $D \times \delta$ で表す。

δ は接続角度 θ によって変わると考えられるので、 $\delta = \epsilon \times \theta / (\pi/2)$ と表す。

コーナ部の圧力 p_2' は、3・3 節と同じように上流側圧力 p_1 に比べて動圧の β 倍だけ高いとし、面 $e'-e$ と $a'-a$ 間に働く圧力差は次のようにモデル化する。

面 $e'-e$ の平均圧力は p_1 よりも高く、面 $a'-a$ の平均圧力は p_1 よりも低いことのほか、それぞれに圧力分布をもっている⁽²¹⁾。このような区間の圧力差を正確に見積もるのは困難である。ここでは、点 e' 、 a' の圧力を p_1 、点 e 、 a の圧力をそれぞれ $p_2' = p_1 + \beta \rho v_1^2 / 2$ 、 $p_1 - \beta \rho v_1^2 / 2$ とし、直線的に変化する圧力分布を仮定する。このとき、面 $e'-e$ と $a'-a$ 間に働く圧力差 Δp (面 $e'-e$ の平均圧力) - (面 $a'-a$ の平均圧力) $= [p_1 + (p_1 + \beta \rho v_1^2 / 2)] / 2 - [p_1 + (p_1 - \beta \rho v_1^2 / 2)] / 2 = \beta \rho v_1^2 / 2$ となるので、近似的に圧力 p_2' が $e'-d$ 間に作用するものとしてモデル化する。

連続の式より、

$$v_1 D = v_2 a D = v_3 D \quad (20)$$

$$v_3 = v_1, \quad v_2 = v_1 / \alpha \quad (21)$$

エネルギー式より、

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \quad (22)$$

力の釣合式より、

$$\begin{aligned} & p_1 D (\cos \theta - \delta \sin \theta) + \rho D v_1^2 \cos \theta \\ & + \left(p_1 + \beta \frac{\rho v_1^2}{2} \right) D (1 - \cos \theta + \delta \sin \theta) \\ & = p_2 D + \rho D v_1^2 / \alpha \quad (23) \end{aligned}$$

これを整理して、

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} \times [2 / \alpha - 2 \cos \theta$$

 Fig. 4 Comparison of ζ for miter bend ($\zeta \geq 1$ at $\theta = \pi/2$)

$$- \beta (1 - \cos \theta + \delta \sin \theta)] \quad (24)$$

式(22)と式(24)より、

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} - 1 + 2 \cos \theta + \beta (1 - \cos \theta + \delta \sin \theta) = 0.$$

これを $1/\alpha$ について解けば、

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \sqrt{2(2 - \beta) \sin^2 \frac{\theta}{2} - \beta \delta \sin \theta} \quad (25)$$

$$\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2 = 2(2 - \beta) \sin^2 \frac{\theta}{2} - \beta \delta \sin \theta \quad (26)$$

となる。 $\beta = 0.75$ 、 $\delta = 0$ であれば、 $\zeta = 2.5 \sin^2(\theta/2)$ となって Zeuner の式(1)の係数を変更した場合に相当している。

式(26)において、 $\theta = \pi/2$ のときに $\beta = 0.75$ で $\delta = 0$ とすれば $\zeta = 1.25$ 、 $\epsilon = 0.6$ とすれば $\zeta = 0.8$ であり (図2)、 ζ が1を超える場合のほか、ポテンシャル流れ解析による縮流後の拡大損失係数 ($\zeta = 0.80$) にも合う結果が得られる。

図4には、 $\theta = \pi/2$ における ζ が1以上の場合の整理式と実験データ⁽²²⁾を示している。

3・5 内側コーナ部の丸みが損失係数に与える影響

管路入口部の場合⁽¹⁵⁾と同じように、エルボの内側コーナ部の丸みが損失係数に与える影響度合いについて調べる。エルボの場合には、壁面の圧力分布を考慮しなければならない可能性もあるが、ここでは単純なモデルで評価を行い、必要に応じて結果を修正する。

図5に示すように 90° エルボに対する二次元の流れモデルを考える。検査空間として $abcd$ をとり、流れは角度 ϕ (点 a) の位置ではく離するとする。

連続の式より、

$$v_1 D = v_2 a D = v_2' \frac{D + r(1 - \cos \phi)}{\cos \phi} \quad (27)$$

$$v_2 = \frac{v_1}{\alpha}, \quad v_2' = \frac{D \cos \phi}{D + r(1 - \cos \phi)} v_1 \quad (28)$$

Fig. 5 Two-dimensional flow model of a 90° miter bend for the effect of inner rounded corner (r/D)

Fig. 6 Effect of inner rounded corner (r/D) for ζ of 90° miter bend

エネルギー式より,

$$p'_2 - p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} - \left[\frac{D \cos \phi}{D + r(1 - \cos \phi)} \right]^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

力の釣合い式より,

$$(p'_2 - p_2)[D + r(1 - \cos \phi)] = \frac{\rho v_1^2 D}{2} \times \left[\frac{2}{\alpha} - \frac{2D \cos^2 \phi}{D + r(1 - \cos \phi)} \right] \quad \dots\dots\dots (30)$$

式(29), (30)より,

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} \frac{D}{D + r(1 - \cos \phi)} + \left[\frac{D \cos \phi}{D + r(1 - \cos \phi)} \right]^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1 + \sin \phi}{1 + (1 - \cos \phi)r/D} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$\zeta = \left[\frac{1 + \sin \phi}{1 + (1 - \cos \phi)r/D} - 1 \right]^2 \quad \dots\dots\dots (33)$$

式(33)は、損失係数 ζ に対する丸み半径比 r/D の影響度合いを表す式の一つの形と考えられる。

式の見通しをよくするために、 $\phi = \pi/4$ とおき、その影響を他の係数で調整する方法をとる。

$$\zeta = 1 - \frac{1 + 2r/D}{[\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)r/D]^2} \quad \dots\dots\dots (34)$$

一例として、文献(23)のデータに対して係数を調整すると、式(35)が得られる(図6)。

$$\zeta = 1.09 - \left(\frac{2\sqrt{r/D}}{1 + 1.52r/D} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (35)$$

式(35)は、急縮小管に対する入口丸み r/D の影響を示す式⁽¹⁵⁾を参照して、式(34)を式(35)'と置き直して係数調整を行ったと考えればよい。ここで x_i は係数である。

$$\zeta = x_1 - \left(\frac{x_2 + x_3\sqrt{r/D}}{x_4 + x_5r/D} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (35)'$$

係数調整を行うに当たって、 x_2 と x_4 はそれぞれ $x_2 = 0$, $x_4 = 1$ とおいて十分なようである。 $r/D = 0$ のときの ζ を x_1 の初期値として、次に r/D にかかる係数 x_3 , x_5 の調整を行う。そして x_1 を多少変更した場合の傾向を見ながら全体の微調整を行っている。

$r/D = 0$ 付近を含めて係数調整を行うと、全体的な一致度がよくない傾向にあったため、適用範囲を $0.05 \leq r/D \leq 0.5$ として式(35)を得ている。

$r/D = 0$ 付近は、本モデルの適用範囲を超えている可能性があること、そして実験者によって ζ に与える r/D の影響度合いには差が見られる⁽⁷⁾⁽⁹⁾ことから、本モデルの適用範囲ならびに寸法比やレイノルズ数の影響等については、より多くの系統的な実験データとの比較による検討が必要であると考えている。

式(35)は、 $r/D = 0$ 付近を除いてコーナ部の丸みが損失係数に与える影響度合いをよく表している。

文献(24), (25)には、分岐・合流管の場合に対して $\zeta = b - c(r/D)^{0.5} + e \times r/D$ という整理式が用いられている。全体的な一致度を考慮して、適用範囲を $0.05 \leq r/D \leq 0.5$ として同様に係数調整を行うと、式(36)が得られる(図6)。

$$\zeta = 1.37 - 2.3\sqrt{r/D} + 1.4r/D \quad \dots\dots\dots (36)$$

4. 結 論

古くから用いられている管路の損失係数 ζ や縮流係数 α に対して、運動量理論による評価を行った。その結果、それらの実験式や整理式は、明快な流れモデルによる巨視的な評価から求められた式を修正した形になっていると見ることができ示した。

このような観点から圧力損失を評価していけば、各形状に対する損失係数をより合理的に整理することができる。おもな結論は、以下のとおりである。

(1) エルボの損失係数 ζ は、接続角度 θ の $2n$ 乗または $C \sin^{2n}(\theta/b)$ を基本の形として表すことができる。このように考えることによって、複数の実験式を合理的に説明することができる。

(2) エルボの損失係数に対して、ポテンシャル流れ解析による縮流後の拡大損失係数($\zeta \approx 0.80$)と、実際の損失係数までを表せる式を導いた。

(3) エルボの内側コーナ部の丸みが損失係数に与える影響度合いを示す式を導いた。その式は、実験結果をよく表している。

最後に、本論文作成に対してご指導いただいた妹尾泰利九州大学名誉教授と、本原稿をまとめるに当たってご配慮いただいた(株)三浦プロテック 西山恵社長ならびに茅原敏広常務取締役様に心から感謝申し上げます。

文 献

- (1) Weisbach, J., *Experimental Hydraulics* (in German), (1855), p. 133, 149, Engelhardt, Freiberg.
- (2) Weisbach, J., *Fundamentals of Engineering and Machinery Mechanics* (in German), (1896), p. 1005, Friedrich Vieweg und Sohn.
- (3) Oki, I., *Hydraulics* (in Japanese), (1942), pp. 362-363, Iwanami Syoten.
- (4) Kamimoto, G., *Hydraulics I, II* (in Japanese), (1957), p. 155, Kyoritsu Syuppan.
- (5) Honma, M. and Aki, K., *Monobe Hydraulics* (in Japanese), (1962), Iwanami Syoten.
- (6) Richter, H., *Hydraulics of Pipes and Ducts* (in German) (5 Aufl.), (1971), Springer Verlag.
- (7) The Japan Society of Mechanical Engineers ed., *JSME Data Handbook, Hydraulic Losses in Pipes and Ducts* (in Japanese), (1979), p. 78, Maruzen.
- (8) The Japan Society of Mechanical Engineers ed., *JSME Mechanical Engineers' Handbook, Fundamentals, a4: Fluids Engineering* (in Japanese), (2006), Maruzen.
- (9) Blevins, R. D., *Applied Fluid Dynamics Handbook*, (1992), p. 64, Krieger Publishing Company.
- (10) Idelchik, I. E., *Handbook of Flow Resistance* (3rd Edition), (1994), p. 365, CRC Press.
- (11) The Japan Society of Fluid Mechanics ed., *Fluid Dynamics Handbook* (in Japanese) (2nd Edition), (1998), p. 425, Maruzen.
- (12) Ward-Smith, A. J., *Internal Fluid Flow*, (1980), Clarendon Press.
- (13) Miller, D. S., *Internal Flow Systems* (2nd Edition), (1990), BHRA.
- (14) Senoo, Y., *Mechanics of Internal Fluid Flow I* (in Japanese), (1995), pp. 24-118, Yokendo Ltd.
- (15) Itabashi, A., Macroscopic Analysis of Pressure Loss Coefficient in Pipes and Ducts (1st Report), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 73, No. 725 (2007), pp. 169-175.
- (16) Bambach, R., Abrupt Changes in Direction of Water Flow in Pipes and Ducts (in German), *Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, Heft 327 (1930), pp. 1-28.
- (17) Hayami, K., *Fluid Flow Transfer* (in Japanese), (1949), p. 79, Sangyo-Tosho.
- (18) Gibson, A. H., The loss of energy at oblique impact of two confined streams of water, *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, Vol. 48 (1913), pp. 799-811.
- (19) Matthew, G. D., Simple approximate treatments of certain incompressible duct flow problems involving separation, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 17, No. 2 (1975), pp. 57-64.
- (20) Ambrose, H. H., Head Loss in Miter Bends, *Free-Streamline Analysis of Transition Flow and Jet Deflection*, McNown, J. S. and Yih, C. S. eds., State University of Iowa Studies in Engineering, Bul. 35 (1953), pp. 73-82.
- (21) Sprenger, H., Pressure Head Losses in 90° Miter Bends for Tubes or Ducting of Rectangular Cross-section (in German), *Schweizerische Bauzeitung*, Bd. 87, Heft 13 (1969), pp. 223-231.
- (22) Schubart, W., The Energy Losses in Miter Bends with Smooth and Rough Walls (in German), *Mitteilungen des Hydraulischen Institutes der Technischen Hochschule München*, 3 (1929), pp. 121-144.
- (23) Albring, W., *Applied Fluid Mechanics* (in German) (6 Aufl.), (1988), p. 280, Akademie-Verlag.
- (24) Gardel, A., The Loss of Head in the Flow Through Tee Branches (in French), *Bulletin Technique de la Suisse Romande*, 83° année, Part 1: No. 9 (1957), pp. 123-130, Part 2: No. 10 (1957), pp. 143-148.
- (25) Ito, H. and Imai, K., Energy Losses at 90° Pipe Junctions, *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division*, Vol. 99 (1973), pp. 1353-1368.