高空げき率の異方性水平多孔質層内の自然対流発生臨界レイリー数*

椎 名 保 顕^{*1}, 菱 田 誠^{*2}

Critical Rayleigh Number of Natural Convection in an Anisotropic Horizontal Porous Layer with High Porosity

Yasuaki SHIINA^{*3} and Makoto HISHIDA

^{*3} Nuclear Applied Heat Technology Division, Japan Atomic Energy Agency,
4002 Oarai-machi, Higashi-Ibaraki-gun, Ibaraki, 311-1394 Japan

Linear stability analysis was applied to obtain the critical Rayleigh number Ra_c at the onset of natural convection for horizontal anisotropic porous fluid layers with vertical thin circular cylinders inserted by variational method with the consideration of non-Darcy viscous flow assumption. The permeability ratio of x -direction to z -direction is 0.5 and the effective thermal diffusivity ratio ξ of x -direction to z -direction for the anisotropic porous fluid layer is less than unity for any circular cylinders with high or low thermal conductivity. The analytical results show that Ra_c is the highest for the case of $\xi=1$ and decreases with the decrease in ξ . It decreases with the increase in Darcy number Da and asymptotically approaches to a constant value for $Da \rightarrow \infty$. The constant value of Ra_c for $Da \rightarrow \infty$ is the smallest to be 690.8 for $\xi \rightarrow 0$. The analytical results were compared with experimental results performed with silicon oil and plastic resin as a working fluid and circular cylinders respectively for $\xi=1$. The experiment agreed well with the analysis based on non-Darcy viscous flow assumption. The analysis showed that Darcy flow assumption is applied for small Da dependent on ξ .

Key Words: Critical Rayleigh Number, Natural Convection, Anisotropic Porous Layer, Horizontal Fluid Layer, Darcy Flow, Benard Convection, Effective Thermal Conductivity

1. ま え が き

多孔質層内の自然対流に関しては、繊維質断熱材中の自然対流等と関連して多くの研究が行われてきた。それらの多くは等方性多孔質層内の自然対流に関する研究であり、Hortonら⁽¹⁾やLapwood⁽²⁾はダルシー則に支配される流れに基づいた解析により下面加熱・上面冷却の水平多孔質流体層の自然対流発生臨界レイリー数を求めている。Kattoら⁽³⁾は、臨界レイリー数に表れる物性値として、熱伝導率は実効値を、密度と比熱は流体の物性値をとるべきことを示し、理論と実験の一致が良好であることを明らかにした。その後、物性値の温度依存性の影響についてHorneら⁽⁴⁾やGeorgiadisら⁽⁵⁾が、アスペクト比の影響をCaltagirone⁽⁶⁾が、自然対流の分岐についてRileyら⁽⁷⁾が報告している。これらの解析はダルシー則に基づくもので

あるが、ダルシー則が成立しない場合、すなわち流体の粘性が無視できない場合の臨界レイリー数はWalkerら⁽⁸⁾により求められ、ダルシー数 Da が小さい場合から ∞ の場合(レイリー・ベナル対流)まで臨界レイリー数が示された。

近年潜熱蓄熱の研究が盛んに行われ、Shiinaら⁽⁹⁾は、相変化物質(PCM)を多孔体金属中に含浸させて実効熱伝導率を高めると凝固時の伝熱促進に非常に有効であることを示した。しかし、融解時には多孔体金属により自然対流が抑制されると考えられるため、融解時の伝熱特性の把握には多孔体存在下での自然対流を調べる必要がある。潜熱蓄熱では蓄熱量を多くするために空げき率をできるだけ1に近づける必要があるが、そのためには、伝熱面に金属細線を張り実効熱伝導率を向上させることが最も効果的であると考えられる。その場合、細線が流れに及ぼす抗力および実効熱伝導率は座標方向により異なるため、球充てんの場合のように均質層とみなすことはできない。

このような異方性水平多孔質流体層中の自然対流に関してはCastinelら⁽¹⁰⁾およびEphere⁽¹¹⁾により浸透度あるいは浸透度と熱拡散率の異方性を考慮した解析

* 原稿受付 2007年2月5日。

^{*1} 正員、日本原子力研究開発機構(〒311-1394 茨城県東茨城郡大洗町4002)。

^{*2} 正員、フェロー、千葉大学工学部(〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町)。

E-mail: shiina.yasuaki@jaea.go.jp

が行われ、臨界レイリー数が求められた。また、Kvernold ら⁽¹²⁾ はこれに加えて熱伝達の解析を行った。また、繊維性多孔質層を用いた実験結果と解析結果の比較が行われている⁽¹⁰⁾。これらはいずれもダルシー流れに基づく解析である。前述のように潜熱蓄熱では空げき率を1に近くする必要があるが、その場合にはダルシー則の成立性に疑問が生じる。そこで、本研究では水平伝熱面に垂直に円柱細線を張った空げき率の高い水平多孔質層における自然対流発生臨界レイリー数を、流体の粘性抵抗を考慮して解析で求めるとともに、実験との比較を行った。

2. おもな記号

C : 比熱
 d : 円柱細線の直径
 Da : ダルシー数 $= K_1/h^2$
 $\mathcal{D}_{ef}$: 実効熱拡散率テンソル
 F_D : 円柱細線の抗力
 $f_1(\epsilon), f_2(\epsilon)$: 式(15), (16) 参照
 g : 重力の加速度
 h : 水平多孔質層の高さ
 k : 波数
 $K(K_x, K_y, K_z)$: x, y, z 方向の浸透度
 K_1, K_2 : $K_1 = K_x = K_y, K_2 = K_z$
 $\mathcal{K}$: 浸透度テンソル
 p, P, p_D : 圧力変動, 圧力, 抗力による圧力損失
 q, q_{cond} : 熱流束, 熱伝導で伝わる熱流束
 Ra, Ra_c : レイリー数, 臨界レイリー数
 T, T_0, T_1 : 温度, 下面温度, 上面温度
 $\Delta T = T_0 - T_1$
 $\mathbf{u}(u, v, w)$: 流速, かく乱流速
 U : 多孔質層中の平均速度
 ギリシャ文字
 $\alpha = (T_1 - T_0)/h$
 β : 熱膨張率
 ϵ : 空げき率
 θ : 温度変動
 $(\kappa_x)_{ef}, (\kappa_z)_{ef}$: x および z 方向実効熱拡散率
 λ_f, λ_c : 流体および円柱細線の熱伝導率
 λ_{ef} : 実効熱伝導率
 μ : 粘性係数
 ρ, ρ_0 : 密度, 参照密度
 $\sigma = \lambda_f/\lambda_c$
 $\xi = (\kappa_x)_{ef}/(\kappa_z)_{ef}$
 添字
 ef : 実効値

f : 流体

3. 線形安定性解析

3・1 解析 図1に水平伝熱面間に円柱細線を垂直かつ格子状に挿入した多孔質層の模式図を示す。 (x, y, z) 方向の速度および速度成分を $\mathbf{u}(u, v, w)$ とする。以下の仮定のもとに自然対流発生臨界レイリー数を求める。

- (1) Boussinesq 近似を仮定する。
- (2) 上下伝熱面温度は一定とする。
- (3) 円柱細線は xy 平面に均一に配置する。
- (4) 流体に作用する力として浮力, 粘性力および円柱細線による流動抵抗を考える。

格子状配列の円柱細線による流動抵抗は流速が小さい場合には流速に比例すると考えられることから、基礎方程式は以下のように表される。

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho D\mathbf{u}/Dt = -\rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \mu \mathcal{K}^{-1} \mathbf{u} \quad (2)$$

$$(\rho C)_{ef}/(\rho C)_f \cdot \partial T/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla T) = \nabla \cdot (\mathcal{D}_{ef} \nabla T) \quad (3)$$

境界条件

$$\begin{aligned} z=0, \quad T=T_0, \quad u=v=w=0 \\ z=h, \quad T=T_1, \quad u=v=w=0 \end{aligned} \quad (4)$$

上式で $\mathcal{K}$ は x, y, z 方向の浸透度 K_x, K_y, K_z を対角要素とするテンソルであり、 $\mathcal{K}^{-1}$ はその逆行列である。また $\mathcal{D}_{ef}$ は x, y, z 方向実効熱拡散率 $(\kappa_x)_{ef}, (\kappa_y)_{ef}, (\kappa_z)_{ef}$ を対角要素とするテンソルである。実効熱拡散率は Katto ら⁽³⁾ が示したように実効熱伝導率を流体の密度および比熱で除したものである。

初期熱伝導状態のとき次式が成り立つ。

$$T = T_0 + \alpha z \quad (5)$$

$$\rho/\rho_0 = 1 - \beta(T - T_0) \quad (6)$$

$$\partial P/\partial z = -\rho_0 g(1 - \beta \alpha z) \quad (7)$$

$$\mathbf{u}(u, v, w) = 0 \quad (8)$$

ここで $\alpha = (T_1 - T_0)/h$ である。熱伝導状態からの温度, 圧力, 速度かく乱をそれぞれ $\theta, p, \mathbf{u}(u, v, w)$ とすると、微小かく乱に関して以下の式が成り立つ。

Fig. 1 Physical coordinate of the analysis

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \cdots \cdots \cdots (9)$$

$$\rho \partial u / \partial t = -\partial p / \partial x + \mu \nabla^2 u - (\mu / K_x) u \cdots \cdots \cdots (10)$$

$$\rho \partial v / \partial t = -\partial p / \partial y + \mu \nabla^2 v - (\mu / K_y) v \cdots \cdots \cdots (11)$$

$$\rho \partial w / \partial t = \rho_0 \beta \theta g - \partial p / \partial z + \mu \nabla^2 w - (\mu / K_z) w \cdots \cdots \cdots (12)$$

$$(\rho C)_{\text{ef}} / (\rho C)_f \cdot \partial \theta / \partial t + \alpha w = \nabla \cdot (\mathcal{D}_{\text{ef}} \nabla \theta) \cdots \cdots \cdots (13)$$

対流発生直後の円柱細線列近傍流れに対してストークス近似が成立すると考えられる。ストークス近似に基づいて、円柱細線列中の1本の円柱細線の抗力は、以下のように求められている⁽¹³⁾。

$$F_D = 4\pi\mu\varepsilon U / f_i(\varepsilon) \quad (i=1, 2) \cdots \cdots \cdots (14)$$

ここで $i=1$ は直交流すなわち x, y 方向流れを、 $i=2$ は平行流すなわち z 方向流れを表す。また、 U は円柱がある場合の平均流速、 ε は空げき率である。

$f_1(\varepsilon), f_2(\varepsilon)$ は次式で与えられる⁽¹³⁾。

$$2f_1(\varepsilon) = \ln \frac{1}{1-\varepsilon} - 1.476336 + \frac{2(1-\varepsilon) - 0.795898(1-\varepsilon)^2}{1 + 0.48919(1-\varepsilon) - 1.604869(1-\varepsilon)^2} \cdots \cdots \cdots (15)$$

$$f_2(\varepsilon) = \ln \frac{1}{1-\varepsilon} - 1.476336 + 2(1-\varepsilon) - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^2 - \frac{0.05097(1-\varepsilon)^4}{1 + 1.5197(1-\varepsilon)^4} \cdots \cdots \cdots (16)$$

x 方向浸透度 K_x は、円柱抗力による圧力損失を p_D とすると、

$$\partial p_D / \partial x = \mu \varepsilon U / K_x \cdots \cdots \cdots (17)$$

から求められる。結局浸透度は以下ようになる。

$$K_x = K_y = K_1 = d^2 f_1(\varepsilon) / 16(1-\varepsilon) \cdots \cdots \cdots (18)$$

$$K_z = K_2 = d^2 f_2(\varepsilon) / 16(1-\varepsilon) \cdots \cdots \cdots (19)$$

ここで d は円柱直径であり、上式から、 $2K_1 = K_2$ となる。すなわち、本解析では浸透度比 $K_1/K_2 = 1/2$ の場合を扱う。浸透度と同様に、実効熱拡散率に関しても、 $(\kappa_x)_{\text{ef}} = (\kappa_y)_{\text{ef}}$ とおくことができる。長さ、温度、圧力および速度をそれぞれ以下の量で無次元化し、無次元化後も同じ記号を使う。

$$h, \Delta T, \mu(\kappa_z)_{\text{ef}} / K_1, (\kappa_z)_{\text{ef}} / h$$

中立安定条件は $\partial/\partial t = 0$ として求められる。結局、以下の基礎式が得られる。

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \cdots \cdots \cdots (20)$$

$$0 = -\partial p / \partial x + Da \nabla^2 u - u \cdots \cdots \cdots (21)$$

$$0 = -\partial p / \partial y + Da \nabla^2 v - v \cdots \cdots \cdots (22)$$

$$0 = Ra \cdot Da \cdot \theta - \partial p / \partial z + Da \nabla^2 w - w/2 \cdots \cdots \cdots (23)$$

$$\xi \cdot \nabla^2 \theta + \partial^2 \theta / \partial z^2 + w = 0 \cdots \cdots \cdots (24)$$

$$\text{境界条件} \quad z=0, 1 \text{ で } u=v=w=\theta=0 \cdots \cdots \cdots (25)$$

上式で $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ である。また $Da = K_1/h^2$, $Ra = -\rho_0 \alpha \beta g h^4 / \mu(\kappa_z)_{\text{ef}}$, $\xi = (\kappa_x)_{\text{ef}} / (\kappa_z)_{\text{ef}}$ である。式(20)～(23)から p を消去することにより次式が得られる。

$$Da \cdot \nabla^4 w - \frac{1}{2} \left(\nabla^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + Ra \cdot Da \nabla^2 \theta = 0 \cdots \cdots \cdots (26)$$

式(26)を式(24)に適用すると次式を得る。

$$\nabla^2 \theta + (\xi - 1) \nabla^2 \theta + w = 0 \cdots \cdots \cdots (27)$$

基礎式として式(26), (27)が得られ、境界条件として

$$z=0, 1: w=\theta=\partial w/\partial z=0 \cdots \cdots \cdots (28)$$

が与えられる。

ここで、

$$w = \cos lx \cdot \cos my \cdot W(z)$$

$$\theta = \cos lx \cdot \cos my \cdot \Theta(z)$$

$$\cdots \cdots \cdots (29)$$

として、式(26), (27)に代入すると W, Θ に関して次式が得られる。

$$\left[(D^2 - k^2) \left(D^2 - k^2 - \frac{1}{Da} \right) - \frac{k^2}{2Da} \right] W = Ra \cdot k^2 \Theta \cdots \cdots \cdots (30)$$

$$(D^2 - k^2 \xi) \Theta = -W \cdots \cdots \cdots (31)$$

$$\text{境界条件} \quad z=0, 1: W=DW=\Theta=0 \cdots \cdots \cdots (32)$$

となる。ここで $D = d/dz$, k は波数であり、

$$k^2 = l^2 + m^2 \cdots \cdots \cdots (33)$$

である。

固定境界を $z=0, 1$ から $z=\pm 1/2$ に変更しても式(30), (31)は変わらない。そこで、式(30), (31)を以下のように書き直す。

$$\left[(D^2 - k^2) \left(D^2 - k^2 - \frac{1}{Da} \right) - \frac{k^2}{2Da} \right] W = F \cdots \cdots \cdots (34)$$

$$(D^2 - k^2 \xi) F = -k^2 Ra W \cdots \cdots \cdots (35)$$

$$F = k^2 Ra \Theta$$

$$\text{境界条件} \quad z=\pm 1/2: W=DW=\Theta=0 \cdots \cdots \cdots (36)$$

式(34)～(36)を変分法で解く⁽¹⁴⁾。すなわち、この問題は

$$J = - \int_{-1/2}^{1/2} F(D^2 - k^2 \xi) F dz - k^2 Ra \int_{-1/2}^{1/2} W F dz \cdots \cdots \cdots (37)$$

を考えると、 J を最小にする固有値 Ra_c を求める変分問題となる。 F の試験関数として境界条件式(36)を満たすように

$$F = \sum_0^\infty A_m \cos[(2m+1)\pi z] \cdots \cdots \cdots (38)$$

を採用すると、 W を式(38)と同じ係数 A_m を用いて

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} A_m W_m \dots\dots\dots (39)$$

と表すことができる。 W_m は式(34)から、

$$\left[(D^2 - k^2) \left(D^2 - k^2 - \frac{1}{Da} \right) - \frac{k^2}{2Da} \right] W_m = \cos[(2m+1)\pi z] \dots\dots\dots (40)$$

として境界条件式(36)を用いて求められる。これにより求められた W_m を付録に示す。式(38)の係数を A_n と書き直して式(37)に代入し、積分を計算すると、次式が得られる。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} [(2m+1)^2 \pi^2 + k^2 \xi] - k^2 Ra \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \times A_n \cos[(2n+1)\pi] \sum_{m=0}^{\infty} [A_m W_m(z)] dz \dots\dots\dots (41)$$

式(41)から

$$\partial J / \partial A_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (42)$$

として零でない解を与える Ra と k の関係を求めることにより臨界レイリー数が求められる。式(42)の計算を行うことにより以下の式が求められる。

$$\det \left[\left\{ \frac{\alpha_{2m+1} + (\xi - 1)k^2}{k^2 Ra} - \frac{1}{\gamma_{2m+1}} \right\} \delta_{nm} + \frac{4(-1)^{n+m}(2m+1)(2n+1)\pi^2}{\beta_1 \tanh \frac{\beta_1}{2} - \beta_2 \tanh \frac{\beta_2}{2}} \cdot \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{\gamma_{2m+1} \cdot \gamma_{2n+1}} \right] = 0 \dots\dots\dots (43)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \gamma_{2i+1} &= \alpha_{2i+1}^2 + (\alpha_{2i+1} - k^2/2)/Da \\ \alpha_{2i+1} &= (2i+1)^2 + \pi^2 \\ \beta_1 &= k^2 + (1 + \sqrt{1 + 2k^2/Da})/2Da \\ \beta_2 &= k^2 + (1 - \sqrt{1 + 2k^2/Da})/2Da \end{aligned} \dots\dots\dots (44)$$

試験関数式(38)の n, m として大きい整数までとるほうが精度は向上するが、 $n=m=0$ の場合でも臨界レイリー数の厳密値ときわめて近い値が得られることが知られている⁽¹⁴⁾。そこで、本解析では $n=m=1$ を与えて臨界レイリー数を求める。この場合式(43)は2階行列の行列式となる。熱拡散率の比 ξ は多孔質層を構成する円柱細線の径、空げき率に依存する。

(1) $Da \rightarrow \infty, \xi \rightarrow 1$ の場合

空げき率 $\varepsilon \rightarrow 1$ かつ $\xi \rightarrow 1$ とし、 $Da \rightarrow \infty$ の場合を考える。この場合は式(43)を整理することにより次式が得られる。

$$\det \left[\left\{ \frac{\alpha_{2m+1}}{k^2 Ra} - \frac{1}{\alpha_{2m+1}^2} \right\} \delta_{nm} + \left\{ \frac{8(-1)^{n+m}(2m+1)(2n+1)}{\sinh k + k} \cdot \frac{2k}{\alpha_{2m+1}^2 \cdot \alpha_{2n+1}^2} \right\} \right] = 0 \dots\dots\dots (45)$$

Table 1 Critical Rayleigh number and critical wave number corresponding to ξ and K_1/h^2

$\xi=1$			$\xi=0.1$		
K_1/h^2	k	Ra_C	K_1/h^2	k	Ra_C
100	3.1163	1708.28	100	4.2326	831.37
10	3.1172	1711.39	10	4.2344	832.60
1	3.1263	1742.40	1	4.2523	844.91
0.1	3.2949	2049.34	0.1	4.4126	965.49
0.01	3.5322	4967.55	0.01	5.2219	2055.78
0.001	3.7642	32214.40	0.001	6.3295	11746.39
0.0001	3.7641	295631.40	0.0001	6.6453	105655.79
$\xi=0.01$			$\xi=0.001$		
K_1/h^2	k	Ra_C	K_1/h^2	k	Ra_C
100	4.6933	706.60	100	4.7651	692.53
10	4.6958	707.55	10	4.7676	693.45
1	4.7201	717.02	1	4.7932	702.58
0.1	4.9412	809.05	0.1	5.0267	791.21
0.01	6.2069	1601.71	0.01	6.4066	1545.94
0.001	9.0575	7942.14	0.001	10.1541	7335.96
0.0001	11.2856	66376.87	0.0001	16.0273	57504.69

Fig. 2 Configuration of a cylindrical rod in a unit space

これは円柱細線が挿入されない場合に対応する。上式はレイリー・ベナール対流の場合の表式⁽¹⁴⁾と一致する。

(2) $Da \rightarrow 0$ の場合

これはダルシー則が成立する場合に相当する。この場合式(43)左辺第2項は無視することができ、次式が得られる。

$$\frac{\alpha_{2m+1} + (\xi - 1)k^2}{k^2 Ra} - \frac{1}{\gamma_{2m+1}} = 0 \dots\dots\dots (46)$$

これから

$$Ra \cdot Da = \frac{[(2m+1)^2 \pi^2 + \xi k^2] \left[(2m+1)^2 \pi^2 + \frac{1}{2} k^2 \right]}{k^2} \dots\dots\dots (47)$$

が得られ、臨界レイリー数は、 $m=0$ の場合の最小値として求められる。結局、 $K_1/K_2=1/2$ の場合の臨界波数、臨界レイリー数が以下のように求められる。

Fig. 3 Plot of $(\kappa_x)_{ef}/(\kappa_z)_{ef}$ against λ_f/λ_c

$$k = \left(\frac{2}{\xi}\right)^{1/4} \pi \dots\dots\dots (48)$$

$$Rac \cdot Da = \frac{(\sqrt{2\xi} + 1)^2}{2} \pi^2 \dots\dots\dots (49)$$

球を充てんした場合には、多孔質層による流動抵抗および実効熱拡散率は座標方向に依存せず均質であり、 $k = \pi$ および式 (49) 右辺は $4\pi^2$ が得られる⁽²⁾。

表 1 に解析で得られた臨界レイリー数および波数を示す。

3.2 熱拡散率の比 ξ 円柱細線が伝熱面間に垂直に等間隔に挿入された場合の実効熱拡散率の比 ξ を求める。自然対流発生前の熱伝導のみで熱が伝わる場合を考え、熱の流れは一次元的であるとする。図 2 に円柱細線 1 本が挿入された単位空間および寸法等を示す。 ξ は実効熱伝導率の比と等しいので、それぞれの方向の実効熱伝導率を求めると以下のように求められる。 λ_f , λ_c はそれぞれ流体および円柱細線の熱伝導率であり、添字 f は流体を表す。

z 方向

$$\xi = \frac{\sigma \left[1 - 2\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\pi}} + \frac{1}{\sigma-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{1-b^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-b}{1+b}} \right) \right]}{1 + \varepsilon(\sigma-1)} \dots\dots\dots (53)$$

$\sigma=1$ の場合には $\xi=1$ となる。図 3 に $\sigma=\lambda_f/\lambda_c$ と ξ の関係を空げき率をパラメータとして示す。図 3 から、円柱細線として高熱伝導率の金属線を用いた場合 ($\sigma \ll 1$) には、 $(\lambda_z)_{ef} > (\lambda_x)_{ef}$, $(\lambda_y)_{ef}$ となるが、流体より低い熱伝導率の円柱細線を用いた場合にも同じ関係が成立するのがわかる。これは、低い熱伝導率の線 ($\sigma \geq 1$) が挿入された場合には、熱は細線ではなく主として流体側を流れるが、 z 方向の熱流が通過する xy 平面における流体部分の占有率のほうが、 x , y 方向の熱流が通過する yz 平面, xz 平面における流体部分の占有率より大きいためである。 $\varepsilon \rightarrow 1$ の場合には式 (53) 分子の $[\] \rightarrow 0$ となることから $\xi \rightarrow 1$ となることが確かめられる。

4. 実験装置および実験⁽¹⁵⁾

自然対流実験装置の模式図を図 4 に示す。装置はアクリル製直方体容器で、試験部は下面加熱上面冷却の縦×横×高さ = $100 \times 100 \times 10$ mm の水平流体層である。試験部の上下伝熱面は銅板で構成される。下部銅製伝熱面に

Table 2 Thermal properties of fluid and cylindrical rods

	ν mm ² /s	ρ kg/m ³	c_p J/gK	λ W/mK	β 1/K
Silicon oil	500	970	1.463	0.16	0.00094
Vinyl chloride	—	1420	0.72	0.16	—
Fluororesin	—	2140	0.96	0.252	—

Fig. 4 Schematic of experimental apparatus

$$(\lambda_z)_{ef} = \lambda_c(1-\varepsilon) + \varepsilon\lambda_f \dots\dots\dots (50)$$

x , y 方向

$$(\lambda_x)_{ef} = \lambda_f \left[1 - 2\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\pi}} + \frac{1}{\sigma-1} \times \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{1-b^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-b}{1+b}} \right) \right] \dots\dots\dots (51)$$

ここで、 $R/S = 2\sqrt{(1-\varepsilon)/\pi}$, $\sigma = \lambda_f/\lambda_c$

$$b = 2(\sigma-1)\sqrt{(1-\varepsilon)/\pi} \dots\dots\dots (52)$$

したがって ξ は以下になる。

 Fig. 5 Plot of heat flux against $Ra \cdot Da$ in the experiment

Fig. 6 Comparison of the analysis with the experiment

1.6 mmφの穴を $19 \times 19 = 361$ 個あけ、そこに円柱棒を垂直に挿入することにより多孔体層の空げき率を1から0.822まで変えた。伝熱面下面および上面は循環恒温槽により加熱および冷却した。伝熱面下部には熱流束計を挿入し、熱流束を測定した。実験では熱伝導状態から加熱量を増加させ、熱流束が急増した点を自然対流発生点と判断した。実験流体としてシリコン油を、円柱細線として外径1.5 mmφの塩化ビニル棒および塩化ビニル棒にかぶせて用いた外径2.5 mmφの中空ふっ素樹脂棒を用いた。それぞれの物性値を表2に示す。表2からわかるように、流体と塩化ビニルの熱伝導率はほとんど等しく、ふっ素樹脂の熱伝導率も流体の約1.6倍程度である。そのため、本実験の範囲では ξ の値はほぼ1であった。 ξ を変えるために金属円柱棒を用いなかった理由は、金属円柱棒を用いると実効熱伝導率が大幅に増加して熱伝導による伝熱量が大きくなるため、自然対流による伝熱量増加の割合が小さくなり、自然対流発生の検知が困難であったた

 Fig. 7 Plot of Rac against Da with ξ as a parameter

 Fig. 8 Plot of Rac against ξ with Da as a parameter

めである。

5. 結果と考察

ダルシー則に基づく臨界レイリー数の解析結果式(49)は、 $K_1/K_2 = 1/2$ の場合の Ephre⁽¹¹⁾ および Kvernfold⁽¹²⁾ の解析結果と一致する。図3に示されるように円柱細線を伝熱面間に垂直に挿入する場合には ξ はつねに1以下となるが、円柱細線として高熱伝導率の線を挿入するほうが ξ がより小さくなる。したがって、式(49)から円柱細線の熱伝導率が流体の熱伝導率より高いほど自然対流発生の臨界レイリー数は低くなる。

実験において加熱量を増加させた場合の熱流束の変化を Da をパラメータとして図5に示す。図5で横軸は $Ra \cdot Da$ を、縦軸は測定した熱流束を熱が伝導のみで伝わるとしたときの熱流束で規格化した熱流束比 q/q_{cond} を示す。縦軸はヌッセルト数 $Nu = hq/\lambda_{et}\Delta T$

Fig. 9 Plot of $Ra_c \cdot Da / (\sqrt{2\xi} + 1)^2$ against Da with ξ as a parameter

と等しい。図5から、自然対流が生じると熱流束が急速に増加するようすが示され、臨界レイリー数が求められる。

$\xi=1$ の場合の臨界レイリー数とダルシー数 Da の関係を図6に示す。図6で破線は式(49)を、実線は式(43)から得られた流体の粘性抵抗を考慮した場合の臨界レイリー数を、一点鎖線はレイリー・ベナール対流の臨界レイリー数1708を示す。また図6には実験結果を記号■で示す。実験と式(43)から得られた臨界レイリー数の一致は良好である。 Da が1に近くなると臨界レイリー数は空げき率が1の場合のレイリー・ベナール対流の値とほぼ一致する。表1には ξ および Da が小さくなると臨界波数が増加することが示されている。したがって、 ξ および Da の減少とともにセル対流の波長が短くなることがわかる。すなわちレイリー・ベナール対流と比較して、円柱細線が挿入された場合、横幅の狭いセル対流が形成される。また、 ξ が小さくなるほど横幅が狭くなる効果に及ぼす Da の影響は大きくなる。

臨界レイリー数と Da の関係を ξ をパラメータとして、また、臨界レイリー数と ξ の関係を Da をパラメータとしてそれぞれ図7および図8に示す。

図7から、 ξ が1より小さいと Ra_c は小さくなるが、 Ra_c と Da の関係は、 $\xi=1$ の場合と同様の傾向を示すことが示される。 ξ が零に近づくとき Ra_c の減少割合は小さくなる。 $\xi=0.01$ の Ra_c と $\xi=0.001$ の Ra_c の差は、 Da が小さい領域では比較的検知できるが、 Da が1より大きくなると両者はほとんど一致することがわかる。 $Da \rightarrow \infty$ で、 $\xi \rightarrow 0$ の場合の臨界レイリー数はおよそ690.8となる。

図8から、 Da が一定の場合の $\xi=1$ および $\xi \rightarrow 0$ に

おける Ra_c の差は Da が小さいほど大きいことがわかる。 $Da=1000$ の場合、 $(Ra_c)_{\xi=0.001} / (Ra_c)_{\xi=1} = 2.47$ であるのに対し、 $Da=10^{-3}$ の場合には、5.14であった。 $Da \rightarrow \infty$ は $\xi \rightarrow 1$ に対応すると考えられるので、3・2節に記述したように $\xi \rightarrow 1$ では $\xi \rightarrow 1$ となり、厳密には $Da \rightarrow \infty$ では $\xi \rightarrow 1$ が成立するはずである。したがって、 $Da \rightarrow \infty$ で、 $\xi \rightarrow 0$ は厳密には成立しないと考えられるが、 Ra_c は $Da \geq 1$ ではほぼ一定値を示すので、 $\xi \neq 1$ かつ $Da \rightarrow \infty$ の条件は近似的に実現される。

図9に $Ra_c \cdot Da / (\sqrt{2\xi} + 1)^2$ と Da の関係を示す。ダルシー則が成立する場合には式(49)から、 $Ra_c \cdot Da / (\sqrt{2\xi} + 1)^2 = \pi^2/2$ となるが、図9に示されるように同じ Da 数に対して ξ が小さいほど $Ra_c \cdot Da / (\sqrt{2\xi} + 1)^2$ と $\pi^2/2$ とのずれが大きくなることがわかる。したがって、ダルシー則が成立するのは $\xi \geq 1$ では $Da \leq 10^{-3}$ 、 $\xi \approx 0.001$ では $Da \leq 10^{-4}$ となる。

6. 結 論

上面冷却下面加熱の水平流体層内に円柱細線を垂直に挿入した異方性を有する水平多孔質層内 ($K_1/K_2 = 1/2$) の自然対流発生臨界レイリー数を、線形安定性理論により求め、実験と比較することにより以下の結論を得た。

(1) 流体の粘性抵抗が無視できない場合の自然対流発生の臨界レイリー数 Ra_c は、 $\xi=1$ の場合が最も高く、 ξ の減少とともに小さくなる。 ξ を与えた場合、ダルシー数 Da の増加とともに Ra_c は減少し、 $Da \geq 1$ ではほぼ一定値を示す。 $Da \geq 1$ の領域の Ra_c は $\xi \rightarrow 0$ の場合で最小値をとり、このとき $Ra_c \approx 690.8$ となる。また、 ξ および Da が小さくなるとセル対流の幅は小さくなる。

$\xi=1$ の場合の実験で得られた臨界レイリー数は、解析結果とよく一致することが示された。

(2) ダルシー則が成立する場合の自然対流発生臨界レイリー数は式(49)で与えられる。ダルシー則が成立するダルシー数領域は ξ に依存し、 ξ が1に近いほど早くダルシー則が成立する。ダルシー則が成立するのは $\xi \approx 1$ では $Da \leq 10^{-3}$ 、 $\xi \approx 0.001$ では $Da \leq 10^{-4}$ である。

(3) 円柱細線を伝熱面に垂直に挿入する場合には、円柱細線の熱伝導率の高低にかかわらず実効熱拡散率の比 ξ は1より小さくなる。そのため、円柱細線を伝熱面に張る場合には、臨界レイリー数は小さく

なる。

付 録

式(36)のもとに式(40)を解くと W_m は以下のよう
に求められる。

$$W_m = P_m \cosh \beta_1 z + Q_m \cosh \beta_2 z \\ + \frac{\cos[(2m+1)\pi z]}{\alpha^2 + \frac{\alpha}{Da} - \frac{k^2}{2Da}} \dots\dots\dots (54)$$

$$P_m = \frac{(-1)^m (2m+1) \pi / \cosh \frac{\beta_1}{2}}{\beta_1 \tanh \frac{\beta_1}{2} - \beta_2 \tanh \frac{\beta_2}{2}} \cdot \frac{1}{\gamma_{2m+1}} \dots\dots (55)$$

$$Q_m = \frac{(-1)^{m+1} (2m+1) \pi / \cosh \frac{\beta_2}{2}}{\beta_1 \tanh \frac{\beta_1}{2} - \beta_2 \tanh \frac{\beta_2}{2}} \cdot \frac{1}{\gamma_{2m+1}} \dots\dots (56)$$

ここで

$$\alpha_{2m+1} = (2m+1)^2 \pi^2 + k^2 \\ \gamma_{2m+1} = \alpha_{2m+1} + \frac{\alpha_{2m+1}}{Da} - \frac{k^2}{2Da} \dots\dots\dots (57)$$

である。

文 献

- (1) Horton, C. W. and Rogers, F. T., *Journal of Applied Physics*, Vol. 16 (1945), pp. 367-370.
- (2) Lapwood, E. R., *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 44 (1948), pp. 508-521.
- (3) Katto, Y. and Masuoka, T., *International Journal of the Heat Mass Transfer*, Vol. 10 (1967), pp. 297-309.
- (4) Horne, R. N. and O'Sullivan, M. J., *Transaction of the ASME, Journal of Heat Transfer*, Vol. 100 (1978), pp. 448-452.
- (5) Georgiadis, J. G. and Catton, J., *Transaction of the ASME, Journal of Heat Transfer*, Vol. 108 (1986), pp. 286-290.
- (6) Csltagiore, J. P., *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 72 (1975), pp. 269-287.
- (7) Riley, D. S. and Winters, K. H., *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 223 (1991), pp. 457-474.
- (8) Walker, K. and Homsy, G. M., *Transaction of the ASME, Journal of Heat Transfer*, Vol. 99 (1977), pp. 338-339.
- (9) Shiina, Y. and Inagaki, T., *International Journal of the Heat Mass Transfer*, Vol. 48 (2005), pp. 373-383.
- (10) Castinel, G. and Combarous, M., *International Chemical Engineering*, Vol. 17, No. 4 (1977), pp. 605-614.
- (11) Epherre, J. F., *International Chemical Engineering*, Vol. 17, No. 4 (1977), pp. 615-616.
- (12) Kvernold, O. and Tyvand, P. A., *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 90 (1979), pp. 609-624.
- (13) Drummond, J. E. and Tahir, M. I., *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 10 (1984), pp. 515-540.
- (14) Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, (1961), Oxford University Press.
- (15) Shiina, Y. et al., *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 73, No. 728 (2007), pp. 1045-1051 (in Japanese).