スカイダイビングにおける身体挙動の状態方程式導出と
根解析による安定性の検討*青山 絢 子^{*1}, 中 島 求^{*2}Investigation of Stability in Skydiving by Derivation of State Equation
for Body Behavior and Root AnalysisAyako AOYAMA and Motomu NAKASHIMA^{*3}^{*3} Department of Mechanical and Environmental Informatics, Graduate School of Tokyo Institute of Technology,
2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

The objective of this study was to investigate the stability during freefall in skydiving, in which the diver has to take various body position in order to control precisely their distance, velocity, and direction relative to the other divers for the group performance. For this objective, the state equation for a simple elliptic cylinder model was firstly derived, considering its equations of motion and the fluid force characteristics. Next, using the form of state equation derived for the elliptic cylinder and the input/output data obtained from the developed simulation method for the body behavior of the skydiver, the state equations of skydiver were identified for various body positions. Finally, roots of the state equations were obtained to investigate the stability. As the results, the causes of instability such as spin and spiral phenomena were clarified as an unstable natural modes, and the stable limit of body position was obtained as a value of parameter which is related to the arch magnitude of the diver's body.

Key Words: Bio-Fluid Mechanics, Stability, Bio-Motion, Aeronautical Engineering, Skydiving

1. 緒 言

スカイダイビングにおける定常落下状態, すなわちフリーフォールにおいては, ダイバーは姿勢 (身体各部の関節角) を変化させることにより身体に働く流体力を制御し, 落下方向・速度を制御している. 例えば肩関節を水平屈曲させると後方速度成分が発生し, 膝関節を伸展させると前方速度成分が発生することが経験的に知られている. これらはスカイダイビングにおいては maneuver と呼ばれており⁽¹⁾, 特にグループパフォーマンスにおいて周囲の人間との協調した動きを行うため, 熟練者は様々な maneuver を用いて相対的な位置や体の向きを高度に制御している. しかし姿勢の変化は同時に安定性の変化も引き起こす. もし, 安定性が失われスピンなどの不安定状態に陥れば, 他のダイバーへの衝突などの致命的事故につながりかねない.

著者らは前報⁽²⁾において, スカイダイビングにおける身体挙動シミュレーション手法を開発し, さらに最適化手法を組み合わせ, フリーフォール中に最も安定する姿勢, すなわち最安定姿勢を明らかにしてい

る. 本姿勢は角度外乱に対する復元モーメントを最大化するので, スピンなどの不安定状態から最も遠ざかる安全な姿勢ととらえることができる. また同時に, 本姿勢は不安定状態におちいった際に最も効率的に回復できる姿勢とも考えることができる.

しかし, 上述のように実際の状況ではダイバーは maneuver のために絶えず姿勢を変化させており, 常に最安定姿勢をとれるわけではない. すなわち実際には, 姿勢の変化によりどのような不安定性が発生し, またその不安定状態におちいらない限界はどこにあるのかを解明することが重要であると考えられる. しかしそのような研究はなされていない. またこのような目的のためには, スカイダイビングにおける maneuver 時のダイバーの身体挙動を系としてとらえ, 系の状態方程式を導出し解析的に考察するのが有効な手段であると考えられるが, スカイダイビングにおける身体挙動の状態方程式の導出自体行われた例はない.

以上の状況に鑑み, 本論文ではスカイダイビングのフリーフォールにおいて maneuver を伴うダイバーの身体挙動の状態方程式を導出し, 得られた状態方程式についての根解析を行うことにより, 不安定状態のメカニズムおよび安定限界を明らかにすることを目的とする. ここで状態方程式の導出については, 流体

* 原稿受付 2006 年 11 月 6 日.

^{*1} 東京工業大学大学院情報理工学研究所 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1).^{*2} 正員, 東京工業大学大学院情報理工学研究所.

E-mail: motomu@mei.titech.ac.jp

力による非線形性と姿勢変化により発生する幾何学的非線形性の影響が大きく現れるため、線形化して一つの方程式で表すことは困難である。そこで本研究ではまず、ダイバー身体と基本的には同様な力学的特性を持つと考えられ、かつ形状が非常に単純な1個の楕円柱を考え、この楕円柱についての運動方程式を導出する。次に航空機設計等でしばしば用いられる微小攪乱法による線形化を行い、制御入力や状態変数を決定し楕円柱についての状態方程式を導出する。そして導出した楕円柱の状態方程式を、ダイバー身体の状態方程式の雛形として利用することを考える。すなわち方程式の形はそのまま使い、方程式の行列要素の値を、著者らが前報にて開発した手法による身体挙動シミュレーションの入出力結果を用いて様々なダイバー姿勢について同定する。本シミュレーション手法においては、ダイバー身体は21個の楕円柱錐台の連なりとして表され、ダイバーのさまざまな姿勢変化を詳細に表現することが可能である。そして全ての姿勢についての状態方程式の根解析を行い、安定性と不安定根の特性を検討し、不安定状態のメカニズムおよび安定限界を明らかにする。

なお上記の流れにおいて、ダイバー身体を1個の楕円柱とみなすのはあくまで状態方程式の雛形導出のためだけであり、状態方程式の同定および根解析は、詳細なモデルを用いた身体挙動シミュレーションに基づくものであることに注意されたい。

2. 楕円柱の状態方程式の導出

本章ではまず楕円柱についての基礎式を導出し、微小攪乱による線形化を行い、状態方程式を導出する。

2.1 楕円柱およびダイバー身体の運動方程式

図1にダイバー身体および楕円柱それぞれの場合の座標系を示す。まず空間に固定された絶対座標系をO-XYZとする。そして図1(a)に示すダイバーの身体については、身体重心をGとし、ダイバーの矢状面に含まれ地面と平行な方向（航空機の場合における進行方向）にx軸をとり、鉛直方向にz軸、そしてxとzに直交する方向にy軸をそれぞれとり、座標系G-xyzを定める。なおG-xyzは航空力学では安定軸と呼ばれる。これは慣性乗積が0となるような慣性主軸系とは異なる座標系である。本座標系においては、ダイバーが左右対称姿勢を取っていれば $I_{xy} = I_{yz} = 0$ であるので、 I_{xy}, I_{yz} は主慣性モーメントに比べ十分小さいと考え、これ以降は無視する。また図1(b)に示すように、楕円柱の場合においてもダイバーと同様にG-xyzをとる。

この座標系において空中を落下する物体の運動方

Fig. 1 Coordinate system

程式は、物体の質量を m 、G-xyz における速度および角速度を $V_x, V_y, V_z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ 、物体に働く流体力の各軸成分を F_x, F_y, F_z としたとき、まず並進について次式となる。

$$m(\dot{V}_x + \Omega_y V_z - \Omega_z V_y) = F_x \quad (1)$$

$$m(\dot{V}_y + \Omega_z V_x - \Omega_x V_z) = F_y \quad (2)$$

$$m(\dot{V}_z + \Omega_x V_y - \Omega_y V_x) = F_z - mg \quad (3)$$

ここで記号の上の $\dot{\cdot}$ は時間微分を表す。また物体の慣性テンソルの各成分を I 、流体力による各軸まわりのモーメントを M_x, M_y, M_z とすると、回転運動については次式となる。

$$I_{xx}\dot{\Omega}_x - I_{xz}\dot{\Omega}_z + (I_{zz} - I_{yy})\Omega_z\Omega_y - I_{xz}\Omega_x\Omega_z = M_x \quad (4)$$

$$I_{yy}\dot{\Omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\Omega_z\Omega_x - I_{xz}(\Omega_x^2 - \Omega_z^2) = M_y \quad (5)$$

$$I_{zz}\dot{\Omega}_z - I_{xz}\dot{\Omega}_x + (I_{yy} - I_{xx})\Omega_x\Omega_y - I_{xz}\Omega_x\Omega_z = M_z \quad (6)$$

なお以上の運動方程式はダイバーの身体および楕円柱のいずれの場合も成立する。

2.2 楕円柱に働く流体力 楕円柱に働く流体力を解析的に導出する。そのため、前報⁽²⁾で著者らが開発した身体挙動シミュレーション手法と同様の流体力モデル化により流れは解かず求められる、すなわち楕円柱に働く流体力は接線・法線方向の局所速度の2乗に比例すると仮定する。ここで、図1(b)のように楕円柱の3本の慣性主軸（重心を通り、長手軸方向、断面の楕円の長径・短径方向）がG-xyzに一致している状態を基準状態とし、この基準状態から楕円柱が変位・変形するときの流体力を解析的に表すことを考える。なおこの楕円柱の変位・変形は、実際のスカイダイビングにおいてダイバーがmaneuverのために行う姿勢変化に対応するものである。

まずy軸まわりに楕円柱全体が Θ_y だけ回転した状

態を考える. このときの流体力の x 方向成分 F_x および z 方向成分 F_z は以下のように表される.

$$F_x = -\frac{1}{2}\rho|V_x|V_x(C_n A_{nx} \cos^3 \Theta_y + C_t A_{tx} \sin^3 \Theta_y) + \frac{1}{2}\rho|V_z|V_z(C_n A_{nz} \cos^2 \Theta_y \sin \Theta_y + C_t A_{tz} \sin^2 \Theta_y \cos \Theta_y) \quad (7)$$

$$F_z = -\frac{1}{2}\rho|V_x|V_x(C_n A_{nx} \cos^2 \Theta_y \sin \Theta_y + C_t A_{tx} \sin^2 \Theta_y \cos \Theta_y) + \frac{1}{2}\rho|V_z|V_z(C_n A_{nz} \cos^3 \Theta_y + C_t A_{tz} \sin^3 \Theta_y) \quad (8)$$

ここで C_n , C_t , A_{nq} , A_{tq} , ρ はそれぞれ, 法線・接線方向流体力係数, q に対しての法線方向断面積, 接線方向断面積, 空気密度である. また y 軸まわりのモーメント M_y は, 式 (7), (8) の力を局所力として考え, 局所力と重心からの距離の積を楕円柱長手軸に沿って積分したものであり, さらに接線方向流体力は絶対値が小さいと無視すると次式となる.

$$M_y = \frac{1}{2}\rho C_n |V_z|V_z \int_L (\cos^2 \Theta_y \sin \Theta_y \cdot z + \cos^3 \Theta_y \cdot x) dA_{nz} + \frac{1}{2}\rho C_n |V_x|V_x \int_L (\cos^3 \Theta_y \cdot x + \cos^2 \Theta_y \sin \Theta_y \cdot z) dA_{nx} \quad (9)$$

ここで $\int_L$ は楕円柱長手軸に沿った積分を表す. 例えば $\int_L z dA_{nz}$ は, 長手軸方向の微小長さに対応する微小断面積 dA_{nz} とその場所での z の積の長手軸方向積分を表す. また, $\int_L$ は楕円柱の短径軸に沿った積分を表す.

次に, 楕円柱全体が x 軸まわりに Θ_x だけ回転したときの流体力の y , z 方向成分 F_y , F_z は次式となる.

$$F_y = -\frac{1}{2}\rho|V_y|V_y(C_n A_{ny} \cos^3 \Theta_x + C_t A_{ty} \sin^3 \Theta_x) + \frac{1}{2}\rho|V_z|V_z(C_n A_{nz} \cos^2 \Theta_x \sin \Theta_x + C_t A_{tz} \sin^2 \Theta_x \cos \Theta_x) \quad (10)$$

$$F_z = -\frac{1}{2}\rho|V_y|V_y(C_n A_{ny} \cos^2 \Theta_x \sin \Theta_x + C_t A_{ty} \sin^2 \Theta_x \cos \Theta_x) + \frac{1}{2}\rho|V_z|V_z(C_n A_{nz} \cos^3 \Theta_x + C_t A_{tz} \sin^3 \Theta_x) \quad (11)$$

よって, Θ_y の場合と同様に接線方向流体力を無視す

れば, x 軸まわりのモーメント M_x は次式となる.

$$M_x = \frac{1}{2}\rho C_n |V_z|V_z \int_L (\cos^2 \Theta_x \sin \Theta_x \cdot z + \cos^3 \Theta_x \cdot y) dA_{nz} + \frac{1}{2}\rho C_n |V_y|V_y \int_L (\cos^3 \Theta_x \cdot y + \cos^2 \Theta_x \sin \Theta_x \cdot z) dA_{ny} \quad (12)$$

次に, この楕円柱が z 軸まわりに ψ の割合でねじれている, すなわち x 軸まわりの回転角 Θ_x が次式のように長手軸 x に沿って局所的に変化すると仮定する.

$$\Theta_x = \psi x + \Theta_{x0} \quad (13)$$

このとき z 軸まわりのモーメント M_z は式 (9), (12) の M_y や M_x と同様にして次式のように求められる.

$$M_z = \frac{1}{2}\rho|V_x|V_x C_n \int_L \cos^3 \Theta_y \cdot y dA_{nx} + \frac{1}{2}\rho|V_y|V_y C_n \int_L \cos^3 (\psi x + \Theta_{x0}) \cdot x dA_{ny} + \frac{1}{2}\rho|V_z|V_z C_n \int_L (\cos^2 (\psi x + \Theta_{x0}) \sin (\psi x + \Theta_{x0}) \cdot x + \cos^2 \Theta_y \sin \Theta_y \cdot y) dA_{nz} \quad (14)$$

2.3 流体力を代入した運動方程式 前節で導出した流体力を 6 自由度の運動方程式 (1)~(6) に代入すると次式を得る. ここで Ω_x , Ω_y , Ω_z 同士の積は微小と考え無視した.

$$m(\dot{V}_x + \Omega_y V_z - \Omega_z V_y) = -\frac{1}{2}\rho|V_x|V_x C_n A_{nx} \cos^3 \Theta_y - \frac{1}{2}\rho|V_z|V_z C_n A_{nz} \cos^2 \Theta_y \sin \Theta_y \quad (15)$$

$$m(\dot{V}_y + \Omega_z V_x - \Omega_x V_z) = -\frac{1}{2}\rho|V_y|V_y C_n A_{ny} \cos^3 \Theta_x - \frac{1}{2}\rho|V_z|V_z C_n A_{nz} \cos^2 \Theta_x \sin \Theta_x \quad (16)$$

$$m(\dot{V}_z + \Omega_y V_y - \Omega_x V_x) = -\frac{1}{2}\rho|V_z|V_z C_n A_{nz} \cos^3 \Theta_x \Theta_y + \frac{1}{2}\rho|V_y|V_y C_n A_{ny} \cos^2 \Theta_x \sin \Theta_x + \frac{1}{2}\rho|V_x|V_x C_n A_{nx} \cos^2 \Theta_y \sin \Theta_y - mg \quad (17)$$

$$I_{xx}\dot{\Omega}_x - I_{xz}\dot{\Omega}_z = \frac{1}{2}\rho C_n |V_z|V_z \int_L (\cos^2 \Theta_x \sin \Theta_x \cdot z + \cos^3 \Theta_x \cdot y) dA_{nz} + \frac{1}{2}\rho C_n |V_y|V_y \int_L (\cos^3 \Theta_x \cdot y + \cos^2 \Theta_x \sin \Theta_x \cdot z) dA_{ny} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
I_{yy} \dot{\Omega}_y &= \frac{1}{2} \rho C_n |V_z| V_z \int_L (\cos^2 \Theta_y \sin \Theta_y \cdot z \\
&+ \cos^3 \Theta_y \cdot x) dA_{nz} \\
&+ \frac{1}{2} \rho C_n |V_x| V_x \int_L (\cos^3 \Theta_y \cdot x \\
&+ \cos^2 \Theta_y \sin \Theta_y \cdot z) dA_{nx}
\end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
I_{zz} \dot{\Omega}_z - I_{xz} \dot{\Omega}_x &= \frac{1}{2} \rho |V_x| V_x C_n \int_L \cos^3 \Theta_y y dA_{nx} \\
&+ \frac{1}{2} \rho |V_y| V_y C_n \int_L \cos^3 (\psi x + \Theta_{x0}) x dA_{ny} \\
&+ \frac{1}{2} \rho |V_z| V_z C_n \int_L (\cos^2 (\psi x + \Theta_{x0}) \sin (\psi x + \Theta_{x0}) x \\
&+ \cos^2 \Theta_y \sin \Theta_y y) dA_{nz}
\end{aligned} \quad (20)$$

2.4 微小攪乱による線形化 式(15)~(20)に含まれる流体力やモーメントは、速度の2乗に比例し姿勢角の $\sin$ や $\cos$ を含む非線形項であるため、航空機の制御設計で一般的に用いられている微小攪乱法⁽³⁾を用いて線形化を行う。微小攪乱法とは、ある変数のノミナル値(基準値)を設定し、ノミナル値と微小攪乱量を用いてノミナル値近傍の線形方程式を導く方法である。そこで、楕円柱の挙動すなわちスカイダイビングにおける身体挙動が、釣り合い状態(定常落下状態)からの微小攪乱であると仮定し、速度、角速度、姿勢角、外力、およびモーメントを次のようにノミナル値と微小攪乱量とにわけて表す。

$$V = V_0 + v \quad (21)$$

$$\Omega = \Omega_0 + \omega \quad (22)$$

$$\Theta = \Theta_0 + \theta \quad (23)$$

$$F = F_0 + \Delta F \quad (24)$$

$$M = M_0 + \Delta M \quad (25)$$

これを式(15)~(20)に代入し、攪乱量および $\sin \theta$ の積を含む項を高次の微量として無視し、力およびモーメントのノミナル値を0とすると次式を得る。

$$m(\dot{v}_x + \omega_y V_{z0} - \omega_z V_{y0}) = \Delta F_x \quad (26)$$

$$m(\dot{v}_y + \omega_z V_{x0} - \omega_x V_{z0}) = \Delta F_y \quad (27)$$

$$m(\dot{v}_z + \omega_y V_{y0} - \omega_x V_{x0}) = \Delta F_z \quad (28)$$

$$I_{xx} \dot{\omega}_x - I_{xz} \dot{\omega}_z = \Delta M_x \quad (29)$$

$$I_{yy} \dot{\omega}_y = \Delta M_y \quad (30)$$

$$I_{zz} \dot{\omega}_z - I_{xz} \dot{\omega}_x = \Delta M_z \quad (31)$$

以上を用いて状態方程式を導出する。その際にまず力とモーメント項に関しては、式(15)~(20)に現れるすべての変数によってテーラー級数展開し、それぞれの第1項目のみを用いる。さらに、以下の3点を考慮して式導出を行う。

(1) スカイダイビングのmaneuverにおける状態方程式の状態変数としては、楕円柱(ダイバー身体)の速度、角度、および角速度、すなわち $v_x, v_y, v_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ の9個が妥当と考えられる。このうち、 θ_z すなわちヨー方向の向きについては、ヨー方向の向きが異なっても流体力は変化しないため不要と考えられる。よってそれ以外の8個を状態変数とする。さらにこの8個を $v_x, v_z, \theta_y, \omega_y$ の組と、 $v_y, \omega_z, \theta_x, \omega_x$ の組にわけ、それぞれ独立な2組の4次の状態方程式とすることを考える。なおこれらの前者および後者はそれぞれ、航空力学において縦系・横系と呼ばれており、本論文でもその呼称を用いる。

(2) スカイダイビングのmaneuverにおける状態方程式の制御入力としては、楕円柱の場合には変位・変形に依存する変数である $\Delta \int_L x dA_{nz}, \Delta \int_L y dA_{nz}, \Delta \int_L z dA_{nz}, \Delta A_{nz}, \psi$ の5個がテーラー展開により導出される。実際のスカイダイビングの場合には、これら5個の変数はダイバーの身体姿勢変化によって変化させられている。ただし、これらのうち $\int_L z dA_{nz}$ に関しては、式(7)~(14)の流体力・モーメントの式のうち、式(9)、(12)の M_y, M_x にしか現れていない。 y 軸および x 軸まわりの回転、すなわちピッチおよびロールについては、一定の角速度で回転し続けることは原理的に不可能であるため、それぞれの軸まわりの回転モーメント M_y, M_x を制御する必要はないと考えられる。よって $\int_L z dA_{nz}$ は制御入力から除き、残りの4個を制御入力とする。

(3) 横方向の力 ΔF_y およびロール・ヨー方向の回転モーメント $\Delta M_x, \Delta M_z$ は、楕円柱(もしくはダイバー身体)が左右対称である限り0である。よって変数 v_z (鉛直方向落下速度)および A_{nz} (鉛直方向断面積)が変化しても、これらの方向力およびモーメントは発生しない。すなわち F_y, M_x, M_z の v_z, A_{nz} に関する微係数は0となる。

以上を用いると、縦系と横系の状態方程式はそれぞれ、次式に示されるように干渉しあわない2組の系として得られる。

$$M_1 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_x \\ v_z \\ \theta_y \\ \omega_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial v_x} & \frac{\partial F_x}{\partial v_z} & \frac{\partial F_x}{\partial \theta_y} & \frac{\partial F_x}{\partial \omega_y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial v_x} & \frac{\partial F_z}{\partial v_z} & \frac{\partial F_z}{\partial \theta_y} & \frac{\partial F_z}{\partial \omega_y} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial M_y}{\partial v_x} & \frac{\partial M_y}{\partial v_z} & \frac{\partial M_y}{\partial \theta_y} & \frac{\partial M_y}{\partial \omega_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_z \\ \theta_y \\ \omega_y \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \int_L x dA_{nz}} & \frac{\partial F_x}{\partial A_{nz}} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \int_L x dA_{nz}} & \frac{\partial F_z}{\partial A_{nz}} \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial \int_L x dA_{nz}} & \frac{\partial M_y}{\partial A_{nz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \int_L x dA_{nz} \\ \Delta A_{nz} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$M_2 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_y \\ \omega_z \\ \theta_x \\ \omega_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_y}{\partial v_y} & \frac{\partial F_y}{\partial \omega_z} & \frac{\partial F_y}{\partial \theta_x} & \frac{\partial F_y}{\partial \omega_x} \\ \frac{\partial M_x}{\partial v_y} & \frac{\partial M_x}{\partial \omega_z} & \frac{\partial M_x}{\partial \theta_x} & \frac{\partial M_x}{\partial \omega_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial M_x}{\partial v_y} & \frac{\partial M_x}{\partial \omega_z} & \frac{\partial M_x}{\partial \theta_x} & \frac{\partial M_x}{\partial \omega_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ \omega_z \\ \theta_x \\ \omega_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_y}{\partial \int_L y dA_{nz}} & \frac{\partial F_y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial M_x}{\partial \int_L y dA_{nz}} & \frac{\partial M_x}{\partial \psi} \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial \int_L y dA_{nz}} & \frac{\partial M_x}{\partial \psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \int_L y dA_{nz} \\ \psi \end{bmatrix} \quad (33)$$

ここで M_1, M_2 は質量行列であり、次式で表される。

$$M_1 = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{yy} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{zz} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -I_{xz} & 0 & I_{xx} \end{bmatrix} \quad (35)$$

上記の方法により、人体が落下している際の状態方程式の雛形を求めることができた。

3. 様々な姿勢における状態方程式の同定

本章では、前章で導出した楕円柱の状態方程式を雛形として用い、様々な姿勢をとったダイバーの状態方程式を同定する。まず同定のために用いる、著者らが前報⁽²⁾にて開発した身体挙動シミュレーション手法概要について述べ、次に同定の具体的手順および同定結果について述べる。

3.1 身体挙動シミュレーション手法概要 本シミュレーション手法において人体は図2に示すように、長手方向に径が変化する21個の楕円錐台の連なりとして詳細に表現される。各楕円錐台はそれぞれ、頭部、頸部、肩口(胸部と頸部の間)、胸部(上、下)、腰部(上、下)、臀部(上、下)、上腕、前腕、手部、大腿部、下腿部、足部に対応する。各部の寸法は日本人の20歳代男女平均の値⁽⁴⁾を参考に決定した。そしてこのモデル化した人体に身体姿勢(関節角)を与えて落下させ、身体各部に働く流体力を計算し、1個の剛体としての身体全体の運動方程式についての時間積分を

Fig. 2 Modeled human body in simulation method

行う。

身体に働く流体力としては、楕円錐台の接線・法線方向それぞれについて速度の2乗に働く抗力を考慮する。法線・接線方向それぞれの抗力係数については、実際のダイバーによる落下速度測定実験結果と文献値を用い、これらの実測値とシミュレーションによる落下速度が一致するように決定された。その結果、法線方向抗力係数 $C_n = 0.92$ 、接線方向抗力係数 $C_t = 0.08$ を得た。以降のシミュレーションでもすべてこれらの値を用いている。

3.2 状態方程式の同定手順 まず、同定における身体の間節角の変化の範囲を表1に示す。すべての関節角について、 0° がスカイダイビングで最も一般的な Neutral Position⁽¹⁾の場合の角度に対応する。まず膝関節は屈曲(+)/伸展(-)を表す。肩関節は水平屈曲(-)/伸展(+)を表す。股関節は内転(-)/外転(+)を表す。肘関節は左屈曲・右伸展(-)/左伸展・右屈曲(+)を表す。同定にはMATLABのシステム同定機能を用い、表2に示されるように縦系、横系の各システムを定め、著者らが前報⁽²⁾にて開発した身体挙動シミュレーションにより入出力の値を求めた。なおこのときの入力ステップ入力である。すなわち、ある姿勢に固定して落下させ定常落下状態に復元させている。また前章で導出した楕円柱の運動方程式より4次のシステムを仮定した。

3.3 縦系の同定結果 図3にある一つの姿勢の例として、Neutral Positionにおけるステップ入力に対する出力信号のシミュレーション結果と同定されたシステムからの結果との比較を示す。実線のシミュレーション出力と点線の同定結果は区別できないほど良く一致しており、十分精度良く同定できていることがわかる。本姿勢においては y 軸まわりの復元力が存在し、角度 θ_y は2次遅れシステム、速度 v_x, v_z は1次遅れシステムとみなせる挙動を示すことがわかる。同定されたシステムを以下に示す。

Table 1 Range of joint angles

	Joint	Range [deg]
Longitudinal	Knee	-20 ~ 25
	Shoulder	-46 ~ 23
Lateral	Knee	-7 ~ 7
	Shoulder	-26 ~ 26
	Hip	0 ~ 0.16
	Elbow	-7.6 ~ 7.6

Table 2 Input parameters

system	input	output
longitudinal	$A_{nz}, \int x dA_{nz}$	V_x, V_z, Ω_y
lateral	$I_{xz}, \int y dA_{nz}, \Omega_y$	V_y, Ω_z

Fig. 3 Output from the simulation (longitudinal)

$$\frac{dx}{dt} = A(x - x(0)) + Bu \quad (36)$$

$$y = Cx + Du \quad (37)$$

$$x = \begin{bmatrix} v_x \\ v_z \\ \theta_y \\ \omega_y \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} \Delta \int x dA_{nz} \\ \Delta A_{nz} \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} v_x \\ v_z \\ \theta_y \end{bmatrix} \quad (38)$$

ここで

$$A = \begin{bmatrix} -0.174 & -0.188 & 0.001 & 0 \\ 0.005 & -0.301 & 0.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -18.53 & -59.3 & -16.77 & -0.332 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.52 & -0.62 \\ -0.44 & -0.62 \\ 340.5 & 480.3 \\ -155.5 & 219.4 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Fig. 4 Output from the simulation (lateral)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -54.5 \\ 0.1 \\ -25630 \end{bmatrix} \quad (43)$$

である。

3.4 横系の同定結果 横系に関しても同様にシステム同定を行った。図4に例を示す。膝関節 0° ，肩関節 0° ，股関節 0.1° ，肘関節 7.6° の場合である。これは y 軸方向に速度成分が発生するように変化した姿勢である。横系に関しても縦系と同様に速度および角速度 v_y, θ_z は1次遅れシステム，角度 θ_x は2次遅れシステムでほぼ表現できることがわかる。なお同定されたシステムの具体的な値は紙面の制約上割愛する。

また確認のため、4次以外のシステムでの同定も行ったが、3次では十分な適合度が得られず、5次では4次とほぼ同等な精度のシステムが得られた。よって4次のシステムでの同定は妥当であると考えられる。

4. 根解析による安定性の検討

本章では、前章で同定した様々な姿勢についての状態方程式の根解析を行い、安定性の検討を行う。具体的には式(39)に示されるような行列 A の特性方程式の根（固有値）を求め、根の実部がどのように変化をするかを考察する。そのためまず根特性を変化させるパラメータを導出し、そのパラメータを変化させ縦系、横系の根特性を調べる。なお根算出にはMatlabを用いた。

4.1 安定性を变化させるパラメータの導出

まず例として、縦系における Neutral Position の場合の行列 A の根を算出すると、 $-0.1920 + 4.1123i$, $-0.1920 - 4.1123i$, -0.1431 , -0.3488 の 4 個となる。これは負の実数根 2 個と、実部が負の複素根 2 個であるので、振動を伴いながらも収束していく安定な状態であることを示しており、3.1 節での応答でもそれが確認できる。しかし行列 A はダイバーのとり姿勢の変化に伴い変化するため、様々な姿勢において安定性を検討する必要がある。ここで、2.4 節での状態方程式の導出の際に述べたように、ダイバーの姿勢変化は状態方程式において $\Delta \int_L x dA_{nz}$, $\Delta \int_L y dA_{nz}$, $\Delta \int_L z dA_{nz}$, ΔA_{nz} , ψ の 5 個の変数の変化として現れる。このうち $\Delta \int_L z dA_{nz}$ 以外の 4 個については、式 (32) および (33) に示されているように、状態方程式の制御入力となっている。すなわちこれらは maneuver のために用いられ、さらに行列 A から分離されているので、幾何学的・流体力学的非線形性を除けば、基本的には行列 A の特性すなわち根の特性に影響を及ぼさない。よって、制御入力として分離されず行列 A の中に含まれている $\Delta \int_L z dA_{nz}$ のみが根の特性に大きく影響を及ぼすと考えられる。

ここで $\Delta \int_L z dA_{nz}$ の物理的意味を考える。 $\Delta \int_L z dA_{nz}$ は身体各部の z (鉛直) 方向分布の積分であるので、状態変数 (各方向の速度・角速度) に影響を及ぼさないように $\Delta \int_L z dA_{nz}$ を変化させることは、実際のダイバーの身体においては、身体全体の縦・横軸両方向の反り具合 (アーチ深さ) を変化させることに対応する。例えば縦方向において頭側と足側を同じだけ反らせれば、前後方向速度は発生せずに $\Delta \int_L z dA_{nz}$ のみが増加する。よって次式で示されるような、ダイバー身体の反り具合 (アーチ深さ) を表わすパラメータ α を導入し、これをパラメータとして根特性を調べることとする。

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \frac{z_i^*}{|x_i^*|} \frac{A_{nzi}}{N \cdot A_{nz}} \right) \quad (44)$$

ここで $N = 21$ (シミュレーション手法における身体体節 (楕円錐台) の数) であり、 A_{nzi} は i 番目の体節の A_{nz} である。また z_i^* , x_i^* は下臀部中心を原点とした各体節中心の x , z 座標である。よって本パラメータは 21 個の各身体体節の傾きの角度の平均値を表わす。この値が大きければ大きいほど身体のアーチが深いことを示す。図 5 に例として Neutral Position を横から見た様子を示す。この場合 α は 25.3° となる。

4.2 縦系の根特性 まず安定度を表わす根の実部について検討するため、前章で状態方程式を導出

Fig. 5 Side view of Neutral Position ($\alpha = 25.3^\circ$)

した様々な姿勢について、2 個の複素根 root1, root2 の実部 (root1 と root2 で同じ) および 2 個の実数根 root3, root4 の計 3 個についてパラメータ α との関係を調べた。結果を図 6 に黒丸で示す。また近似直線も図中に示す。値がばらついてるのは、パラメータ α の値は同じ値であっても姿勢は様々であり、幾何学的・流体力学的非線形性が影響を及ぼすためである。また図 7 にすべての根についての根軌跡を示す。図中の矢印は α の増加すなわちアーチが深くなる方向を示す。図 6, 7 よりわかるように、複素根 root1, root2 の実部はアーチが深くなるにつれて負の方向、すなわち安定化の方向に向かう。逆に 2 個の実数根はアーチが深くなるにつれて正の方向へと動き、不安定化の方向へ進むことがわかる。しかし、すべての根の実部の絶対値が 0.1 以上と比較的大きいので、縦系においては発散するような不安定状態は発生しづらいと考えられる。

また、それぞれの根の変位の比を表わす、固有モード (固有ベクトル) を Neutral Position の場合について算出した。結果を表 3 に示す。表 3 よりわかるように、まず複素根 root1 (root2) では ω_y の成分が支配的であるので、これはピッチングモードであることがわかる。次に root3 は v_x と θ_y が支配的な剛体モードであり、ピッチ方向に傾きつつ前後方向に速度が発生する状態と考えられる。また root4 は v_z が支配的な剛体モードであり、落下速度が増加もしくは減少していく状態と考えられる。

なお航空機の根解析においては、縦系では一般に 4 個の根が 2 組の複素根となり、それぞれピッチングモード (短周期)、フゴイドモード (長周期) と呼ばれている⁽⁵⁾。スカイダイビングの場合では、ピッチングモードは航空機と同様であるが、フゴイドモードに相当する根は実数根となるため、フゴイドモードは現れないと考えられる。

4.3 横系の根特性 横系においても 4 個の根は実数根 2 個、複素根 2 個となった。そこで縦系の場合と同様に、パラメータ α を用いてそれぞれの根の変化を調べた。図 8, 9 に結果を示す。また表 4 に 3.4 節の姿勢の場合の固有モードを示す。表 4 より、root1, root2 は ω_x が支配的なローリングモードであること

Fig. 6 Relationship between arch parameter α and real parts of roots (longitudinal)

Fig. 7 Root locus (longitudinal)

Table 3 Natural modes (longitudinal)

state variable	root1	root3	root4
v_x	-0.0008 - 0.0004i	-0.69	-0.21
v_z	-0.0002	0.006	0.96
θ_y	-0.011 + 0.23i	0.71	0.11
ω_y	0.97	-0.10	-0.04

がわかる。またその負の実部は図8, 9より, 24.5° 付近で最も絶対値が大きく安定となり, アーチが深すぎても浅すぎても不安定になることがわかる。これは著者らが前報⁽²⁾にて明らかにした, 復元モーメント(安定微係数)を最大化するアーチ深さが存在するとの知見と一致する。また実数根 root3 も同様に 27° 付近で最大安定をとり, root4 はアーチが深くなればなるほど安定である。これらの実数根の固有モードについては表4より, とともに v_y (横方向速度)と θ_x (ロール方向の傾き)が大きいくことがわかる。よってロール方向に傾きながら横滑りしている状態であると考えられる。さらに root3 と root4 を比較すると, root3 では ω_x 成分(ロール回転速度)が大きく, root4 では ω_z 成分(ヨー回転速度)が大きいくことがわかる。

ここで縦系の場合と同様に航空機の場合を参照すると⁽⁵⁾, 航空機の横系においては通常2組の複素根が現れ, それぞれローリングモード(短周期), ダッチ

ロール(長周期)と呼ばれている。しかしまれに長周期の根が2個の正の実数根となり, その結果2種類の不安定現象が現れることがある。一種類目がロール方向の発散状態であるスパイラルモードである。これは旋回運動を引き起こし, きりもみ状態に陥る可能性を持つ。二種類目はヨー方向の発散状態であるスピンモードである。よって, スカイダイビングにおける root3, root4 はそれぞれ, スパイラルモードとスピンモードに対応すると考えられる。

また, これらのモードの根の実部の絶対値は, 本論文でふった姿勢範囲でも0.1より小さくなる場合があり, 姿勢によっては発散状態におちいる恐れがあると考えられる。特にスピンモードは実部の絶対値が小さく危険である。よって, スカイダイビングにおいては, スピンとスパイラルの不安定状態が発生しやすく注意する必要があると結論づけられる。

そこでさらに, 不安定状態に陥らないような α の限界値を求めた。すなわち root3, root4 の近似式より, それぞれの値が0になるときの α の値を算出したところ, root3 については 20.0° , root4 については 19.4° という結果が得られた。よって $\alpha < 20^\circ$ の場合に不安定になる可能性が高い, すなわち $\alpha = 20^\circ$ 付近が安定限界と考えられる。図10(a)に限界値である $\alpha = 20^\circ$ の場合のダイバーの姿勢, (b)に $\alpha = 30^\circ$ の場合の姿勢を示す。(a)のように腕を肩よりも下げ, 足を伸ばしきってしまうと危険な状態となることがわかる。

5. 結 言

スカイダイビングにおける身体挙動について, まず楕円柱についての状態方程式を導出してこれを雛形として利用し, さらに開発ずみの身体挙動シミュレーション手法から得られる入出力結果を用い, 様々な姿勢におけるスカイダイビングの状態方程式を同定した。そして得られた状態方程式について根解析を行い, 安定性のメカニズムを明らかにした。得られた結

Fig. 8 Relationship between arch parameter α and real parts of roots (lateral)

Fig. 9 Root locus (lateral)

論を以下に示す。

(1) スカイダイビングの状態方程式は、航空機などと同様に縦系および横系として表現でき、さらにそれぞれについて4次の系として表わされる。

(2) スカイダイビングにおいては身体の反り具合(アーチ深さ)によって安定度(根の実部の値)が大きく変化する。

(3) 縦系においては、状態方程式の根は2個の複素根(ピッチングモード)と2個の実数根となるが、すべて実部は負で絶対値が大きく、不安定現象は発生しづらい。

(4) 横系においては、状態方程式の根は2個の複素根(ローリングモード)と2個の実数根(スピンモード、スパイラルモード)となる。これらの実部は標準的な身体姿勢ではすべて負であるが、スピン・スパイラルの二つのモードについては比較的に実部の絶対値が小さく、身体の反り具合が小さくなると不安定になる可能性がある。

なお今後の課題として、上記の結論の検証が挙げられる。実際のダイバーにより実験を行うことは危険を伴うため困難であるが、これらの結論は著者らが開発した身体挙動シミュレーション手法から導出したもの

Table 4 Natural modes (lateral)

state variable	root1	root3	root4
v_y	0.0060 - 0.0007i	-0.68	-0.69
ω_z	0.0007 - 0.0002i	0.01	-0.12
θ_x	-0.009 - 0.22i	-0.72	-0.70
ω_x	0.97	-0.13	0.07

(a) $\alpha = 20^\circ$ (stable limit) (b) $\alpha = 30^\circ$ (stable)Fig. 10 Body positions when $\alpha = 20^\circ$ and 30°

であるため、模型を用いた風洞実験やCFDにより本シミュレーション手法の妥当性を検証していく予定である。

文 献

- (1) Poynter, D. and Turoff, M., *The Skydiver's Handbook*, (2004), pp.191-207, Para Publishing.
- (2) Nakashima, M. and Omoda, Y., Development of a Simulation Method for Body Behavior in Skydiving and Analysis of the Most Stable Position, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 73, No. 734 (2007), pp. 1462-1469.
- (3) Suzuki, K., Navigation, Guidance, and Control Law and Planning of Flight Experiment for Scaled Supersonic Experimental Airplane (First Report), *NAL Report*, No.1377 (1998).
- (4) Research Institute of Human Engineering for Quality life, Japanese body Database, 1992-1994(CD-ROM)
- (5) http://www.centennialofflight.gov/essay/Theories_of_Flight/Stability_II/TH27.htm