情報処理流体力学(DFD)による雑音を含む非圧縮性速度場補正法*

西 田 秀 利^{*1}Velocity Correction Technique for Incompressible Velocity with
Noises Using Data-processing Fluid Dynamics (DFD)Hidetoshi NISHIDA^{*2}^{*2} Division of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

The velocity correction technique for incompressible velocity with noises is proposed by using the data-processing fluid dynamics (DFD). Two assumptions, that is, 1) the velocity field constructed by noises has the small structures, and 2) the velocity field satisfies the continuity equation for incompressible flow, are adopted. In assumption 1), the spatial filter is applied to remove the small structures. Also, Helmholtz's decomposition technique is applied to obtain the incompressible velocity, i.e., divergence free velocity. In order to validate the present approaches, Taylor-Green vortex flow and the square driven cavity flow are considered. The results show that the present techniques have the good velocity correction properties.

Key Words: Incompressible Viscous Flow, Velocity Correction Method, Data-processing Fluid Dynamics, Helmholtz's Decomposition, Spatial Filter

はじめに

流動現象を解析するための主な手法は、理論流体力学(TFD; Theoretical Fluid Dynamics)的手法・実験流体力学(EFD; Experimental Fluid Dynamics)的手法・計算流体力学(CFD; Computational Fluid Dynamics)的手法の3つである。本来であればこれら3つの解析手法は互いに補完し合うことにより、流動現象をより深く探求することに寄与するはずである。しかしながら、現実には各々のカテゴリーの中のみで発展してきていると言っても過言ではない。特に、実験流体力学と計算流体力学においては密接に連携すべき分野であるにもかかわらず、互いの結果を参照し合っているに過ぎない状況である。従って、流動現象解明のためにはこれらの実験流体力学(EFD)と計算流体力学(CFD)とをリンクすることが急務であると考えられる。現在、EFDとCFDとをリンクした融合シミュレーション⁽¹⁾も提案されており、EFDとCFDとの差を体積力としてCFDにフィードバックすることによりCFD結果をEFD結果に合致させるようにしている。しかしながら、EFDがCFDに対して、あるいは、CFDがEFDに対して実験

条件・計算条件を提示し、各々の分野が結果をフィードバックし合う形態にはなっていない。そこで本研究においては、2つの学問分野をリンクさせる新たな学問分野を創出することを最終目的とし、そのファーストステップとして非圧縮性流れにおける情報処理流体力学(DFD; Data-processing Fluid Dynamics)を提唱し、その可能性を検討する。非圧縮性流れにおいて両分野の関係を阻害している要因としては、実験により得られる速度場が必ずしも非圧縮性質量保存則(連続の式)を満足しないことが最も大きいと考えられる。従来このような実験速度場補正はいわゆる実験のポストプロセッシング⁽²⁾として、速度場の再構築手法、主に欠損速度場を復元するために行われており⁽³⁾⁽⁴⁾、本研究で目指すようなEFDとCFDとのリンクを念頭に置いたものではない。さらに、CFDを用いて速度場の補正を行う場合、ナビエ・ストークス方程式のフィルタが施された結果となり、実験速度場を必ずしも正確に再現していないことが予想される。

そこで、本研究においては数学的な要請のみをベースにした非圧縮性実験速度場補正手法を提案する。検証はTaylor-Green渦流れ⁽⁵⁾及び2次元正方空洞内流れに白色雑音を付加した流れ場を対象として、本手法による雑音除去性能を評価することにより実施する。

* 原稿受付 2007年3月22日。

^{*1} 正員、京都工芸繊維大学大学院工学科学研究科機械システム工学部門(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

E-mail: nishida@kit.ac.jp

1. 非圧縮性速度場補正法

本研究においては、2つの仮定を設定する。

- 1) 雑音成分が形成する流れ場は微小構造である。
- 2) 速度場は非圧縮性質量保存則 (連続の式) を満足する。

仮定 1) に関しては LES でも採用されている空間フィルタを用いることにより、雑音が形成する微小構造を除去する。また、仮定 2) に関しては任意のベクトル場のヘルムホルツ分解を用いることにより無発散速度ベクトルと無回転速度ベクトルとに分離する。以下にその手法について述べる。

1.1 空間フィルタ操作 フィルタ操作された速度 $\bar{u}$ は

$$\bar{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi)u(\xi)d\xi, \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $u(x)$ は速度成分を、 $G(\xi)$ は空間フィルタ関数を表している。空間フィルタ関数は

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} G(\xi) = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)d\xi = 1, \quad (2)$$

という性質を有し、本研究においては、以下に定義されるガウスフィルタを採用する。

$$G(\xi) = \sqrt{\frac{6}{\pi\Delta^2}} \exp\left(-\frac{6\xi^2}{\Delta^2}\right), \quad (3)$$

ただし、 Δ はフィルタ幅である。実際に空間フィルタ操作を行う場合は Sagaut と Grohens⁽⁶⁾ による離散フィルタを採用する。ガウスフィルタの離散形は

$$\bar{u}(x) = u(x) + \frac{\Delta^2}{24}u^{(2)}(x) + \frac{\Delta^4}{1152}u^{(4)}(x) + \cdots, \quad (4)$$

により与えられる。ここで、 $u^{(2)}(x)$ 、 $u^{(4)}(x)$ は $u(x)$ の 2 階及び 4 階微分を各々表し、本研究においてはこれらの微分は 2 次精度中心差分近似により離散化される。また、多次元に適用する場合には、式 (4) の 1 次元離散フィルタを各方向に逐次操作することによりフィルタ操作された速度成分を求めることができる。LES の場合と同様に、元の速度ベクトル $\vec{u}$ が非圧縮性流れの連続の式を満足すれば、フィルタ操作された速度ベクトル $\vec{\bar{u}}$ もまた原理的に連続の式を満足する。

$$\nabla \cdot \vec{\bar{u}} = 0. \quad (5)$$

1.2 ヘルムホルツ分解 任意の速度ベクトル $\vec{u}$ は無発散速度ベクトル $\vec{u}^i$ と無回転速度ベクトル $\vec{u}^c$ とに分離することができる。すなわち、

$$\vec{u} = \vec{u}^i + \vec{u}^c, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}^i = 0, \quad \nabla \times \vec{u}^c = 0. \quad (7)$$

従って、式 (6) 及び (7) より非圧縮性連続の式を満足する速度ベクトル $\vec{u}^i$ を求めればよい。境界条件が周期条件の場合には、式 (6) 及び (7) をフーリエ変換し、波数空間における代数方程式を解くことにより簡単に速度ベクトルを分離することができる。しかしながら、一般の場合にはフーリエ変換を用いることができないために、本研究においては渦度 (ω) を導入し、 $\nabla \cdot \vec{u}^i = 0$ 及び $\nabla \times \vec{u}^i = \omega$ の関係より求められる速度成分に関する楕円型偏微分方程式を解くことによって無発散速度ベクトルを抽出する。2 次元の場合について記述すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial y^2} &= -\frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^i}{\partial y^2} &= \frac{\partial \omega}{\partial x}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\omega = \nabla \times \vec{u} = \nabla \times \vec{u}^i, \quad (9)$$

ただし、 $\vec{u}^i = (u^i, v^i)$ である。渦度の評価は式 (7) より、単純に雑音を含む速度場 $\vec{u}$ を用いて行うことができる。式 (8) を適当な楕円型偏微分方程式のソルバーを用いて収束解を求めればよい。本研究では、SOR 法あるいは点ヤコビ法を採用し、収束判定基準は L_2 残差を用いて次のように設定する。

$$\phi_{L2} = \left[\frac{1}{N} \sum \sum (\phi^{l+1} - \phi^l)^2 \right]^{1/2} < \varepsilon, \quad (10)$$

ここで、 ϕ は速度成分、 l は反復段階、 N は全格子点数、 ε は収束判定のパラメータである。

2. Taylor-Green 渦流れ

Taylor-Green 渦流れ⁽⁵⁾ は非圧縮性流れにおいて数少ない解析解が存在する流れ場であり、周期境界条件の下で解析解は以下のように表される。

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= -\cos(x)\sin(y)\exp(-2\nu t), \\ v(x, y, t) &= \sin(x)\cos(y)\exp(-2\nu t), \\ p(x, y, t) &= -\frac{1}{4}[\cos(2x) + \cos(2y)]\exp(-4\nu t), \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 ν は動粘性係数であり、解析領域は $(0, 0) \leq (x, y) < (2\pi, 2\pi)$ 、格子点数は 32×32 及び 64×64 である。ここでは、基本速度場として式 (11) において $t = 0$ とした場合を考える。また、付加する雑音は一樣乱数 $[-1, 1]$ により発生させた白色雑音 (Δu , Δv) とし、速度場の最大値に対して 3%、10% の強さを設定する ($\alpha = 0.03U_{max}$, $0.10U_{max}$)。

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= -\cos(x)\sin(y) + \alpha\Delta u, \\ v(x, y, 0) &= \sin(x)\cos(y) + \alpha\Delta v. \end{aligned} \quad (12)$$

実際の実験においては 10% の雑音はほとんどありえないと考えられるが、本研究においては、雑音除去性能を検証するため敢えて 10% の雑音を設定した。図 1 に基本速度場を、図 2 に 3% 及び 10% の雑音を付加した場合の x 方向速度分布を各々示す。10% の雑音を付加した速度場においては、もはや基本速度場を予想することは困難であることが判る。また、表 1 に雑音を付加した速度場の基本速度場に対する L_2 誤差及び連続の式の満足度を示す。ただし、連続の式は 2 次精度中心差分近似により評価している。

(a) u -component (b) v -component

Fig. 1 Fundamental velocity field.

(a) 3% noises (b) 10% noises

Fig. 2 Velocity field (u) with noises.

Table 1 Error of velocity field with noises.

Noise	Grid	L_2 -error($\times 10^{-2}$)		Dilatation ($\times 10^{-1}$)
		u	v	
3%	32^2	1.689	1.723	0.878
3%	64^2	1.726	1.744	1.765
10%	32^2	5.631	5.745	2.926
10%	64^2	5.754	5.813	5.885

2.1 空間フィルタの性能評価 最初に、空間フィルタ幅 Δ が速度場補正性能に及ぼす影響について考察する。図 3 に 10% 雑音を付加した場合についての結果を示す。横軸はフィルタ幅と格子間隔の比を取ったものである。図 3 はフィルタ幅に最適値が存在することを示しており、この流れ場の場合 $\Delta = 2.0 \sim 3.0$ であることが判る。3% 雑音の場合も同様の結果を示した。

最適なフィルタ幅を用いた際の基本速度場との誤差を表 2 に、補正された速度場 (u 成分, 64×64 格子) を図 3 に示す。3% 雑音の補正速度場は明らかに補正効果が表れているが、10% 雑音の補正速度場に関しては雑音は十分に除去されていないことが認められる。また、補正後の連続の式は補正前と同程度しか満足されていない。

Fig. 3 Effect of filter length (10% noises).

Table 2 Error of velocity with spatial filter.

Noise	Δ	Grid	L_2 -error($\times 10^{-2}$)		Dilatation ($\times 10^{-1}$)
			u	v	
3%	2.0	32^2	1.209	1.181	0.512
3%	2.5	64^2	0.886	0.906	0.821
10%	2.5	32^2	3.065	2.989	1.404
10%	3.0	64^2	2.767	2.819	2.490

(a) 3% noises (b) 10% noises

Fig. 4 Corrected velocity field (u) by spatial filter.

2.2 ヘルムホルツ分解の性能評価 次に、ヘルムホルツ分解による速度場補正性能について検証する。速度に関する楕円型偏微分方程式の収束判定基準はコンピュータのマシンゼロであると考えられる $\varepsilon = 10^{-15}$ と設定する。基本速度場との誤差を表 3 に、補正された速度場 (u 成分, 64×64 格子) を図 4 に示す。空間フィルタと比較するとヘルムホルツ分解による速度

場補正は両雑音共に明らかな補正効果が表れている。3%雑音においてはほぼ基本速度場を再現していることが認められ、10%雑音に関しても基本的なプロファイルは再現されている。さらに、連続の式は 10^{-13} ~ 10^{-14} のオーダーで満足されていることが判る。収束判定基準を変化させた場合においても ε の 1~2 桁上のオーダーで連続の式を満足することは確認している。

Table 3 Error of velocity by Helmholtz decomposition.

Noise	Grid	L_2 -error($\times 10^{-2}$)		Dilatation ($\times 10^{-13}$)
		u	v	
3%	32^2	0.732	0.723	0.512
3%	64^2	0.566	0.565	2.448
10%	32^2	1.887	1.845	0.555
10%	64^2	1.857	1.856	2.435

(a) 3% noises

(b) 10% noises

Fig. 5 Corrected velocity field (u) by Helmholtz decomposition.

2.3 混合型速度場補正法の性能評価 前述した2つの手法は組み合わせて適用することもできる。ここでは、空間フィルタによりある程度雑音を除去した後ヘルムホルツ分解により非圧縮条件を満足する速度場を得る手法を取り上げ、混合型補正法と呼ぶことにする。空間フィルタ幅に関しては最適と判断されたものを用いた。また、前述の手法単独では補正効果が高くなかった10%雑音に関して実施する。図6より両格子点数においてほぼ基本速度場を再現していることが認められる。さらに、表4より連続の式も 10^{-13} ~ 10^{-14} のオーダーで満足されていることが判り、混合型にすることによる速度場補正効果向上が示された。

Table 4 Error of velocity by combined method.

Δ	Grid	L_2 -error($\times 10^{-2}$)		Dilatation ($\times 10^{-13}$)
		u	v	
2.5	32^2	1.948	1.930	0.545
3.0	64^2	1.254	1.248	2.445

(a) 32×32 (b) 64×64 Fig. 6 Corrected velocity field (u) by combined method with 10% noises.

以上のことから、本研究において提案した速度場補正法は単独ではヘルムホルツ分解が高い速度場補正性能を示し、両方法を組み合わせた混合型補正法はさらに高い速度場補正性能を有していることが判る。

3. 2次元正方空洞内流れ

ここでは、速度場の境界条件がディリクレ型で与えられる場合の典型的な流れ場として、2次元正方空洞内流れを取り上げ、速度場補正性能の評価を実施する。基本速度場として連続の式を厳密に満足する渦度-流れ関数により非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を定式化し、空間微分項を2次精度中心差分近似により離散化することにより得られた定常解を採用する。ただし、移動壁(上壁)の速度は特異性を排除するために、

$$u(x, 1) = 16x^2(1-x)^2 \quad (13)$$

で与えるものとする。また、付加する雑音はTaylor-Green 渦流れの場合と同様に白色雑音(Δu , Δv)とし、雑音の強さも同様に α で設定する。 $Re = 100$, 格子点数 65×65 における基本速度場を図7に示す。基本速度場は連続の式を 10^{-16} のオーダーで満足している。また、図8に3%雑音を付加した場合の速度場を示す。両図を比較すると、もはや基本速度場はほとんど認識できないことが判る。

3.1 空間フィルタの性能評価

空間フィルタに関しては、4階微分項を離散化する必要があり、そのために境界最近傍点において中心差分近似の際にステンシル数が不足する。ここでは境界内部に仮想点を設けるのではなく、2次精度片側差分近似により離散化を行っている。フィルタ幅に関してTaylor-Green 渦流れと同様に最適値が存在し、この場合 $\Delta = 2.75$ であった。以下に、この最適値を用いた際の補正された速度場及び誤差の定量評価を示す。図9の補正速度場

Fig. 7 Fundamental velocity field of square driven cavity flow ($Re = 100$, 65×65).

Fig. 8 Velocity field with 3% noises.

と図 8 の雑音を付加した速度場を比較すると、基本速度場の大まかな認識が可能である程度には速度補正がなされているものの壁近傍の雑音除去が不完全であり小規模構造は再現されていない。また、表 5 の定量比較においては、特に、連続の式の満足度が 10^{-1} 程度であり、補正性能が低いことが認められる。これは Taylor-Green 渦流れの場合と同様、補正前の速度場が連続の式を満足していないことに起因するものである。

Fig. 9 Corrected velocity field by spatial filter.

3.2 ヘルムホルツ分解の性能評価 速度に関する楕円型偏微分方程式の境界条件は全境界に対してディリクレ境界条件とする。基本速度場との誤差を表 6 に、補正された速度場を図 10 に示す。基本速度場の

Correction	Δ	L_2 -error($\times 10^{-3}$)		Dilatation
		u	v	
without	—	17.283	17.441	1.081
with	2.75	8.849	8.708	0.496

認識がほとんど不可能である 3% 雑音速度場において、ほぼ基本速度場を再現していることが認められるが、残念ながら速度が非常に小さいコーナー渦に関しては満足に再現しているとはいえない。また、連続の式は 10^{-3} のオーダーでしか満足されていない。しかしながら、表 6 の補正前の速度場との誤差の定量比較において、速度場の誤差及び連続の式の満足度共に 1~3 オーダーの著しい改善が認められ、ヘルムホルツ分解の高い速度場補正性能が示されている。

Fig. 10 Corrected velocity field by Helmholtz decomposition.

Table 6 Error of velocity by Helmholtz decomposition.

Correction	L_2 -error($\times 10^{-3}$)		Dilatation
	u	v	
without	17.283	17.441	1.081×10^0
with	4.654	4.098	3.165×10^{-3}

3.3 混合型速度場補正法の性能評価 最後に、空間フィルタ ($\Delta = 2.75$) とヘルムホルツ分解を組み合わせた混合型補正法の結果を図 11 及び表 7 に示す。定性的・定量的共にヘルムホルツ分解による補正速度場とほぼ同一の結果となっていることが判る。これはヘルムホルツ分解が空間フィルタに比べ卓越した速度場補正性能を有していることを示している。このことより、2 次元正方空洞内流れにおいてはヘルムホルツ分解による速度場補正が最も効果的であることが判る。

おわりに

本研究においては CFD と EFD とを有機的にリンクさせるための第一段階として情報処理流体力学 (DFD) による非圧縮性速度場補正法を提案し、Taylor-Green

Fig. 11 Corrected velocity field by combined method.

Table 7 Error of velocity with spatial filter.

Correction	Δ	L_2 -error($\times 10^{-3}$)		Dilatation
		u	v	
without	—	17.283	17.441	1.081×10^0
with	2.75	3.797	3.418	3.241×10^{-3}

渦流れ及び2次元正方空洞内流れに白色雑音を付加した流れ場を対象として、速度場補正性能を検証した。その結果、以下の結論を得た。

1) 空間フィルタにガウスフィルタを用いた速度場補正法は雑音が形成する微小構造を完全には補正できないことが判明した。

2) ヘルムホルツ分解を用いた無発散速度場抽出による速度場補正法は今回対象とした周期及びディリクレ両境界条件の下では卓越した速度場補正性能を有することが認められた。しかしながら、より連続の式を満足する壁面境界条件の設定という課題も存在することが判明した。

3) 空間フィルタとヘルムホルツ分解を組み合わせた混合型速度場補正法は Taylor-Green 渦流れに対しては最も高い速度場補正性能を示したが、2次元正方空洞内流れにおいてはヘルムホルツ分解単独の補正性能を超えることはなかった。

今後、空間フィルタの変更、ヘルムホルツ分解におけるより適切な壁面境界条件の設定及び他の流れ場、

特に、乱流場への適用などまだ課題も存在するものの、本研究の結果からヘルムホルツ分解による速度場補正法が最も汎用的の高い速度場補正性能を期待できると結論される。

また、非圧縮性質量保存則を満足する速度場を求めることができれば、非圧縮性ナビエ・ストークス方程式より導かれる圧力方程式を解くことにより圧力場の推定も容易に行うことも可能となる。このことより、実験において測定することが容易でない流れ場全体の圧力場が実験で得られた速度場を基にして予測できるため、EFD と CFD とのより有機的なリンクが可能となると期待することができる。

文 献

- (1) Hayase, T., Nisugi, K., and Shirai, A., Numerical realization for analysis of real flows by integrating computation and measurement, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.47, (2005), pp.543–559.
- (2) Murai, Y., Ido, T., Ishikawa, M., and Yamamoto, F., Development of the post-processing method for PIV measurement result using computational fluid dynamics, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol.64, No.626, (1998), pp.3249–3256, (in Japanese).
- (3) Ishikawa, M., Ido, T., Murai, Y., and Yamamoto, F., Development of a rearrangement method using the velocity gradient tensor for PIV, *Transaction of the Visualization Society of Japan*, Vol.20, No.79, (2000), pp.365–372, (in Japanese).
- (4) Hojo, K. and Kashiwara, M., Interpolation method of velocity vector using pressure data in PIV, *Transaction of the Visualization Society of Japan*, Vol.20, No.77, (2000), pp.139–144, (in Japanese).
- (5) Orszag, S.A., Numerical method for the simulation of turbulence, *Physics of Fluids Supplement II*, Vol.12, (1969), pp.250–257.
- (6) Sagaut, P. and Grohens, R., Discrete filters for large eddy simulation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.31, (1999), pp.1195–1220.