一様せん断流中の球形気泡に働く抗力と揚力の評価*

杉 岡 健 一^{*1}, 小 森 悟^{*2}Drag and Lift Forces Acting on a Spherical Bubble
in Homogeneous Shear FlowKen-ichi SUGIOKA and Satoru KOMORI^{*3}^{*3} Department of Mechanical Engineering and Advanced Institute of Fluid Science and Engineering,
Kyoto University, Yoshidahonmachi, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8501 Japan

Drag and lift forces acting on a spherical bubble in a homogeneous linear shear flow were numerically investigated by means of a three dimensional direct numerical simulation based on a marker and cell (MAC) method. The effects of fluid shear rate and particle Reynolds number on drag and lift forces acting on a spherical bubble were compared with those on an inviscid bubble. The results show that the drag force acting on a spherical bubble in a linear shear flow increases with shear. The behavior of the lift force on a bubble is quite similar to that on an inviscid bubble, but the effects of fluid shear rate on the lift force acting on a spherical bubble in the linear shear flow become bigger than that acting on an inviscid bubble in the particle Reynolds number region of $1 \leq Re_p \leq 300$.

Key Words: Drag and Lift Forces, Flow Outside and Inside a Bubble, Numerical Simulation

1. 緒 言

流体中での気泡の運動は工業装置内や環境中の流れを問わず多くの場合に見られる。例えば、気泡塔やキャビテーション現象、海洋で見られる白波などが例としてあげられる。一般にこのような気泡を含む流体中には、せん断力 (速度こう配) が存在する場合が多い。そのため、気泡の運動に及ぼす流体中のせん断力の影響を十分に把握することが重要である。

せん断流中の球形粒子には流れとの相対運動の方向に働く抗力だけでなく、相対運動の方向に垂直な方向に働く流体力、つまり揚力が働くことがこれまでの研究によりよく知られている。既往研究においては、揚力は流体の速度の遅い領域側から速い領域側に働くとしてきた (例えば、Saffman⁽¹⁾, Dandy & Dwyer⁽²⁾, McLaughlin⁽³⁾)。しかし、Kurose & Komori⁽⁴⁾ は一様せん断流中の剛体球周りの流れに三次元直接数値計算法を適用することにより、球径 d と球の中心に相当する位置での流体と球の相対速度 U_c を基準にした粒子レイノルズ数 $Re_p (= dU_c/\nu)$ が 100 以上の高 Re_p を

伴う場合の剛体球に働く揚力は逆に流体速度の遅い領域側に向かって働くことを明らかにした。ここで、 ν は流体の動粘性係数である。また、この揚力の反転は Bagchi & Balachandrar⁽⁵⁾ によっても確認されている。せん断流中の球形非粘性気泡に働く抗力や揚力についての研究例は剛体球に対する研究例よりも比較的少ない。剛体球についての Saffman⁽¹⁾ と McLaughlin⁽³⁾ の解析結果および Dandy & Dwyer⁽²⁾ の数値計算結果をもとに、一様せん断流中の球形気泡に働く揚力の評価式を $10^{-2} \leq Re \leq 10^3$ の範囲に対して提案した Mei & Klausner⁽⁶⁾ の研究や、Legendre & Magnaudet⁽⁷⁾, Kurose *et al.*⁽⁸⁾ による球表面において接線方向のせん断力が働かない球形非粘性気泡周りに関する直接数値計算などがある。

しかし、球表面を non-slip 条件で与えられる剛体球や内部流体の粘性が周囲流体に比べて非常に小さいために球内の流れの影響を無視できるとして球表面を slip 条件で与えられる非粘性気泡とは異なり、気泡の場合には気泡周りの流れだけでなく気泡内の流れも明らかにしなければ球表面の状態を決めることができない。そのため、気泡内部の流れを考慮した一様せん断流中での気泡に働く抗力や揚力はストークス流れ ($Re_p \ll 1$) の場合⁽⁹⁾ に対してしか明らかにされておらず、中程度の Re_p ($Re_p > 1$) の一様せん断流中での

* 原稿受付 2007 年 6 月 15 日。

^{*1} 正員, 京都大学大学院工学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町) [現: 大阪府立大学大学院工学研究科]。^{*2} 正員, 京都大学大学院工学研究科。

E-mail: komori@mech.kyoto-u.ac.jp

気泡に働く抗力や揚力は明らかにされていない。

そこで本研究は、一様せん断流中の球形気泡周りの液流および気泡内の気流に三次元直接数値計算法を適用することにより、球形気泡に働く抗力と揚力に及ぼす流体中のせん断力の効果および気泡内部の流れの影響を明らかにすることを目的とした。また、その結果を球形非粘性気泡に対する計算結果と比較することにより、一様せん断流中におかれた非粘性気泡と粘性を考慮した気泡との間の揚力発生メカニズムの違いについて検討を行った。

2. おもな記号

- C_D : 抗力係数 [-]
 C_L : 揚力係数 [-]
 d : 気泡の直径 [m]
 p : 圧力 [kg/m s²]
 Re_p : 粒子レイノルズ数 ($= \frac{U_c d}{\nu}$) [-]
 U, V, W : 流速の (x, r, θ) 方向速度 [m/s]
 U_c : 流体と気泡の相対速度 [m/s]
 x, y, z : 直交座標系の主流, 鉛直, スパン方向座標 [m, m, m]
 x, r, θ : 円柱座標系の主流, 半径, 角方向座標 [m, m, rad]
 α : 無次元化された速度こう配 [-]
 μ : 粘性係数 [kg/m s]
 ν : 動粘性係数 [m²/s]
 ρ : 密度 [kg/m³]
 τ : せん断応力 [kg/m s²]

3. 直接数値計算法

図1に計算対象とした一様流中での気泡周りおよび気泡内の三次元直接数値計算のための座標系を示す。本数値計算では円柱座標系 (x, r, θ) ^{(4) (8) (10) (11)}を用いた。

気泡周りおよび気泡内の格子点の概略図を図2(a)(b)に示す。支配方程式である連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

と Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)U = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re_{p,k}} \nabla^2 U \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)V - \frac{V^2}{r} \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re_{p,k}} \left(\nabla^2 V - \frac{V}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)W + \frac{VW}{r} \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re_{p,k}} \left(\nabla^2 W - \frac{W}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Fig. 1 Coordinate system for a spherical bubble.

Fig. 2 Schematic diagram of computational domain: (a) outside a spherical bubble, (b) inside a spherical bubble.

を解く方法として有限差分法に基づく MAC(Marker and Cell) 法^{(4) (8) (10) (11)}を用いた。NS 方程式中の粒子レイノルズ数 Re_p の添え字 k は気泡周り ($k = o$: outside) と気泡内 ($k = i$: inside) を意味する。このとき、気泡周りおよび気泡内の粒子レイノルズ数は

$$Re_{p,i} = \frac{\rho_i \mu_o}{\rho_o \mu_i} Re_{p,o} \quad \dots\dots\dots (5)$$

の関係にある。なお、 Re_p の代表速度には周囲流速と気泡の質量中心の移動速度との相対速度を、動粘性係数には周囲の液体の動粘性係数の値を用いた。気泡周りおよび気泡内の流体は水と空気を想定し、物性値を表1に示す。 $Re_p \leq 100$ において気泡のキャピラリー数

Table 1 Fluid properties.

μ_o	$8.91 \times 10^{-4} \text{ kg/m s}$
μ_i	$1.82 \times 10^{-5} \text{ kg/m s}$
ρ_o	$9.97 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$
ρ_i	1.19 kg/m^3

($=\mu U_c/\sigma$) およびウェーバー数 ($=\rho U_c^2 d/\sigma$) はそれぞれ最大で 2.5×10^{-3} および 0.50 であった。ここで、 σ は表面張力である。 $Re_p = 300$ において、気泡のキャピラリー数およびウェーバー数はそれぞれ 5.0×10^{-3} および 3.01 であった。 $Re_p \leq 100$ においては気泡の変形および気泡の変形により発生する揚力は無視できるほど小さい。(Wohl & Rubinow⁽¹³⁾, Leal⁽¹⁴⁾) そこで、本研究では気泡は変形をせず、常に球形をとると仮定した。また、温度勾配および濃度勾配がないため、表面張力によって発生する流れはないとした。支配方程式の離散化に関しては、液側の対流項には 3 次精度の風上差分スキーム⁽¹²⁾を、その他の空間微分項には 2 次精度の中心差分スキームを適用した。計算領域を主流 (x) 方向に気泡径の 20 倍、径 (r) 方向に気泡径の 10 倍と充分大きくした。計算格子数を気泡周りは x, r, θ 方向に $35 \times 61 \times 48$ 、気泡内は $35 \times 31 \times 48$ とした。 θ 方向には格子間隔 $\Delta\theta$ を等間隔とした。なお、各方向に 2 倍の格子数を配置した場合 (気泡周りに $71 \times 121 \times 96$ および気泡内に $71 \times 61 \times 96$) の計算結果と本研究で用いた格子数を配置した場合との差は抗力に関しては 4% 以下であり、揚力に関しては 0.5% 以下であった。

周囲流の流速分布には

$$U = 1 + \alpha y \dots\dots\dots (6)$$

を与えた。ここで、 α は速度こう配 ($\partial U/\partial y$) を無次元化したものである。

気泡の中心は円柱座標系では特異点となるため、流速を

$$U(x, 0, \theta) = \frac{U(x, \Delta r, \theta) + U(x, \Delta r, \theta + \pi)}{2} \dots\dots\dots (7)$$

により補完して与えた。気泡表面における速度の境界条件は、1) 流体は界面を横切らず、気泡は変形をしないこと、2) 気泡表面に対する接線方向の力が連続であること、3) 気泡表面での接線方向の速度が連続であることから

$$v_{n,o} = v_{n,i} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\tau_{n\theta,o} = \tau_{n\theta,i} \dots\dots\dots (9)$$

$$\tau_{n\phi,o} = \tau_{n\phi,i} \dots\dots\dots (10)$$

$$v_{\theta,o} = v_{\theta,i} \dots\dots\dots (11)$$

$$v_{\phi,o} = v_{\phi,i} \dots\dots\dots (12)$$

を満たすように与えた。式中の添え字 n は法線方向、 θ および ϕ は接線方向を表す。

なお気泡の場合との比較のために行った球形非粘性気泡の場合の計算では非粘性気泡の表面での境界条件として slip 条件を用いた。

気泡に働く流体力 $\mathbf{F}$ は

$$\mathbf{F} = \int_S -p\mathbf{e}_n + \boldsymbol{\tau}\mathbf{e}_i dS \dots\dots\dots (13)$$

により与えられる。 i は各方向成分である。流体力 $\mathbf{F}$ を

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{F}}{\frac{1}{2}\pi\rho_o U_c^2 (\frac{d}{2})^2} \dots\dots\dots (14)$$

で無次元化した $\mathbf{C}$ の主流方向 (x 方向) 成分が抗力係数 C_D 、鉛直方向 (y 方向) 成分が揚力係数 C_L である。また、式 (13) 中の右辺第一項で示す圧力によって働く抗力および揚力が圧力抗力および圧力揚力、式 (13) 中の右辺第二項で示す粘性によるせん断応力によって働く抗力および揚力が粘性抗力および粘性揚力である。

DNS を実行する際のパラメータは球周りで粒子レイノルズ数 Re_p および速度こう配 α であり、 $\alpha = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ の場合に対して $Re_p = 1 \sim 300$ の範囲で計算を実行した。

4. 結果 と 考 察

4-1 一様せん断流中の気泡に働く抗力 流動場

が本 DNS により正確に解けているかどうかを確認するため、一様流中 ($\alpha = 0.0$) で気泡および非粘性気泡に働く流体力を評価した。図 3 に気泡および非粘性気泡の $\alpha = 0.0$ における抗力係数 C_D の粒子レイノルズ数 Re_p に対する変化を示す。図 3 中の $\times$ 印は Duineveld⁽¹⁵⁾ による超純水中の気泡の抗力係数の実験値、 $+$ 印は Takemura & Yabe⁽¹⁶⁾ によるシリコンオイル中の気泡の抗力係数の実験値、実線は Mei *et al.*⁽¹⁷⁾ の非粘性気泡の抗力係数に対する相関式である。Duineveld の実験値には $Re_p > 300$ において気泡の変形による抗力係数の増加が見られる。この図から $Re_p \leq 300$ の領域では本数値計算の結果は実験値と良好に一致することがわかる。このことから、本数値計算は気泡周りおよび気泡内の流動場を気泡が変形しない領域では忠実に表していることおよび $Re_p \leq 300$ において、気泡の変形の影響は無視できるほど小さいことがわかる。一様せん断流中での気泡に働く抗力に及ぼすせん断力の効果を明らかにするために図 4 に一様せん断流中での気泡の抗力係数 C_D と一様流中 ($\alpha = 0.0$) での気泡の抗力係数 C_{D0} との比の粒子レイノルズ数 Re_p と速度こう配 α に対する変化を示す。図 4 から抗力係数は Legendre & Magnaudet⁽⁷⁾ および Kurose *et al.*⁽⁸⁾ の非粘性気泡に対する数値計算結果と同様に α の増加に伴い、増加することがわ

Fig. 3 Drag coefficient, C_D , for a bubble and an inviscid bubble versus the particle Reynolds number, Re_p .

Fig. 4 The ratio of drag coefficient, C_D , for a bubble in a linear shear flow to that in a uniform unsheared flow, C_{D0} .

かる。また、その影響は Re_p の増加に伴って大きくなることわかる。このメカニズムの詳細に関しては Legendre & Magnaudet⁽⁷⁾ を参照されたい。気泡と非粘性気泡に働く抗力の差を明らかにするために、図 5 に非粘性気泡の抗力係数 $C_{D,ib}$ に対する気泡の抗力係数 $C_{D,b}$ の比を示す。Legendre & Magnaudet⁽⁹⁾ は Saffman⁽¹⁾ の剛体球周りの流れの解析と同様に慣性項を無視したストークス近似を用いて、球形流体粒子内外の解析を行い、低レイノルズ数領域 ($Re_p \ll 1$) における球形流体粒子に働く抗力を明らかにした。その結果、本研究で用いた物性値では球形気泡に働く抗力は周囲流の速度こう配によらず非粘性気泡に働く抗力の 1.01 倍であることを示した。図 5 から、気泡と非粘性気泡の抗力係数の比は α および Re_p によらず

Fig. 5 The ratio of drag coefficient for a spherical bubble, $C_{D,b}$, to that for an inviscid bubble, $C_{D,ib}$, in a linear shear flow.

ば 1.01 である。

4.2 一様せん断流中の気泡に働く揚力 図 6, 図 7 に気泡および非粘性気泡の場合の $\alpha = 0.0 \sim 0.4$ における揚力係数 C_L の粒子レイノルズ数 Re_p に対する変化を示す。図 6 および図 7 中の点線は $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ における非粘性流体中の剛体球に対する揚力係数⁽¹⁸⁾であり、揚力 F_L は無次元化されていない周囲流の速度こう配 $\frac{\partial U}{\partial y}$ を用いて

$$F_L = \frac{2}{3} \pi \rho \left(\frac{d}{2} \right)^3 \frac{\partial U}{\partial y} U_c \quad \dots \dots \dots (15)$$

と表され、これを揚力係数の形で表すと

$$C_L = \frac{2}{3} \alpha \quad \dots \dots \dots (16)$$

となる。図 6 から、当然のことながら $\alpha = 0.0$ における気泡に働く揚力は常に零の値をとることがわかる。また、速度こう配が存在する場合には気泡の揚力係数は Legendre & Magnaudet⁽⁷⁾ の非粘性気泡に対する数値計算結果と同様に $Re_p < 10$ において Re_p の増加に従って減少し、 $Re_p \simeq 10$ において極小値をとり、 $Re_p > 10$ において Re_p が増加するに従って増加し、 $Re_p = 300$ において点線で示す非粘性流体中の球に対する揚力係数である $\frac{2}{3} \alpha$ に近い値を示す。このメカニズムの詳細に関しては Legendre & Magnaudet⁽⁷⁾ を参照されたい。粘性流体中の剛体球や液滴の場合^{(4) (11)} には高粒子レイノルズ数領域において剛体球および液滴の後方に流れのはく離が現れることから、揚力は式 (16) とまったく異なる結果となる。しかし、気泡の場合には高粒子レイノルズ数領域であっても流れのはく離が現れないために、高粒子レイノルズ数領域では揚力は非粘性流体を仮定した式 (16) とおおよそ近い結果となる。さらに、図 7 から、非粘性気泡の揚力係数

Fig. 6 Lift coefficient, C_L , for a bubble versus the particle Reynolds number, Re_p .

Fig. 7 Lift coefficient, C_L , for an inviscid bubble versus the particle Reynolds number, Re_p .

も気泡の揚力係数と同様の傾向を示すことがわかる。そこで、非粘性気泡と気泡に働く揚力の差異を明らかにするために、図8に非粘性気泡の揚力係数 $C_{L,ib}$ に対する気泡の揚力係数 $C_{L,b}$ の比を示す。Legendre & Magnaudet⁽⁹⁾ は Saffman⁽¹⁾ の剛体球周りの流れの解析と同様に慣性項を無視したストークス近似を用いて、球形流体粒子内外の解析を行い、低レイノルズ数領域 ($Re_p \ll 1$) における球形流体粒子に働く揚力を明らかにした。その結果、本研究で用いた物性値では球形気泡に働く揚力は周囲流の速度こう配によらず非粘性気泡に働く揚力の1.02倍であることを示した。しかし、図8から、 $1 \leq Re_p < 50$ において、揚力係数の比はストークス近似を用いたときの値である1.02よりも大きな値を示すこと、揚力係数の比は $Re_p \simeq 5$ において1.02よりもはるかに大きなピーク値を持つことがわかる。このことから、慣性項を無視するスト

Fig. 8 The ratio of lift coefficient for a spherical bubble, $C_{L,b}$, to that for an inviscid bubble, $C_{L,ib}$.

クス近似は $Re_p = 1$ であっても適用できないことがわかる。慣性項の影響が大きく、粘性項の影響の小さい $Re_p \geq 100$ においては、揚力係数の比は気泡、非粘性気泡ともに $\frac{2}{3}\alpha$ に漸近することから、ほぼ1となることがわかる。また、 $1 \leq Re_p \leq 300$ において、揚力の比が1より大きいことから、周囲流のせん断力が揚力に及ぼす影響は非粘性気泡の場合と比較して、気泡の場合のほうが大きいことがわかる。 $Re_p \simeq 5$ においては、流れに対して粘性および慣性が同程度影響するため、揚力係数の比が慣性の影響を無視した場合の1.02および粘性の影響を無視した場合の1とは異なり、ピーク値を持つと考えられる。ここで、気泡および非粘性気泡に働く揚力の詳細を明らかにするため、図9および図10に気泡(a)および非粘性気泡(b)の粘性揚力係数 $C_{L,f}$ および圧力揚力係数 $C_{L,p}$ をそれぞれ示す。図10中の点線は図6と同様、非粘性流体中の剛体球の揚力係数(式(16))を示す。図9から、気泡および非粘性気泡ともに粘性揚力係数は $Re_p < 10$ において Re_p の増加に従って減少する。また、 $Re_p \simeq 10$ において負の値の極小値を取り、 $Re_p > 10$ において、揚力係数は Re_p が増加するに従い、0に漸近することがわかる。さらに、図10から気泡および非粘性気泡ともに圧力揚力係数は揚力係数と同様に $Re_p < 10$ において Re_p の増加に従って減少し、 $Re_p \simeq 10$ において正の値の極小値を取る。 $Re_p > 10$ において、揚力係数は Re_p が増加するに従い、点線を示す $\frac{2}{3}\alpha$ に漸近することがわかる。図8で見られた気泡と非粘性気泡の揚力係数の差を明らかにするために $\alpha = 0.2$ および 0.4 における気泡および非粘性気泡の粘性揚力係数

(a)

(b)

Fig. 9 Viscous lift coefficient, $C_{L,f}$, versus the particle Reynolds number, Re_p : (a) for a bubble; (b) for an inviscid bubble.

を図 11 に、圧力揚力係数を図 12 に、それぞれ示す。図 11 から、気泡の場合には非粘性気泡の場合と比較して粘性揚力が大きな値を示すことがわかる。また、図 12 から圧力揚力も粘性揚力と同様に非粘性気泡の場合と比較して気泡の場合に大きな値となることがわかる。これらのことから、気泡の揚力は気泡内の流れを考慮することによって、球表面が slip 条件である非粘性気泡と比較して、粘性揚力、圧力揚力ともに大きくなることわかる。

5. 結 言

せん断流中に置かれた単一の球形気泡に対して三次元直接数値計算 (DNS) を適用し、気泡周りおよび気泡内部の流動場を明らかにし、同じ DNS により得られた気泡を非粘性と仮定した場合の非粘性気泡周りの流れと比較することにより、以下の結論を得た。

(a)

(b)

Fig. 10 Pressure lift coefficient, $C_{L,p}$, versus the particle Reynolds number, Re_p : (a) for a bubble; (b) for an inviscid bubble.

1. 一様せん断流中の球形気泡の抗力係数は流体中の速度勾配の増加に伴い増加し、その速度勾配の影響は高粒子レイノルズ数領域で顕著となる。また、気泡の抗力係数はストークス近似を用いた場合と同じように非粘性気泡の抗力係数のほぼ同じ値をとる。
2. 一様せん断流中の球形気泡の揚力は常に流速の遅い領域から速い領域へと働き、粒子レイノルズ数が増加すると非粘性流体中に置かれた固体球に働く揚力の値に漸近する。この傾向は非粘性気泡とほぼ同じであり、気泡の揚力係数は非粘性気泡の揚力係数よりも大きな値をとる。

以上の結果は、気泡に働く抗力や揚力を評価する場合、 $1 \leq Re_p < 50$ の領域では気泡を非粘性として扱うことは厳密には正しくないことを示唆している。

Fig. 11 Viscous lift coefficients for a spherical bubble and an inviscid bubble, $C_{L,f}$, versus the particle Reynolds number, Re_p , for $\alpha = 0.2$ and 0.4 .

Fig. 12 Pressure lift coefficients for a spherical bubble and an inviscid bubble, $C_{L,p}$, versus the particle Reynolds number Re_p for $\alpha = 0.2$ and 0.4 .

謝 辞

本研究は科学研究費補助金 (課題番号 14102016) の援助を受けて行われた。本数値計算は国立環境研究所地球環境センターのスーパーコンピュータ NEC SX-6 を使用して行われた。本研究の一部は、21 世紀 COE プログラム「動的機能機械システムの数理モデルと設計論」の支援を受けた。

文 献

- (1) Saffman P. G., The lift on a small sphere in a slow shear flow, *J. Fluid Mech.*, **22** (1965), 385-400.

- (2) Dandy D. and Dwyer H. A., A sphere in linear shear flow at finite Reynolds number: effect of shear on particle lift, drag, and heat transfer, *J. Fluid Mech.*, **216** (1990), 381-410.
- (3) McLaughlin J. B., The lift on a small sphere in wall-bounded linear shear flows. *J. Fluid Mech.*, **246** (1993), 249-265.
- (4) Kurose R. and Komori S., Drag and lift force on a rotation sphere in linear shear flow., *J. Fluid Mech.*, **384** (1999), 183-206.
- (5) Bagchi P. and Balachandrar S., Effect of rotation on the motion of a solid sphere in linear shear flow at moderate Re, *Phys. fluids*, **14** (2002), 2719-2737.
- (6) Mei R. and Klausner J. F., Shear lift force on spherical bubbles, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **15** (1994), 62-65.
- (7) Legendre D. and Magnaudet J., The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow, *J. Fluid Mech.*, **368** (1998), 81-126.
- (8) Kurose R., Misumi R. and Komori S., Drag and lift forces acting on a spherical bubble in a linear shear flow, *Int. J. Multiphase Flow*, **27** (2001), 1247-1258.
- (9) Legendre D. and Magnaudet J., A note on the lift force on a spherical bubble or drop in a low-Reynolds-number shear flow, *Phys. Fluids A*, **9**-11 (1997), 3572-3574.
- (10) Hanazaki H., A numerical study of three-dimensional stratified flow past a sphere, *J. Fluid Mech.*, **192** (1988), 393-419.
- (11) Sugioka K. and Komori S., Drag and lift forces acting on a spherical water droplet in homogeneous linear shear air flow, *J. Fluid Mech.*, **570** (2007), 155-175.
- (12) Kawamura, T. and Kuwahara K., Computation of high Reynolds number flow around circular cylinder with surface roughness, *AIAA paper* (1984), 84-0340.
- (13) Wohl P. R. & Rubinow S. I. 1974 The transverse force on a drop in an unbounded parabolic flow, *J. Fluid Mech.*, **62**, 185-207.
- (14) Leal, L. G. 1980 Particle motions in a viscous fluid, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **12**, 435-476.
- (15) Duineveld, P.C., The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high Reynolds number., *J. Fluid Mech.*, **292** (1995), 325-332.
- (16) Takemura, F. and Yabe, A., Gas dissolution process of spherical rising gas bubbles, *Chem. Engng. Sci.* **53**(15) (1998), 26891-2699.
- (17) Mei, R., Klausner, J.F. and Lawrence, C.J. A note on the history force on a spherical bubble at finite Reynolds number. *Phys. Fluids*, **6** (1994), 418-420.
- (18) Auton, T.R., The lift force on a spherical body in a rotational flow, *J. Fluid Mech.*, **183** (1987), 199-218.