異質部を有する血管の一次元格子モデルにおけるスケール特性*

渡 辺 知 規^{*1}Scale Properties of a One-Dimensional Lattice Model
for Blood Vessel with a Heterogeneous PartTomonori WATANABE^{*2}^{*2} Graduate School of Engineering, Chiba University,
1-33 Yayoi-cho, Inage-ku, Chiba-shi, Chiba, 263-8522 Japan

The scale properties of a one-dimensional lattice model for the blood vessel with a heterogeneous part (an extended Sakanishi model) have been investigated. In the present study, from the viewpoint of mechanics, a part of the blood vessel, which has the different mechanical properties of the vessel wall, that is, a part of arteriosclerosis, prosthesis and so on, is regarded as the heterogeneous part by a generalization for the one-dimensional lattice model. The stability of the solitary wave is applied in order to obtain the reliable results by the numerical analysis of the pulse wave which propagates through the heterogeneous part in the blood vessel. As a result, we show the behaviors of the pulse wave through the blood vessel with the heterogeneous part under the condition that the scale of the pulse wave, the length of the heterogeneous part and the mechanical properties of the vessel wall are changed.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Bio-Fluid Mechanics, Nonlinear Dynamics, Peaking, Steepening, Soliton, Exact Solution

1. 緒 言

血管系の疾患において、近年、大変深刻な問題となっているもののひとつに、脳梗塞や心筋梗塞などの原因ともなる動脈硬化症がある⁽¹⁾。一般に、動脈硬化は、一部の血管壁の力学的性質に異変が生じることに起因するとされている。一方、血管系疾患の治療等に用いられる人工血管では、人工物を人体に埋め込むことになるため、人為的に、血管壁に力学的性質の異なる部位を生じさせてしまうことになる。よって、これらのことから、血管系の解析にあたっては、血管壁の力学的性質の異なる部位が、血管を伝播する圧力脈波に及ぼす影響を明らかにすることは、物理学や医学の観点からだけでなく、医療などへの工学的応用といった観点からも、大変重要であると考えられる。

そのため、前報⁽²⁾においては、動脈硬化部や人工血管挿入部など、血管壁において力学的性質の異なる部位を、力学的観点から一般化し、血管の異質部として捉えることにより、異質部での力学的性質の違いが脈波に及ぼす影響を、力学的観点から広く明らかにする

ことを行った。解析にあたっては、血管壁の材料非線形性を考慮した血管の一次元格子モデルである坂西モデル⁽³⁾に着目し、既報⁽⁴⁾にて、数値解析上の信頼性についての確認を行った上で、血管に異質部が生じている場合に対して、坂西モデルの拡張を行った。ただし、一般に、血管系の解析では、対象とする系が、動脈から毛細血管まで、幅広いスケールにわたるため、一次元格子モデルの応用にあたっては、数値計算における空間離散化の近似精度の観点からだけでなく、非線形系を対象としているがゆえに、モデルそのものの妥当性といった観点からも、血管の大きさに対する脈波や異質部の大きさなどのスケールを適切に選択する必要が生じる。とりわけ、人工血管の適切な長さの見積もりは、医療の観点からも必要であると考えられる。ゆえに、血管の一次元格子モデルのスケール特性についての基礎的知見を得ることは、モデルの応用にあたり、大変重要である。

そこで、本研究では、異質部を有する血管の一次元格子モデルを対象として、モデルの持つスケール特性を明らかにすることを目的とする。そのために、異質部を有する血管の一次元格子モデルにおいて、異質部の力学的性質の違いが脈波に及ぼす影響を調べる上で、格子間隔に対する孤立波（脈波）の幅と振幅、および、

* 原稿受付 2008年2月29日。

^{*1} 正員、千葉大学大学院工学研究科人工システム科学専攻
(〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町1-33)。

E-mail: nabe@meneth.tn.chiba-u.ac.jp

異質部長さを変えた場合に生じる孤立波伝播の振舞いの変化について検討を行った。本研究では、前報⁽²⁾と同様に、坂西モデルに着目することで、主として、脈波に影響を及ぼす数多くの因子の中で、血管壁の力学的性質のみを浮き彫りにしていること、および、脈波が異質部を通過する際の振舞いを的確に把握するために、衝突や擾乱などに対して安定な孤立波（ソリトン）の性質を活用していることが大きな特徴となっている。

次章では、まず、本研究にて対象とする、異質部を有する血管の一次元格子モデルについて示す。つぎに、第3章にて、坂西モデルがもつ特徴を活用した数値解析の方法について述べる。第4章では、孤立波の幅と振幅、および、異質部長さのスケール特性として、血管壁の力学的性質が異質部を通過する孤立波に及ぼす影響に、異質部長さと孤立波の大きさがどのようにかわるのか、といった観点から考察を行う。

2. 異質部を有する血管の一次元格子モデル

本章では、本研究にて対象とする、坂西モデルを拡張した、異質部を有する血管の一次元格子モデルについて明らかにする。まず、坂西モデルとは、血管の軸方向の流体の流れに関する Navier-Stokes 方程式などから、軸方向の位置 x について、離散間隔（格子間隔） l と任意の整数 n を用いて、 $x = nl$ として離散化することにより、時刻 τ における血管の最低血圧に対する圧力差 $p_n(\tau)$ の時間的挙動を、非線形の微差分方程式によって記述するモデルのことである⁽³⁾。この坂西モデルの拡張として、前報⁽²⁾では、血管が、動脈硬化部や人工血管挿入部など、血管壁において力学的性質の異なる部位を有する場合を考え、それらの部位を、個別の状況の詳細にこだわるのではなく、力学的観点から一般化して、構成則のもつパラメータの値を正常部と異なるものを持つ部位（異質部）として取り扱った。具体的には、血管において、便宜上、異質部の左端を原点 $n = 0$ にとり、異質部の長さを L とした場合に、異質部を有する血管の一次元格子モデルとして、

- 正常部 ($n < -1$, および, $n > L+1$) では、

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \log \{1 + f_n(\tau)\} = f_{n+1}(\tau) - 2f_n(\tau) + f_{n-1}(\tau), \quad (1)$$

$$S = \exp(\varepsilon) - 1, \quad (2)$$

- 異質部 ($0 < n < L$) では、

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \log \left\{ 1 + \frac{f_n(\tau)}{a} \right\} = b \{ f_{n+1}(\tau) - 2f_n(\tau) + f_{n-1}(\tau) \}, \quad (3)$$

$$S = \frac{\bar{R}}{\bar{R}} \frac{h}{\bar{h}} a \{ \exp(b\varepsilon) - 1 \}, \quad (4)$$

という方程式を取り扱った。ただし、各変数は規格化がなされており、

$$f_n(t) := \frac{p_n(\tau)}{p_0}, \quad t := \sqrt{\frac{p_0}{2\rho l^2 \gamma_0}} \tau, \quad (5)$$

$$S := \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \varepsilon := \frac{\gamma}{\gamma_0}, \quad (6)$$

$$a := \frac{\bar{p}_0}{p_0}, \quad b := \frac{\gamma_0}{\bar{\gamma}_0}, \quad (7)$$

として与えられ、 σ と γ は、構成則における応力とひずみを表し、 ρ は、血液の密度、 R と h は、血管の内側半径と血管壁の厚さ、 σ_0 , p_0 , および、 γ_0 は、血管壁の材料特性によって決定する定数である。また、異質部中では、正常部とは異なるパラメータ値を持つ部位として、 σ_0 , p_0 , γ_0 , R , および、 h を、それぞれ、 $\bar{\sigma}_0$, $\bar{p}_0$, $\bar{\gamma}_0$, $\bar{R}$, および、 $\bar{h}$ とした。以下では、便宜上、格子間隔は 1 とする。式 (1) は、血管壁が構成則 (2) に従う場合の坂西モデルの方程式であり、式 (3) は、異質部において、血管壁の構成則が式 (4) に従う場合の方程式を意味する。坂西モデルがもつ最も重要な物理的特徴のひとつは、血管壁の材料非線形性が考慮されているということである。すなわち、血管壁の応力とひずみの関係が、構成則 (2) や (4) により、非線形な関係で記述されているということである。この構成則のもつ非線形性は、方程式 (1) や (3) がもつ非線形性の要因ともなっている。本研究では、異質部を有する血管の一次元格子モデルの方程式として、式 (1) から (4) を用いるものとする。

3. 解析方法

本章では、異質部を有する血管において、脈波の振舞いを的確に捉えるために、坂西モデルがソリトン解をもつという特徴を活用した解析方法について示す。

一般に、波は、分散性などにより、時間とともに波形を変化させることがある。この場合、本研究においては、異質部の存在の有無にかかわらず波形が変化することになるため、異質部によってもたらされる脈波への影響を特定することが困難になるものと考えられる。そこで、本研究では、坂西モデルがソリトン解をもつという特徴に着目し、異質部が脈波に及ぼす影響を的確に捉えるために、ソリトンの安定な孤立波であるという性質を活用する。

坂西モデルには、方程式が、非線形方程式であるにもかかわらず、解析的に解くことができ、 N ソリトン解と呼ばれる厳密解を導出できるという大きな特徴がある⁽⁵⁾。実際に、方程式 (1) について、定義域を考慮しない場合、厳密解として、1 ソリトン解：

$$f_n(t) = \sinh^2 k \operatorname{sech}^2(kn - \omega t), \quad (8)$$

を得ることができる⁽²⁾⁻⁽⁵⁾。ただし、ここで、 k は波数であり、周波数 ω は、分散関係式：

$$\omega = \pm \sinh k, \quad (9)$$

によって定まるものとする。解 (8) は、ソリトンと呼ばれる、 $1/k$ の幅をもつ安定な孤立波であることが知られており、この解を用いて、坂西らは、実験データをもとに、脈派の特徴についての考察を行い、ソリトン解 (8) が、実際の脈波がもつ特質を非常によく捉え、脈波の複雑な振舞いを再現することを明らかにしている⁽³⁾。また、事実、これまでの坂西モデルを応用した研究⁽²⁾⁽⁴⁾においても、ソリトン解 (8) を用いて、実際の脈波がもつ、時間の経過とともに、振幅を大きくし、波形を進行方向に対し急峻にするという性質などを再現できることが明らかになっている。そのうえ、上記以外の多くの研究においても、ソリトンによる脈波のモデル化の妥当性が示され、ソリトンを用いて、脈波にかかわる様々な振舞いを明らかにしようとする試みがなされている⁽⁶⁾。したがって、本研究においても、従来の研究との対比も考慮し、次章以降では、ソリトン解 (8) を孤立波と呼び、脈波のモデルとして採用するものとする。さらに、本研究では、解 (8) を脈波のモデルとして採用することによって、ソリトンであるという性質を積極的に利用しようとするのが大きな特徴となっている。すなわち、ソリトン解 (8) において、通常では、波形には、顕著な変化が生じないという性質を活用すると、異質部を有する血管において、孤立波に変化が生じた場合には、要因を異質部の存在によるものとして特定することができる。ゆえに、脈波が異質部を通過する際の振舞いについての確に把握できるものと考えられる。よって、本研究での解析においては、初期条件として式 (8) で表される孤立波を用い、孤立波が異質部を通過する際の振舞いについて検討を行うものとする。数値計算では、格子間隔に対する孤立波 (8) の幅 $1/k$ や振幅、および、異質部長さ L が、様々な値を持つ場合について、孤立波の振舞いについて検討した。

数値解法としては、前報⁽²⁾では、坂西モデルを対象とした数値解析上の信頼性についての既報⁽⁴⁾の結果を踏まえた上で、シンプレクティックスキーム⁽⁷⁾を採用した。そこで、本研究においても、これまでの研究結果⁽²⁾⁽⁴⁾との比較も考慮して、4 次のシンプレクティックスキームを用いることにする。ただし、時間についての差分間隔 δ は、 $\delta = 0.1$ とした。

4. 結果と考察

4.1 孤立波の波数特性 本節では、異質部を有する血管中での孤立波の振舞いについて、次節以降での考察に先立ち、孤立波そのものの特性について明らかにする。孤立波 (8) の特性は、波数 k に大きく依存

する。波数 k を変化させた場合の $t=0$ での孤立波 (8) の波形を図 1 に示す。図から、孤立波は、波数 k が大きくなるにつれて、幅が狭く、振幅が大きくなることがわかる。よって、このことから、異質部を有する血管の一次元格子モデルにおいて、波数 k が小さいほど、格子間隔 1 に対し、孤立波の幅 $1/k$ が大きくなるために、連続体近似が有効になり、さらに、孤立波の振幅も非常に小さくなるために、線形近似も有効になる特徴があることがわかる。また、孤立波の速度 v は、分散関係式 (9) から、

$$v = \frac{\sinh k}{k}, \quad (10)$$

となる。この式から、孤立波の速度 v は、波数 k とは、非線形関係にあり、波数 k が大きくなるにつれ、大きくなるがわかる。

4.2 系のスケールと異質部を通過する波の振舞い 本節では、格子間隔に対する孤立波の幅 $1/k$ や振幅、および、異質部長さ L が、様々な値を持つ場合において、異質部の力学的性質の違いが孤立波の伝播挙動に及ぼす影響を明らかにするため、波数 k と異質部長さ L に加え、異質部の力学的性質を特徴づけるパラメータである a と b をそれぞれ変化させた場合における、血管の各部位での孤立波の振舞いについて示す。

前報⁽²⁾によると、血管に異質部が存在する場合、脈波に影響を及ぼす力学的因子は、異質部での血管内側半径と血管壁の厚さに加え、通常部に対する異質部の応力-ひずみ曲線における、ひずみが零であるときの曲線の傾き (ab)、および、曲線の非線形性 (ab が一定のもとでの b) の大きさであった。また、異質部を通過する孤立波の大きな特徴として、細かな差異は認められるものの、材料非線形性の影響が小さい場合には、おおむね、 a と b がはる面において、孤立波の振舞いは、 $a=b$ に対称となる傾向があり、このことは、異質部を有する血管の各部位での孤立波の振舞いが、 ab の大きさによって特徴づけられることを意味していた⁽²⁾。これらのことをふまえ、以下では、通常部に対する異質部の応力-ひずみ曲線のひずみが零であるときの曲線の傾き、および、曲線の非線形性 (血管壁の材料非線形性) といった観点から考察を行う。

4.2.1 応力-ひずみ曲線のひずみが零での傾き 異質部の長さ L と孤立波の幅 $1/k$ の大きさが、異質部を通過する孤立波の振舞いに及ぼす影響を明らかにするために、図 2 から図 6 に、血管の各部位における、孤立波の振幅の最大値についての代表的な結果を示す。各図では、先に述べたとおり、 $a=b$ の対称性と、血管の各部位での孤立波の振舞いが、異質部における応力-ひずみ曲線のひずみが零での傾き ab の大き

Fig. 1 Pressure wave (8) for each wave number.

Fig. 2 Maximum amplitude of the pressure wave at $n = L + 50$ (normal part) for $k = 0.02$.

さによって特徴づけられることを考慮し、 $a = b$ のもとで ab を変化させた場合について示した。図2から図4では、異質部の長さ L のスケール特性として、異質部の長さを変化させ、図5と図6では、孤立波の幅 $1/k$ のスケール特性として、波数 k を変化させた。ただし、ここで、異質部右端の影響を無視できる程度に充分な大きさをもった異質部の長さを $L = L_{\text{inf}}$ とした。各図での条件としては、図2は、波数 $k = 0.02$ にて、位置 $n = L + 50$ での異質部を通過した透過波、図3は、波数 $k = 0.025$ にて、異質部中点の位置 $n = L/2$ を通過する孤立波、図4は、波数 $k = 0.05$ にて、異質部入射時の位置 $n = -50$ での反射波、図5は、長さ $L = 50$ の異質部を通過した位置 $n = 100$ での透過波、および、図6は、長さ $L = 100$ の異質部を通過する異質部中点の位置 $n = 50$ での孤立波である。

いずれの図においても、異質部の長さ L 、および、孤立波の幅 $1/k$ の大きさによって、孤立波の振幅の最大値が変化していることがわかる。異質部の長さ L と孤立波の幅 $1/k$ の大きさの違いによる孤立波の振幅の最大値の差は、 $ab > 1$ では、 ab が大きくなるほど、顕著になっている。とりわけ、図4においては、異質部右端とはかかわりが無いように思える反射波が、異質部長さの影響をうけ、同様の傾向が得られている。では、この孤立波の振幅の最大値の差は、どのようにしてもたらされるのであろうか？

図7、および、図8に、波数 k を $k = 0.05$ 、異質部長さ L を $L = 100$ とした時の、孤立波の時間発展の様

Fig. 3 Maximum amplitude of the pressure wave at $n = L/2$ (heterogeneous part) for $k = 0.025$. Fig. 4 Maximum amplitude of the pressure wave (reflection) at $n = -50$ for $k = 0.05$.

子を示す。なお、各図は、異質部を通過する際の脈波の振舞いについての代表的な例として、パラメータ a と b を、図7では、 $ab < 1$ の場合として、 $a = 0.2$ 、および、 $b = 0.2$ とし、図8では、 $ab > 1$ の場合として、 $a = 5$ 、および、 $b = 5$ とした。

まず、 $ab < 1$ の場合である図7では、異質部から充分に離れた位置から伝播してきた孤立波は、時刻 $t = 0$ において、異質部左端 ($n = 0$) に到達する (A)。その際、孤立波は、徐々に振幅を小さくさせ、異質部中を通過する波と反射する波に分かれる (B)。そして、異質部中を通過する波は、異質部右端 ($n = 100$) に到達した際には、再び、反射波と異質部を透過する波に分かれる (C)。

つぎに、 $ab > 1$ の場合である図8では、時刻 $t = 0$ において、異質部左端 ($n = 0$) に到達した孤立波 (A) は、徐々に振幅を大きくさせ、異質部中を通過する波と反射する波に分かれる (B)。そして、異質部中を通過する波は、異質部右端 ($n = 100$) に到達した際には、再度、反射波と異質部を透過する波に分かれる (C)。ただし、図7の場合との違いは、異質部左端 ($n = 0$)、および、異質部右端 ($n = 100$) での反射波の振幅の符号が、図7では、それぞれ、負と正であるのに対し、図8では、逆に、正と負になっていることである。これは、前報⁽²⁾によると、反射波の振幅の符号が、 ab の大きさに依存するためであり、相対的に ab が小さな部位に波が入射する場合には、反射波の振幅は負とな

Fig. 5 Maximum amplitude of the pressure wave at $n = 100$ (normal part) for $L = 50$.

Fig. 6 Maximum amplitude of the pressure wave at $n = 50$ (heterogeneous part) for $L = 100$.

り、逆に、相対的に ab が大きな部位に波が入射する場合には、反射波の振幅は正となることが明らかになっている。

また、ここで、注目すべきは、どちらの場合においても、孤立波の頂点が力学的性質の異なる部位に入射する以前に波形に大きな変化が起きているということである。とくに、図8において、異質部に入射する孤立波(A)に着目すると、孤立波の頂点が異質部左端($n=0$)に到達する以前に、異質部中での波形には変化が生じ、さらに、異質部右端($n=100$)では、すでに孤立波の存在によって、圧力 f_{100} の値は、本来の(図1における $k=0.05$ の)波形と比べて、大きくなっているということである。

では、以上のことをふまえ、異質部長さが孤立波の幅に比べて十分な大きさが無い場合を考えると、波形にはどのような変化が生じるのであろうか？

孤立波の幅に比べて十分な異質部長さが無い場合には、図8にて見たとおり、孤立波の頂点が異質部左端に到達する以前に、異質部右端での波の振幅は大きくなり、さらには、ただちに、反射波が発生すると考えられる。よって、異質部中における波には、異質部左端から来る入射波と異質部右端から来る反射波による干渉が生じると考えられる。

具体的には、 $ab > 1$ の場合では、異質部左端にて、入射波の振幅は小さくなるが、異質部右端にて発生す

Fig. 7 Temporal behavior of the pressure wave through the heterogeneous part for $L = 100$, $k = 0.05$, $a = 0.2$ and $b = 0.2$.

Fig. 8 Temporal behavior of the pressure wave through the heterogeneous part for $L = 100$, $k = 0.05$, $a = 5$ and $b = 5$.

る反射波の振幅が正であるために、波の干渉の結果、振幅は増加すると考えられる。逆に、 $ab > 1$ の場合では、異質部左端にて、入射波の振幅は大きくなるが、異質部右端にて発生する反射波の振幅は負であるために、波の干渉の結果、波の振幅は減少すると考えられる。実際に、図3によると、波の干渉の効果として、異質部長さ L が小さくなるにつれて、 $ab < 1$ の場合では、振幅の最大値が増加し、 $ab > 1$ の場合では、振幅の最大値が減少していることがわかる。

以上のことは、孤立波の幅と異質部長さとの兼ね合いとして捉えることができ、同様のことは、孤立波の幅に比べて十分な異質部長さが無い場合だけでなく、孤立波の幅が異質部長さに比べて十分に大きな場合にも生じると考えられる。事実、図6によると、波の干渉の効果として、波数 k が小さくなるにつれて、孤立波の幅 $1/k$ が大きくなるために、 $ab < 1$ の場合では、振幅の最大値が増加し、 $ab > 1$ の場合では、振幅の最大値が減少していることがわかる。

また、反射波の場合では、孤立波の頂点が異質部左端に達した際に発生する反射波には、すでに、波の干渉によって異質部右端の影響が含まれていると考えられる。実際に、異質部右端の影響を取り除くために、

Fig. 9 Maximum amplitude of the pressure wave at $n = -50$ (normal part) for $L = L_{\text{inf}}$.

異質部長さを $L = L_{\text{inf}}$ とした場合での、位置 $n = -50$ での反射波の振幅の最大値について示した図9によると、孤立波の幅 $1/k$ に対するスケール依存性がなくなっていることがわかる。さらに、これらのことから、透過波である、図2と図5においても、異質部長さが大きく、もしくは、孤立波の幅が小さくなるにつれて、前報⁽²⁾にて示したような、正常部と異質部との力学的性質の異なる部位間において、 ab の大きさによって決定する相対的關係による結果に近づくことがわかる。

以上をまとめると、異質部の長さ L と孤立波の幅の大きさの違いによる孤立波の振幅の最大値の差は、波の干渉によってもたらされ、異質部長さ L と波数 k が小さい時、すなわち、異質部長さが小さく、孤立波の幅が大きくなるほど、波の干渉による影響は大きくなる。

4.2.2 血管壁の材料非線形性 本項では、血管壁の材料非線形性の影響が小さい場合を対象としていた前項に対し、異質部長さ L と波数 k の大きさが異質部を通過する孤立波に及ぼす影響を、血管壁の材料非線形性の観点から考察する。

血管壁の材料非線形性の大きさは、 ab が一定のもとでの b の大きさに依存する。これは、構成則 (4) によって理解することができる。すなわち、構成則 (4) において、 ab を一定にして、 b を大きくした場合は、応力-ひずみ曲線の非線形性は大きくなり、逆に、 b を小さくした場合は、血管壁は、線形弾性体としての振舞いをする事がわかる。前報⁽²⁾では、血管壁の材料非線形性は、脈波の伝播において、非線形性 (b の値) が大きくなることで、時間の経過とともに、振幅を大きくし、波形を進行方向に対し急峻にする働きがあることが明らかになっている。では、このような血管壁の材料非線形性の働きに対し、異質部長さ L と波数 k の大きさは、どのような影響を及ぼすのであろうか？ 異質部長さ L の影響としては、前報⁽²⁾の結果を考慮すると、異質部長さが大きくなることは、異質部にて孤立波が伝播する距離が長くなることを意味するので、血管壁の材料非線形性によって、時間の経過と

ともに、孤立波の振幅が大きくなり、波形が進行方向に対し急峻になる傾向が、顕著になると考えられる。また、波数 k の影響としては、第4.1節にて考察をしたとおり、波数 k が大きくなるにつれて、孤立波の振幅が大きくなるために、方程式 (1) や (3) がもつ非線形性の効果が著しくなると考えられる。

実際に、 $ab = 1$ のもとで $b = 10$ とした場合での、位置 $n = L + 50$ における異質部を通過した透過波の振幅の最大値を、図10に示す。この図から、異質部長さ L と波数 k が大きくなるにつれて、透過波の振幅の最大値が大きくなっていることがわかる。また、異質部長さ L と波数 k が異なる場合の波形を示した図11によると、異質部長さや波数（初期波形としての孤立波の振幅）が大きいくほど、異質部通過時の孤立波の振幅は大きくなり、波形が進行方向に対し急峻になっていることがわかる。よって、これらのことから、異質部長さや波数が大きくなるにつれて、非線形性の働きが促されることがわかる。ただし、図11では、波数が $k = 0.08$ と $k = 0.1$ の孤立波の初期波形 A と B について、それぞれ、異質部長さ L が $L = 100$ のときの異質部中点付近での孤立波の波形を C と D、異質部長さ L が $L = 400$ のときの異質部中点付近での孤立波の波形を E と F とした。

以上をまとめると、異質部長さ L と波数 k の大きさは、血管壁の材料非線形性の働きの促進に影響し、異質部長さ L と波数 k が大きくなるにつれて、血管壁の材料非線形性の働きは顕著になる。

4.3 相似性 第4.2.1項では、血管壁の材料非線形性の影響が小さい場合において、孤立波の振舞いは、孤立波の幅と異質部の長さとの兼ね合いによって決定することが明らかになった。では、孤立波の幅と異質部の長さとの割合が同じならば、孤立波の振舞いは同じになるのであろうか？

図12に、代表的な例として、孤立波の幅 $1/k$ と異質部の長さ L の比を $1/k : L = 1 : 5$ 、すなわち、 $kL = 5$ とした場合の位置 $n = L + 50$ における異質部を通過した透過波の振幅の最大値を示す。ただし、波数と異質部長さには、 $(1/k, L) = (10, 50), (20, 100), (40, 200)$ 、および、 $(50, 250)$ を用いた。図から、おおむね、 ab が小さい場合を除き、透過波の振幅の最大値は、いずれの波数と異質部長さの組み合わせにおいても、ほぼ一致することがわかる。同様の傾向は、概して、血管中の他の部位での結果や、孤立波の幅と異質部長さの大きさについて異なる割合の場合についての結果においても得られた。したがって、血管壁の材料非線形性の影響が小さく、 ab が大きい場合において、孤立波の振

Fig. 10 Maximum amplitude of the pressure wave at $n = L + 50$ (normal part) for $b = 10$ ($ab = 1$).

Fig. 11 Initial form of the pressure waves and the pressure waves at around $n = L/2$ for $k = 0.08$, $k = 0.1$, $L = 100$, $L = 400$ and $b = 10$ ($ab = 1$).

舞いには、孤立波の幅と異質部の長さによる相似関係が、おおむね成り立つものと考えられる。

5. 結 言

本研究では、異質部を有する血管の一次元格子モデルにおけるスケール特性について数値解析による検討を行った。以下に、得られた主な結果を示す。

- (1) 異質部の長さ L と孤立波の幅の大きさの違いによる孤立波の振幅の変化は、波の干渉によってもたらされ、異質部長さ L と波数 k が小さいとき、すなわち、異質部長さが小さく、孤立波の幅が大きくなるほど、波の干渉による影響は大きくなる。
- (2) 異質部長さ L と波数 k の大きさは、血管壁の材料非線形性の働きに影響し、異質部長さ L と波数 k が大きくなるにつれて、血管壁の材料非線形性の働きは顕著になる。
- (3) 血管壁の材料非線形性の影響が小さく、異質部の応力-ひずみ曲線のひずみが零での傾きが大きい場合、孤立波の振幅には、孤立波の幅と異質部の長さによる相似関係が、おおむね成り立つ。

一般に、数値解析では、計算機の制約上、空間変数等に適切な離散幅を設定するなどの離散化の手続きが必要となる。この離散化の手続きは、現象の再現性や数値的な精確性など、近似の妥当性や、さらに、計算

Fig. 12 Maximum amplitude of the pressure wave at $n = L + 50$ (normal part) for $kL = 5$.

効率に大きく関わる重要な要素のひとつとなっている。本研究のように、血管系を対象とした場合、妥当な数値解析を行うためには、系のもつ非線形性ゆえに、離散化の際に、離散幅だけでは充分ではなく、離散幅に対する脈波の大きさや異質部長さなどのスケールを適切に選択する必要がある。これに対し、各スケールにおいて孤立波に生じる変化や、各スケール間について明らかにした本研究の結果は、系に対する物理学的理解を深めるだけでなく、系のスケール依存性をあらかじめ数理的に把握することで、計算の効率化や結果の妥当性の確認などへの指針を与え、信頼性のある数値解析法の構築と有効性を高めるために、有用な基礎的知見を与えることができるものと考えられる。

本研究の一部は、文部科学省科学研究費の援助を受けてなされた。ここに感謝の意を表す。

文 献

- (1) For example; Liu, H., Yamaguchi, T. & Himeno, R., Blood Flow Simulation in Cardiovascular System, *Medical Imaging Technology*, Vol.20, (2002), pp.615–621, and references therein.
- (2) Watanabe, T., Effect of Mechanical Properties of a Heterogeneous Part in Blood Vessel on Pulse Wave, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. B*, to appear.
- (3) Sakanishi, A., Hasegawa, M. & Ushiyama, Y., Pressure Pulse Wave for Blood Flow in the Aorta from the Viewpoint of the Nonlinear Toda Lattice, *Physics Letters A*, Vol.221, (1996), pp.395–399.
- (4) Watanabe, T., Numerical Analysis for a One-dimensional Lattice Model associated with Material Nonlinearity of Arterial Vessel Wall, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. B*, Vol.74, (2008), pp.523–529.
- (5) Toda, M., Development of the Theory of a Nonlinear Lattice, *Supplement of the Progress of Theoretical Physics*, Vol.59, (1976), pp.1–35.
- (6) For example; Yomosa, A., Solitary Waves in Large Blood Vessels, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol.56, (1987), pp.506–520, and references therein.
- (7) Yoshida, H., Recent Progress In the Theory and Application of Symplectic Integrators, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol.56, (1993), pp.27–43.