生体内熱移動方程式に関する一考察*

高津 康幸^{*1}, 増岡 隆士^{*2}

Modeling of Bio-Heat Equation

Yasuyuki TAKATSU^{*3} and Takashi MASUOKA^{*3} Department of Mechanical Engineering, Kure College of Technology,
2-2-11 Agaminami, Kure-shi, Hiroshima, 737-8506 Japan

A theoretical study has been made on the transport phenomena of the blood flow in the human body. To develop a discussion about the enthalpy transport in the bio-heat equation, we will need the information about a velocity field of blood flow. Therefore, we have proposed a bio-heat equation along with bio-continuity and momentum equations. With the aid of a local volume averaging, the macroscopic governing equations are derived from the microscopic governing equations, where the flow in the arterial and venous blood vessels is treated as one-dimensional pipe flow and the flow in the capillary blood vessels is approximated as the flow through porous media. Furthermore, we examine the boundary condition at the interface between the fluid and porous layers, and clarify the mechanism of the interfacial heat transfer between the artery (or vein) and the tissue.

Key Words: Biological Components and Systems, Governing Equation, Bio-Heat Equation, Pipe Flow, Porous Media, Boundary Condition

1. 緒 言

生体内熱移動方程式としては, Pennes⁽¹⁾により提案されたものが広く用いられている。

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_t \nabla^2 T + \rho_b c_b w_b (T_a - T) + Q$$

ここで, T : 組織温度, T_a : 動脈温度, w_b : 組織単位体積あたりの血液流量である。Pennesの式においては, 血液灌流によるエンタルピ輸送を等方発熱項として取り扱う簡便な生体内熱移動方程式であるが, 血管幾何構造や灌流について詳細には議論していない。一方, Weinbaum-Jiji⁽²⁾は, 対向流による熱交換の概念を導入し, 血液灌流によるエンタルピ輸送項に対し非等方的な取り扱いならびに非等方的な見かけの熱伝導率を用いた定式化を行い, Pennesの式の改良を試みている。しかしながら, Weinbaum-Jijiにより提案された生体内熱移動方程式を解くためには血管網の幾何形状が既知である必要があり, 実用的な方程式とは言い難い。また, 横山⁽³⁾は, 動脈系および静脈系小ブール

という概念を導入した生体内熱移動方程式を提案しているが, 式に含まれる熱伝達率を規定するまでには至っていない。

概して, 従来の生体内熱移動方程式に関しては, 運動量方程式とリンクせずにエネルギー方程式単独で現象を記述するものであり, 血流の速度場にはそれほど関心が払われていないといえる。しかしながら, 血流は生体内体温調節において重要な役割を果たすものと考えられる。例えば, 人体まわりの環境温度が低い場合には, 血管の収縮が生じ体表面近傍の静脈内の血流が減少し, 人体から周囲環境への熱移動が抑制される。逆に, 環境温度が高い場合には, 血管の膨張が生じ体表面近傍の静脈内の血流が増加し, 人体から周囲環境への熱移動が促進される。このような生体内熱移動現象を予測するためには, 運動量方程式とリンクした生体内熱移動方程式が必要となる。さらに, 従来の血液の流れに対する研究⁽⁴⁾においては, ミクロな視点から血管内の血液のレオロジーは詳細に議論されているものの, ミクロな速度場の挙動を反映するマクロな運動量方程式については議論されていない。しかしながら, 生体内エネルギー方程式とリンクさせる場合には, ミクロな速度場よりむしろマクロな速度場が必要となる。

* 原稿受付 2007年11月5日。

^{*1} 正員, 呉工業高等専門学校機械工学科(〒737-8506 呉市阿賀南2-2-11)。^{*2} 正員, フェロー, 北九州市立大学国際環境工学部(〒808-0135 北九州市若松区ひびきの1-1)。

E-mail: takatsu@kure-nct.ac.jp

本研究では、多孔質のマクロな輸送方程式を導出するために用いられる局所体積平均の概念⁽⁵⁾を、ミクロな生体内速度および温度場に適用し、マクロな生体内熱移動方程式を構築していく。局所体積平均の概念を生体内熱移動方程式の導出に適用するという試みは、著者らの研究⁽⁶⁾、そして最近では中山らの研究⁽⁷⁾に認められる。局所体積平均の概念を導入することにより、生体内熱移動方程式中に動脈(あるいは静脈)-組織間の熱伝達を表す項がもたらされるのであるが、温度などの界面物理量の取り扱いが不明であるため、生体内熱移動方程式において重要な役割を果たす界面熱伝達機構のモデリングは十分であるとは言えない。そこで、本研究では、生体内熱移動方程式を構築するにあたり、組織を多孔質近似し、高津・増岡⁽⁸⁾による流体-多孔質界面境界条件を適用することにより動脈(あるいは静脈)-組織界面物理量を決定し、界面熱伝達機構を明らかにしていく。

2. おもな記号

A_{at} : 検査体積 V における動脈-組織相界面の面積	m^2
A_{vt} : 検査体積 V における静脈-組織相界面の面積	m^2
a_{at} : 動脈-組織相界面の比面積 $\equiv A_{at}/V_a$	m^{-1}
a_{vt} : 静脈-組織相界面の比面積 $\equiv A_{vt}/V_v$	m^{-1}
c_b : 血液の比熱	$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
c_t : 組織の比熱	$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
d_a : 動脈の直径	m
d_v : 静脈の直径	m
h : 熱伝達率	$\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$
k : 組織の透過率	m^2
K : 熱通過率	$\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$
n : 動脈-組織相もしくは静脈-組織相界面での単位法線ベクトル(図1参照)	
P : 圧力	Pa
Pe : ペクレ数	
Q : 組織の単位体積単位時間あたりの代謝熱	W/m^3
r : 動脈・静脈相の半径方向	m
t : 時間	s
T : 温度	K
u : 速度	m/s
$\mathbf{u}$: 速度ベクトル	m/s
V : 検査体積 $\equiv V_a + V_v + V_t$	m^3
V_a : 検査体積 V における動脈相体積	m^3
V_v : 検査体積 V における静脈相体積	m^3

Fig.1 Vascular network

V_t : 検査体積 V における組織相体積 m^3

z : 動脈・静脈相の主流方向 m

ε : 組織の空げき率

ϕ : 体積割合

λ_b : 血液の熱伝導率 $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$

λ_t : 組織の熱伝導率 $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$

μ : 血液の粘性係数 $\text{Pa}\cdot\text{s}$

ρ_b : 血液の密度 kg/m^3

ρ_t : 組織の密度 kg/m^3

添字

a : 動脈

t : 組織

v : 静脈

3. 局所体積平均

Weinbaum-Jiji⁽²⁾によって提唱された血管網のモデルにおいては、動脈と静脈は対を成し、対向流として取り扱われている。本研究においても、図1に示すように、検査体積 V においては、対向流を成す動脈と静脈の対が存在する血管網を取り扱う。

生体内輸送方程式を導出するにあたり、局所体積平均処理⁽⁵⁾について簡単に述べておく。まず、検査体積 V に占める動脈・静脈および組織の体積割合に関して、

$$\phi_a \equiv \frac{V_a}{V}, \quad \phi_v \equiv \frac{V_v}{V}, \quad \phi_t \equiv \frac{V_t}{V} \dots\dots\dots (1)$$

とし、動脈・静脈および組織の各相における物理量 B の局所体積平均を

$$\left. \begin{aligned} \langle B \rangle^a &\equiv \frac{1}{V_a} \int_{V_a} B dV, & \langle B \rangle^v &\equiv \frac{1}{V_v} \int_{V_v} B dV \\ \langle B \rangle^t &\equiv \frac{1}{V_t} \int_{V_t} B dV \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

と定義する。また、動脈と静脈は吻合しないとすれば、局所体積平均の発散・勾配定理として、

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{div} \mathbf{B} \rangle^a &= \text{div} \langle \mathbf{B} \rangle^a + \frac{1}{V_a} \int_{A_{at}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA \\ \langle \text{div} \mathbf{B} \rangle^v &= \text{div} \langle \mathbf{B} \rangle^v + \frac{1}{V_v} \int_{A_{vt}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA \\ \langle \text{div} \mathbf{B} \rangle^t &= \text{div} \langle \mathbf{B} \rangle^t - \frac{1}{V_t} \int_{A_{at} + A_{vt}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \nabla B \rangle^a &= \nabla \langle B \rangle^a + \frac{1}{V_a} \int_{A_{at}} B \mathbf{n} dA \\ \langle \nabla B \rangle^v &= \nabla \langle B \rangle^v + \frac{1}{V_v} \int_{A_{vt}} B \mathbf{n} dA \\ \langle \nabla B \rangle^t &= \nabla \langle B \rangle^t - \frac{1}{V_t} \int_{A_{at} + A_{vt}} B \mathbf{n} dA \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

が得られる。

4. 連続の式

検査体積 V での動脈・静脈および組織相において、微視的には連続の式が成立している。

$$\text{div} \mathbf{u} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

なお、組織相は多孔質近似し、多孔質内空隙は毛細血管に対応する。検査体積中の動脈・静脈および組織の各相に対して上式の局所体積平均をとることにより、マクロな連続の式が得られる。すなわち、局所体積平均の発散定理〔式(3)〕を適用すれば、動脈および静脈相でのマクロな連続の式は、

$$\langle \text{div} \mathbf{u} \rangle^a = \text{div} \langle \mathbf{u} \rangle^a + \frac{1}{V_a} \int_{A_{at}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\langle \text{div} \mathbf{u} \rangle^v = \text{div} \langle \mathbf{u} \rangle^v + \frac{1}{V_v} \int_{A_{vt}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

となり、組織相でのマクロな連続の式は、

$$\langle \text{div} \mathbf{u} \rangle^t = \text{div} \langle \mathbf{u} \rangle^t - \frac{1}{V_t} \int_{A_{at} + A_{vt}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。

Weinbaum-Jiji⁽²⁾によって提唱された血管網のモデルでは、動脈および静脈から派生した横断血管の分岐を経て毛細血管に至っている。本モデルでは、動脈および静脈(管内流近似)まわりは組織(多孔質近似)に囲まれる系を考え、動脈および静脈の管壁(透過壁)を通しての組織内毛細血管への血流の流入・流出から、灌流の効果を取り扱っていく。透過壁から一様な速度 $(u_r)_{at}$, $(u_r)_{vt}$ で流入・流出すると仮定すれば、

$$\frac{1}{V_a} \int_{A_{at}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = (u_r)_{at} \frac{A_{at}}{V_a} = (u_r)_{at} a_{at} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{1}{V_v} \int_{A_{vt}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = (u_r)_{vt} \frac{A_{vt}}{V_v} = (u_r)_{vt} a_{vt} \quad \dots\dots\dots (10)$$

なお、上式に関しては、動脈ならびに静脈相の占める体積に対して局所体積平均処理を行っているため、検査体積中に動脈ならびに静脈血管が複数存在したとしても、動脈ならびに静脈相の支配方程式においては単管における平均速度場を取り扱うことになる。また、 a_{at} , a_{vt} は界面の比面積(単位体積あたりの界面の面積)であり、動脈および静脈を円管で近似するならば、

$$a_{at} = \frac{4}{d_a}, \quad a_{vt} = \frac{4}{d_v} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。

数値解析などにおいては、四肢などの体の部位は円筒座標系で表され、動脈および静脈内血流の主流方向は軸方向として取り扱われる⁽³⁾。そこで、動脈および静脈相内の微視的流れを、軸方向(z 方向)が主流となる管内1次元流として取り扱えば、動脈および静脈相でのマクロな連続の式は、次式で表される。

$$\frac{\partial \langle u_z \rangle^a}{\partial z} = -(u_r)_{at} a_{at} = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial \langle u_z \rangle^v}{\partial z} = -(u_r)_{vt} a_{vt} = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (13)$$

なお、本研究では、血流場によってもたらされるエンタルピー輸送の基本メカニズムを明らかにすることを主眼としており、先ずは流入・流出 $(u_r)_{at}$, $(u_r)_{vt}$ は一定として取り扱う生体血流モデルを展開していく。一方、動脈-組織相ならびに静脈-組織相界面において、血流の流入・流出速度が連続するという条件より、組織相でのマクロな連続の式として次式が得られる。

$$\text{div} \langle \mathbf{u} \rangle^t + \frac{1}{\phi_t} \left[\phi_a \frac{\partial \langle u_z \rangle^a}{\partial z} + \phi_v \frac{\partial \langle u_z \rangle^v}{\partial z} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

上式左辺第2項および第3項に関して、単管における動脈および静脈相灌流の効果は、体積比 ϕ_a/ϕ_t , ϕ_v/ϕ_t を考慮することにより、一様なものとして組織相では取り扱われている。

5. 運動量方程式

多孔質として取り扱う組織相では、微視的すなわち検査体積 V においては Darcy 則⁽⁹⁾が成立しているとする。

$$\frac{\rho_b}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla P - \frac{\mu}{k} \mathbf{u} \quad \dots\dots\dots (15)$$

上式の局所体積平均をとることにより、マクロな運動

量方程式が得られる。

$$\frac{\rho_b}{\varepsilon} \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle^t}{\partial t} = -\nabla \langle P \rangle^t - \frac{1}{V_t} \int_{A_{at}+A_{vt}} P n dA - \frac{\mu}{k} \langle \mathbf{u} \rangle^t \quad \dots\dots\dots (16)$$

上式右辺第2項の管まわりの形状抵抗は、管壁まわりの圧力分布を一樣とし、

$$\frac{1}{V_t} \int_{A_{at}+A_{vt}} P n dA = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (17)$$

と取り扱う。すなわち、組織相でのマクロな運動量方程式は、

$$\frac{\rho_b}{\varepsilon} \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle^t}{\partial t} = -\nabla \langle P \rangle^t - \frac{\mu}{k} \langle \mathbf{u} \rangle^t \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。

6. エネルギー方程式

検査体積 V での動脈および静脈相において、微視的観点からエネルギー方程式を取り扱う。

$$\rho_b c_b \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{u}T) \right] = -\text{div} \mathbf{q} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\mathbf{q} = -\lambda_b \nabla T \quad \dots\dots\dots (20)$$

動脈および静脈相に対して上式の局所体積平均をとることにより、マクロなエネルギー方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho_b c_b \left[\frac{\partial \langle T \rangle^a}{\partial t} + \text{div} \langle \mathbf{u}T \rangle^a + \frac{1}{V_a} \int_{A_{at}} (\mathbf{u}T) \cdot \mathbf{n} dA \right] \\ = -\text{div} \langle \mathbf{q} \rangle^a - \frac{1}{V_a} \int_{A_{at}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_b c_b \left[\frac{\partial \langle T \rangle^v}{\partial t} + \text{div} \langle \mathbf{u}T \rangle^v + \frac{1}{V_v} \int_{A_{vt}} (\mathbf{u}T) \cdot \mathbf{n} dA \right] \\ = -\text{div} \langle \mathbf{q} \rangle^v - \frac{1}{V_v} \int_{A_{vt}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

マクロな動脈相エネルギー方程式(21)に関して、 z 方向の周期性を考慮すれば⁽¹⁰⁾、左辺第2項は、

$$\text{div} \langle \mathbf{u}T \rangle^a = \frac{\partial \langle u_z \rangle^a \langle T \rangle^a}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (23)$$

となる。式(21)左辺第3項に関して、管壁は透過壁であることを考慮すれば、マクロな連続の式を用いて、次のように表される。

$$\frac{1}{V_a} \int_{A_{at}} (\mathbf{u}T) \cdot \mathbf{n} dA = -(T)_{at} \frac{\partial \langle u_z \rangle^a}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで、 $(T)_{at}$ は、動脈-組織相界面での温度である。式(20)の熱流束ベクトルの局所体積平均は、

$$\langle \mathbf{q} \rangle^a = -\lambda_b \left[\nabla \langle T \rangle^a + \frac{1}{V_a} \int_{A_{at}} T n dA \right] \quad \dots\dots\dots (25)$$

と与えられる。管壁まわりの温度分布が一樣であると仮定し、

$$\frac{1}{V_a} \int_{A_{at}} T n dA = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (26)$$

と取り扱えば、式(21)右辺第1項は、

$$\text{div} \langle \mathbf{q} \rangle^a = -\lambda_b \frac{\partial^2 \langle T \rangle^a}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (27)$$

となる。さらに、式(21)右辺第2項は、

$$\frac{1}{V_a} \int_{A_{at}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA = -\lambda_b \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{at} a_{at} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここで、 $(\partial T / \partial r)_{at}$ は、動脈-組織相界面での温度勾配である。

すなわち、動脈相でのマクロなエネルギー方程式は、

$$\begin{aligned} \rho_b c_b \left[\frac{\partial \langle T \rangle^a}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_z \rangle^a \langle T \rangle^a}{\partial z} \right] - (T)_{at} \frac{\partial \langle u_z \rangle^a}{\partial z} \\ = \lambda_b \frac{\partial^2 \langle T \rangle^a}{\partial z^2} + \lambda_b \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{at} a_{at} \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

となる。同様に、静脈相でのマクロなエネルギー方程式は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \rho_b c_b \left[\frac{\partial \langle T \rangle^v}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_z \rangle^v \langle T \rangle^v}{\partial z} \right] - (T)_{vt} \frac{\partial \langle u_z \rangle^v}{\partial z} \\ = \lambda_b \frac{\partial^2 \langle T \rangle^v}{\partial z^2} + \lambda_b \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{vt} a_{vt} \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

ここで、 $(T)_{vt}$ は静脈-組織相界面での温度、 $(\partial T / \partial r)_{vt}$ は静脈-組織相界面での温度勾配である。

一方、多孔質として取り扱う組織相では、微視的すなわち検査体積 V において成立するエネルギー方程式は、次式で表される。

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_b c_b \text{div}(\mathbf{u}T) = -\text{div} \mathbf{q}_t + Q \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\mathbf{q}_t = -\lambda_t \nabla T \quad \dots\dots\dots (32)$$

組織の代謝熱 Q は、検査体積 V において一樣であるとする。上式の局所体積平均をとることにより、マクロな組織相エネルギー方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho_t c_t \frac{\partial \langle T \rangle^t}{\partial t} + \rho_b c_b \left[\text{div} \langle \mathbf{u}T \rangle^t \right. \\ \left. - \frac{1}{V_t} \int_{A_{at}+A_{vt}} (\mathbf{u}T) \cdot \mathbf{n} dA \right] \\ = -\text{div} \langle \mathbf{q}_t \rangle^t + \frac{1}{V_t} \int_{A_{at}+A_{vt}} \mathbf{q}_t \cdot \mathbf{n} dA + Q \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

マクロな組織相エネルギー方程式(33)に関して、多孔質近似された組織相内部幾何構造の周期性を考慮すれば⁽¹⁰⁾、左辺第2項は、

$$\text{div} \langle \mathbf{u}T \rangle^t = \text{div} \langle \langle \mathbf{u} \rangle^t \langle T \rangle^t \rangle \quad \dots\dots\dots (34)$$

となる。動脈-組織相界面および静脈-組織相界面において、エンタルピー輸送は連続することになるので、式(24)などを用いて、式(33)左辺第3項は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_t} \int_{A_{at}+A_{vt}} (\mathbf{u}T) \cdot \mathbf{n} dA \\ = -\frac{1}{\phi_t} \left[\phi_a (T)_{at} \frac{\partial \langle u_z \rangle^a}{\partial z} + \phi_v (T)_{vt} \frac{\partial \langle u_z \rangle^v}{\partial z} \right] \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

となる。式(32)の熱流束ベクトルの局所体積平均は、

$$\langle \mathbf{q}_t \rangle^t = -\lambda_t \left[\nabla \langle T \rangle^t - \frac{1}{V_t} \int_{A_{at}+A_{vt}} T n dA \right] \quad \dots\dots\dots (36)$$

と与えられ、動脈-組織相界面および静脈-組織相界面において、温度は連続することになるので [式(26)参照],

$$\frac{1}{V_t} \int_{A_{at}+A_{vt}} T n dA = 0 \quad \dots\dots\dots (37)$$

が得られ、式(33)右辺第1項は、

$$\text{div} \langle \mathbf{q}_t \rangle^t = -\lambda_t \nabla^2 \langle T \rangle^t \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる。動脈-組織相界面および静脈-組織相界面において、熱流束ベクトルは連続することになるので [式(28)参照], 式(33)右辺第2項は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_t} \int_{A_{at}+A_{vt}} \mathbf{q}_t \cdot \mathbf{n} dA &= -\frac{\lambda_b}{\phi_t} \left[\phi_a \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{at} a_{at} \right. \\ &\quad \left. + \phi_v \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{vt} a_{vt} \right] \quad \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

となる。

すなわち、組織相でのマクロなエネルギー方程式は、

$$\begin{aligned} \rho_b c_b \frac{\partial \langle T \rangle^t}{\partial t} + \rho_b c_b \text{div} \langle \mathbf{u} \rangle^t \langle T \rangle^t &+ \frac{\rho_b c_b}{\phi_t} \left[\phi_a (T)_{at} \frac{\partial \langle u_z \rangle^a}{\partial z} + \phi_v (T)_{vt} \frac{\partial \langle u_z \rangle^v}{\partial z} \right] \\ &= \lambda_t \nabla^2 \langle T \rangle^t - \frac{\lambda_b}{\phi_t} \left[\phi_a \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{at} a_{at} \right. \\ &\quad \left. + \phi_v \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{vt} a_{vt} \right] + Q \quad \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

となる。

7. 流体-多孔質界面

マクロな支配方程式を導出にあたり、動脈および静脈相を管内1次元流で取り扱うとともに、組織相を多孔質近似した。そこで、流体-多孔質界面の境界条件を適用することにより、動脈および静脈相のエネルギー方程式に含まれる界面物理量を導出する。

検査体積 V における組織相の温度分布に着目すれば、動脈相もしくは静脈相との界面近傍で温度勾配を有するものの、組織の代謝熱 Q の効果により一様な温度分布になると考えられる。そこで、組織相の多孔質近似に際し、流体-多孔質界面(動脈-組織相界面もしくは静脈-組織相界面)において温度スリップが生じるものとして取り扱う。流体-多孔質界面において温度スリップが生じる場合の熱流束のつりあいに関する境界条件は、高津・増岡⁽⁹⁾により次式が提案されている。

$$\lambda_f \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_f = \lambda_e \frac{(T)_f - (T)_p}{l_t} \quad \dots\dots\dots (41)$$

ここで、 $(\partial T / \partial r)_f$ は流体-多孔質界面流体層側温度勾

配、 $(T)_f$ は流体-多孔質界面流体層側温度、 $(T)_p$ は流体-多孔質界面多孔質層側温度、 λ_f は流体層の熱伝導率、 λ_e は多孔質層の有効熱伝導率である。流体層から多孔質層内への温度変化の浸透深さ l_t は、

$$l_t = \sqrt{h' \left[\frac{1}{\varepsilon \lambda_f} + \frac{1}{(1-\varepsilon) \lambda_s} \right]} \quad \dots\dots\dots (42)$$

で表され、 h' は多孔質層内の流体相と固体相間の熱伝達率、 λ_s は多孔質層内固体相の熱伝導率である。検査体積 V において組織相温度分布がほぼ一様であるとすれば、多孔質(組織相)での温度は、 $(T)_p \approx \langle T \rangle^t$ と近似できる。さらに、動脈および静脈内熱伝達 h_a , h_v を導入すれば、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} -\lambda_b \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{at} &= \lambda_t \frac{(T)_{at} - \langle T \rangle^t}{l_t} \\ &= h_a [\langle T \rangle^a - (T)_{at}] \quad \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\lambda_b \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{vt} &= \lambda_t \frac{(T)_{vt} - \langle T \rangle^t}{l_t} \\ &= h_v [\langle T \rangle^v - (T)_{vt}] \quad \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

なお、式(41)に対して上式では負の符号が導入されているのは、座標系の取り扱いの違いによるものである。

式(43)および式(44)より、界面温度は次のように表される。

$$(T)_{at} = \frac{\frac{l_t}{\lambda_t} \langle T \rangle^a + \frac{1}{h_a} \langle T \rangle^t}{\frac{1}{K_a}} \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$(T)_{vt} = \frac{\frac{l_t}{\lambda_t} \langle T \rangle^v + \frac{1}{h_v} \langle T \rangle^t}{\frac{1}{K_v}} \quad \dots\dots\dots (46)$$

ここで、熱通過率 K_a , K_v は、

$$\frac{1}{K_a} = \frac{1}{h_a} + \frac{l_t}{\lambda_t} \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$\frac{1}{K_v} = \frac{1}{h_v} + \frac{l_t}{\lambda_t} \quad \dots\dots\dots (48)$$

と定義している。すなわち、動脈相および静脈相でのマクロなエネルギー方程式に界面物理量を代入すれば、

$$\begin{aligned} \rho_b c_b \left[\frac{\partial \langle T \rangle^a}{\partial t} + \langle u_z \rangle^a \frac{\partial \langle T \rangle^a}{\partial z} \right] &= \lambda_b \frac{\partial^2 \langle T \rangle^a}{\partial z^2} + \frac{K_a}{h_a} \rho_b c_b (u_r)_{at} \\ &\quad \times [\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^t] a_{at} - K_a [\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^t] a_{at} \quad \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_b c_b \left[\frac{\partial \langle T \rangle^v}{\partial t} + \langle u_z \rangle^v \frac{\partial \langle T \rangle^v}{\partial z} \right] &= \lambda_b \frac{\partial^2 \langle T \rangle^v}{\partial z^2} + \frac{K_v}{h_v} \rho_b c_b (u_r)_{vt} \\ &\quad \times [\langle T \rangle^v - \langle T \rangle^t] a_{vt} - K_v [\langle T \rangle^v - \langle T \rangle^t] a_{vt} \quad \dots\dots\dots (50) \end{aligned}$$

が得られる。一方、組織相でのマクロなエネルギー方程式において、マクロな連続の式〔式(14)〕を考慮すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho_t c_t \frac{\partial \langle T \rangle^t}{\partial t} + \rho_b c_b \langle \mathbf{u} \rangle^t \cdot \nabla \langle T \rangle^t = \lambda_t \nabla^2 \langle T \rangle^t \\ + \frac{\phi_a}{\phi_t} \frac{K_a}{\lambda_t l_t} \rho_b c_b (u_r)_{at} [\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^t] a_{at} \\ + \frac{\phi_v}{\phi_t} \frac{K_v}{\lambda_t l_t} \rho_b c_b (u_r)_{vt} [\langle T \rangle^v - \langle T \rangle^t] a_{vt} \\ + \frac{\phi_a}{\phi_t} K_a [\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^t] a_{at} \\ + \frac{\phi_v}{\phi_t} K_v [\langle T \rangle^v - \langle T \rangle^t] a_{vt} + Q \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

ここで、上式に導入されたパラメータについて少し言及しておく。従来の生体内熱移動方程式⁽¹⁾⁽²⁾と比較して、新たな熱物性値として血液の熱伝導率 λ_b が導入されているが、例えば文献(11)を参照して求められる。次に、熱通過率 K_a 、 K_v を構成するパラメーターに着目する。動脈および静脈内熱伝達率 h_a 、 h_v に関しては、動脈および静脈の管壁(透過壁)を通して組織内毛細血管への血流の流入・流出速度 $(u_r)_{at}$ 、 $(u_r)_{vt}$ が十分小さく、層流として取り扱える場合には、円管内ヌセルト数 $h_a d_a / \lambda_b$ 、 $h_v d_v / \lambda_b$ は4程度の値をとると考えられる。一方、組織相内への温度変化の浸透深さ l_t に関しては、今後実験などにより決定されるべきパラメーターと考えているが、バルク(平均)温度測定となるため、Weinbaum-Jijiの式⁽²⁾で必要となる血管網の幾何形状の測定に比べると検証は容易と考えられる。

本研究で導かれた組織相でのマクロなエネルギー方程式と従来の生体内熱移動方程式の関連について言及しておく。例えば、式(51)において、静脈相温度と組織相温度が等しければ、

$$\langle T \rangle^v = \langle T \rangle^t \dots\dots\dots (52)$$

次式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho_t c_t \frac{\partial \langle T \rangle^t}{\partial t} + \rho_b c_b \langle \mathbf{u} \rangle^t \cdot \nabla \langle T \rangle^t = \lambda_t \nabla^2 \langle T \rangle^t \\ + \frac{\phi_a}{\phi_t} \frac{K_a}{\lambda_t l_t} \rho_b c_b (u_r)_{at} [\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^t] a_{at} \\ + \frac{\phi_a}{\phi_t} K_a [\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^t] a_{at} + Q \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

上式右辺第2項は、Pennesの式⁽¹⁾における血液灌流によるエンタルピー輸送を表し、組織単位体積あたりの血液流量 w_b は、

$$w_b = \frac{\phi_a}{\phi_t} \frac{K_a}{\lambda_t l_t} (u_r)_{at} a_{at} \dots\dots\dots (54)$$

と与えられる。また、式(53)右辺第3項は、動脈-組織界面における熱伝導による熱移動を表し、静脈相温度と組織相温度がほぼ等しいとすれば、対向流による熱

交換の項とみなせる。なお、従来の生体内熱移動方程式に関しては、式(53)左辺第2項に対してモデル化が行われ、Pennesの式⁽¹⁾では等方発熱項に還元され、Weinbaum-Jijiの式⁽²⁾では血管幾何構造を考慮した対向流による熱交換項に還元されている。しかしながら、動脈(あるいは静脈)と組織の相互作用は、界面を通して行われるので、式(53)右辺第2および3項のように動脈(あるいは静脈)-組織界面における熱移動として直接表現するのが適切と考えられる。また、式(53)左辺第2項は、組織に温度分布が形成されることによりもたらされるエンタルピー輸送であり、組織内平均速度が零と近似できる場合には、無視できる。一方、生体内熱移動方程式に式(53)左辺第2項を導入すれば、血管の収縮・膨張などによる体温調節機構のような血流場に関連する問題を取り扱え、生体内熱移動方程式の適用範囲が広がると考えられる。

組織単位体積あたりの血液流量 w_b を次のように記述すれば、動脈-組織界面における熱伝導による熱移動の寄与をPennesの式に導入することができる。

$$w_b = \frac{\phi_a}{\phi_t} \frac{K_a}{\lambda_t l_t} \left(1 + \frac{1}{Pe_a} \right) (u_r)_{at} a_{at} \dots\dots\dots (55)$$

ここで、ペクレ数 Pe_a は次式で定義されている。

$$Pe_a = \frac{(u_r)_{at} l_t}{\lambda_t / (\rho_b c_b)} \dots\dots\dots (56)$$

ペクレ数 Pe_a のオーダーに関連して、動脈の管壁(透過壁)を通して組織内毛細血管への血流の流出速度 $(u_r)_{at}$ はそれほど大きくならないと考えられる。また、浸透深さ l_t についても、毛細血管で構成される組織内では細管効果により式(42)中の h' は十分大きくなるため、浸透深さ l_t は十分大きな値とはならない。すなわち、ペクレ数 $Pe_a \gg 1$ とはなりえず、生体内熱移動方程式のモデル化に際し、動脈-組織内界面における熱伝導の効果は無視できないことになる。

8. 結 言

本研究では、動脈および静脈相を管内1次元流で近似するとともに、組織相を多孔質近似することにより、生体内輸送現象を詳細に検討し、速度場を考慮した生体内熱移動方程式を理論的に導出した。特に、動脈(あるいは静脈)と組織間の熱伝達機構を明らかにし、生体内熱移動方程式中の組織単位体積あたりの血液流量 w_b ならびに動脈(あるいは静脈)-組織界面における熱伝導に関連する基本パラメーターを明確にした。

文 献

- (1) Pennes, H. H., Analysis of Tissue and Arterial Blood Temperatures in the Resting Human Forearm, *Journal*

- of *Applied Physiology*, Vol. 1 (1948), pp. 93-122.
- (2) Weinbaum, S. and Jiji, L. M., A New Simplified Bio-heat Equation for the Effect of Blood Flow on Local Average Tissue Temperature, *Transactions of the ASME, Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 107 (1985), pp. 131-139.
- (3) Yokoyama, S., *Heat Transfer in Biology* (in Japanese), (1993), p. 87, Hokkaido University Press.
- (4) The Japan Society of Mechanical Engineers ed., *Biomechanics* (in Japanese), (1991), p. 143, Ohmsha, Ltd.
- (5) Slattery, J. C., *Advanced Transport Phenomena*, (1999), p. 197, Cambridge University Press.
- (6) Takatsu, Y., Masuoka, T., Tamura, M. and Kohri, I., New Bio Heat Equation Coupled with Momentum Equation, *Proceeding 36th National Heat Transfer Symposium of Japan*, Vol. 2 (1999), pp. 443-444.
- (7) Nakayama, A., Kuwahara, F. and Motoyama, H., Derivation of the Volume-Averaged Governing Equations for Bioheat Transfer, *Proceeding 44th National Heat Transfer Symposium of Japan*, Vol. 1 (2007), pp. 29-30.
- (8) Takatsu, Y. and Masuoka, T., Slip Boundary Condition at Interface between Porous and Fluid Layers, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 73, No. 732 (2007), pp. 1710-1714.
- (9) Nield, D. A. and Bejan, A., *Convection in Porous Media*, (2006), p. 8, Springer-Verlag.
- (10) Takatsu, Y. and Masuoka, T., Production and Dissipation of Turbulence in Porous Media, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 68, No. 673 (2002), pp. 2601-2605.
- (11) Tanishita, K., Nagasaka, Y., Nagashima, A., Yamaguchi, T. and Sugawara, M., Measurement of Thermal Conductivity of Blood by Transient Hot Wire Method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 47, No. 421 (1981), pp. 1784-1791.