ヘミスフィア法による形態係数の高速算出性能*

山田 昇^{*1}, 信田 知曉^{*2}, 滝沢 寛之^{*3}Performance of Hemisphere Algorithm for
Fast Form Factor CalculationNoboru YAMADA^{*4}, Tomoaki SHINODA and Hiroyuki TAKIZAWA^{*4} Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology,
1603-1 Kamitomioka-machi, Nagaoka-shi, Niigata, 940-2188 Japan

Development of fast and accurate algorithm of radiative heat transfer simulation is important in terms of efficient thermal design and simulation on diverse engineering area. This paper describes the performance of Hemisphere algorithm which has originally developed as a fast form factor calculation in the field of photorealistic three-dimensional computer graphics. We compared performance of the Hemisphere algorithm with two conventional methods which are frequently used in the field of radiative heat transfer simulation. As a result, the Hemisphere algorithm is significant faster than the conventional methods if one can accept an absolute error of 1.0×10^{-5} . In addition, the result indicates that the Hemisphere algorithm possibly suit for try and error process of large-scale model simulation due to its tolerable form factor distribution.

Key Words: Thermal Radiation, Heat Transfer, Heat Transfer Design, Computational Method

1. 結 言

近年、環境伝熱解析、高温・小型化する機器の熱設計、宇宙機器の加熱・放熱手段の最適化などの多様な分野において、ふく射伝熱の正確かつ効率的な解析手法が求められている。ふく射伝熱を正確に解析するためには、対象とする任意形状物体の表面を微小要素に分割し、各要素間の形態係数を計算機メモリに格納しつつ、全要素間のふく射熱交換量を反復計算や大規模行列計算によって算出するため、メモリ使用量および計算時間が増大する。そのため市販パソコンで大規模解析の試行錯誤は容易でない。一方、コンピュータグラフィックス(CG)分野では、ふく射(可視光)の振る舞いを物理現象に則して計算し、リアルな画像を高速生成するアルゴリズムや専用ハードウェアが急速に発展しており、対象モデルの大規模化が進行している。CG分野における大域照明(Global illumination)⁽¹⁾の計

算法は、本質的にふく射伝熱計算と変わらないため、これらをふく射伝熱解析に応用すれば前述の問題を軽減できる可能性がある。

本研究ではCG分野で提案された形態係数の高速算出手法であるヘミスフィア法(Hemisphere algorithm)の計算精度、計算時間を検証した結果について述べる。

記 号

A_i	: 要素 <i>i</i> の表面積 [m^2]
$F_{\text{analysis},j}$	: 要素 <i>j</i> への形態係数の解析解
$F_{\text{cal},j}$	: 要素 <i>j</i> への形態係数
$F_{\text{abs error},j}$	: 要素 <i>j</i> への形態係数の絶対誤差
$\bar{F}_{\text{error},j}$	: 要素 <i>j</i> への形態係数の平均絶対誤差
F_{ij}	: 要素 <i>i</i> から要素 <i>j</i> への形態
l_s	: 楕円の単軸方向単位ベクトル
m_s	: 楕円の単軸方向単位ベクトル
N	: 解析モデルの全要素数
R	: 要素間距離 [m]
T	: 温度 [K]
x,y,z	: 座標 [m]
l, m, n	: 単位法線ベクトル成分
X,Y,Z	: 座標 [m]
ギリシャ文字	
σ	: Stefan-Boltzmann 係数 [$\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$]
Γ	: 各形態係数手法の性能パラメータ

* 原稿受付 2008年6月23日。

^{*1} 正員、長岡技術科学大学工学部(☎940-2188 長岡市上富岡町1603-1)。^{*2} 長岡技術科学大学大学院機械創造工学専攻。^{*3} 東北大学サイバーサイエンスセンター(☎980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉6-3)。

E-mail: noboru@mech.nagaokaut.ac.jp

2. ヘミスフィア法による形態係数の算出

2.1 形態係数 灰色面間のふく射伝熱解析の際には、多くの場合、形態係数 (Form factor, View factor) F_{ij} を求める必要がある。 F_{ij} は面積 A_i の黒体平板 i から放射されたふく射エネルギーのうち、面積 A_j の黒体平板 j に到達するふく射エネルギーの割合を意味し、 F_{ij} が既知であれば、黒体平面 i から j への伝熱量 Q_{ij} は次式で求められる。

$$Q_{ij} = A_i \sigma (T_i^4 - T_j^4) F_{ij} \quad (1)$$

Fig. 1 Configuration between two plane elements

図1のような2つの要素間 (解析モデルの分割要素のことを本論文では要素と呼ぶ。CG分野ではパッチと呼ぶ場合がある) において、要素 i, j の面積をそれぞれ A_i, A_j とし、要素に含まれる微小面積を dA_i, dA_j とすると、 dA_i から dA_j への形態係数は次式となる。

$$F_{dA_i dA_j} = \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_j \quad (2)$$

式(2)を dA_i について積分することにより、要素 i から微小面積 dA_j への形態係数 $F_{i dA_j}$ が次式で与えられる。

$$F_{i dA_j} = \int_{A_i} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_i dA_j \quad (3)$$

さらに、式(3)を dA_j について積分することにより要素 i から要素 j への形態係数 F_{ij} は次式の2重積分で与えられる。

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_i dA_j \quad (4)$$

式(4)より、 F_{ij} は要素間の幾何学的関係のみで決まる。単純な幾何学形状面の組合せに対する F_{ij} は図表・式に纏められているが⁽²⁾、複雑形状面間では理論的に求め

ることが困難であり、面間に遮蔽物が存在する場合には、取り扱いがさらに煩雑になる。

形態係数の代表的な算出手法として、汎用性の高いモンテカルロ法 (モンテカルロ・レイトレーシング法)^{(3)~(6)} のほかに、2重面積分法⁽⁷⁾、Mitalas-Stephenson 法⁽⁸⁾、CG分野で広く用いられているヘミキューブ法⁽⁹⁾ などがある。今野ら⁽⁷⁾ は上記手法について建築環境工学で扱う解析対象を想定した詳細な比較検証を行い、ヘミキューブ法の高速度性を指摘するとともに、大規模モデルにおいては計算時間の増加に対する精度の向上割合が悪化することを報告している。一方、土井⁽¹⁰⁾ は Spencer ら⁽¹¹⁾ が提案した半球底面への投影を利用する手法を改善することで、ヘミキューブ法の約半分の計算時間で同質の画像生成が可能であることを報告している。本論文では半球底面への投影を利用する手法をヘミスフィア法と呼ぶこととする。ヘミスフィア法はヘミキューブ法と同様に点対面間の形態係数算出法であり、科学技術計算では適用例がなく、精度・計算時間の検証や代表的な従来手法との比較が必要である。

2.2 ヘミスフィア法 式(4)において、要素 i の面積 A_i に対して要素間の距離 r が十分大きいと仮定すると、要素 i から要素 j に対する形態係数 F_{ij} は次式で近似できる。

$$F_{ij} \approx \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_j \quad (5)$$

この式は単位円の面積に対する投影された要素 j の領域の比率を表しているため、

$$\frac{\cos \theta_i \omega_{ij}}{\pi} = \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} A_j \quad (6)$$

と表すことができる。式(6)と式(3)より、面積 A_j の要素 j から微小面積 dA_i への形態係数は、微小面積 dA_i を中心とした半径1の半球の底面 (スクリーンと呼ぶ) に、面積 A_j の要素 j を図2中のK部のように投影したときの、K部の面積に等しい。これはヌセルトの相似 (Nusselt's Analogy) として証明されている。この相似則に基づいて、半球底面投影を用いて近似的に形態係数 F_{ij} を求める手法がヘミスフィア法である。主な処理手順は次のようになる。

- ① 要素の頂点と辺をスクリーンへ投影する
- ② 投影された領域をセルに登録する
- ③ セル面積より形態係数を算出する

以下、各処理について述べる。

Fig. 2 Nusselt's Analogy

要素形状の半球底面投影には、井上⁽¹²⁾の解析的手法を用いる。まず、要素頂点の半球底面への投影点を求める。半球底面の中心を原点とし、底面を xy 面、上軸を z 軸とする座標系を考える。図 3 の任意要素 j の頂点 $p_1(X_1, Y_1, Z_1)$ の半球への投影点座標 $p_1'(x_1, y_1, z_1)$ は要素頂点の単位ベクトルとなり、次式で表される。

$$(x_1, y_1, z_1) = (X_1/L_1, Y_1/L_1, Z_1/L_1) \quad (7)$$

ここで、

$$\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$

半球底面への投影点は $p_1''(x_1, y_1, 0)$ となる。

次に要素の各辺の投影を考える。頂点 p_1, p_2 と原点を通る平面で半球を切り、その切り口を半球底面に投影する。このとき投影線は楕円の一部となる。この半球底面への投影線の楕円方程式とその範囲を求める。要素頂点 p_1, p_2 の空間座標を $(X_i, Y_i, Z_i) (i=1, 2)$ とすれば、半球を切る面の法線 (X_0, Y_0, Z_0) は、

$$(X_0, Y_0, Z_0) = (X_1, Y_1, Z_1) \times (X_2, Y_2, Z_2) \quad (9)$$

であり、その上側法線の単位ベクトル (l, m, n) は、

$$\begin{aligned} Z_0 \geq 0: l &= X_0/L_0, \quad m = Y_0/L_0, \quad n = Z_0/L_0 \\ Z_0 < 0: l &= -X_0/L_0, \quad m = -Y_0/L_0, \quad n = -Z_0/L_0 \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} L_0 &= \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \quad (11)$$

このとき、半球底面への投影線は n の値により分類でき、その方程式は次のようになる。

(i) $0 < n < 1$ の場合：楕円

$$\frac{(l_s x + m_s y)^2}{n^2} + (-m_s x + l_s y)^2 = 1 \quad (12)$$

(l_s, m_s) は楕円短軸方向の単位ベクトルで次式となる。

$$\begin{aligned} l_s &= -l/\sqrt{l^2 + m^2} \\ m_s &= -m/\sqrt{l^2 + m^2} \end{aligned} \quad (13)$$

(ii) $n=0$ の場合：原点を通る直線

$$lx + my = 0 \quad (14)$$

(iii) $n=1$ の場合：円

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (15)$$

半球底面に投影された軌跡の範囲は、それぞれの場合について、頂点 p_1, p_2 の半球底面への投影点 $p_1'(x_1, y_1), p_2'(x_2, y_2)$ および (l, m, n) に従って決定される。

Fig. 3 Hemisphere projection onto bottom screen

次に要素の半球底面への投影面積を求めるために、底面をセル分割し、各セルに投影情報を登録する。図 4 は正方形セルに分割した半球底面の投影スクリーンに要素が投影された例である。このように投影線に基づいて要素情報をセルに描画登録する。投影線をセルに登録するためには、スキャン変換と呼ばれる処理により投影線をセルに置き換え、投影領域を判別する(塗りつぶす)。スキャン変換には中点アルゴリズム⁽¹³⁾を用いた。中点アルゴリズムの説明図を図 5 に示す。図中の $0 < \text{傾き} < 1$ の線分 AB をスクリーンセルに登録するスキャン変換を考える。線分の始点 A から終点 B までをスクリーンセル①→②→③の順で登録していく過程において、セル①の登録が終わり、セル②を判別して登録する過程を解説する。まず、線分 AB とセル中心を通る線分 X との交点を点 Q とする。また、セル②とその下に隣接するセル②' との境界の中点を点 M とする。中点アルゴリズムでは、点 Q が中点 M の上下どちら側にあるかを判定する。中点 M が点 Q より上にある場合、セル②' が線分に近く、中点 M が点

Q より下にある場合, セル②が線分に近い. この方法で線分に最も近いセルを選択できる. また, 選択されたセルの中心と線分との点 Q との距離 (誤差) は常に $\leq 1/2$ (セルの辺の長さを 1 とした場合) となる. 中点アルゴリズムの演算には計算時間を要する乗算がないため高速である. 中点アルゴリズムは直線のほかに円および楕円にも適用できる.

このように選択された各セルには投影される要素 j の番号と奥行き量 (要素間距離 r) を登録する. 要素を順次投影していき, ある要素が既に登録されているセルに投影された場合には, 奥行き量が登録値よりも小さい場合に登録情報を更新する. これにより空間内に障害物がある場合の隠面消去処理が行なわれる. 全要素の登録後に各要素の登録セル数を求め, セル面積から形態係数が算出される.

Fig. 4 Cell registration of projected elements on screen

Fig. 5 Cell registration using median algorithm on screen

3. ヘミスフィア法と従来手法との比較

3.1 解析モデル 絶対誤差の評価のため, 解析モデルには理論解が得られる立方体を用いた. 図 6 に解析モデルを示す. モデルを構成する単位要素当たりの寸法を 1×1 とし, 立方体一辺の要素数を 1, 5, 11, 15, 21, 25, 35, 45 と変えることで, モデル全体の要素数 $N = 6, 150, 726, 1350, 2646, 3750, 7350, 12150$ とした. また, 図 5 に示すように F_{ij} 算出の基準となる要素 i (Sampling element) の位置は, 底面中央 (Case A), 底面壁面寄り (Case B), 底面の角 (Case C) の 3 ケースとした. 表 1 に解析に用いた計算機の仕様を示す. 精度および計算時間 (CPU time) を比較する従来手法としてモンテカルロ法および 2 重面積分法を用いた.

表 2 に各算出手法の計算精度・計算時間に影響を及ぼす性能パラメータ Γ の設定条件を示す. ヘミスフィア法の場合はスクリーンセル数 (解像度), モンテカルロ法の場合は要素からの射出光線数, 二重積分法の場合は要素の再分割数が Γ である. 性能パラメータ Γ を大きく設定すれば, いずれの手法においても計算精度が向上し, 逆に計算時間は増加する. 基準要素 i から他の要素 j 全てへの形態係数 F_{ij} を各ケース, 各算出手法, 解析条件で求め, 理論解との絶対誤差および計算時間を比較した. 絶対誤差 $F_{abs_error,j}$ は次式で定義する.

$$F_{abs_error,j} = |F_{analysis,j} - F_{calc,j}| \quad (16)$$

ここで, $F_{analysis,j}$ は要素 i から要素 j への形態係数の理論解, $F_{calc,j}$ は各手法で求めた形態係数である. また, 平均絶対誤差 F_{error} として次式を用いた.

$$F_{error} = \left(\sum_{j=1}^N F_{abs_error,j} \right) / N \quad (17)$$

Fig. 6 Cubic model and three sampling elements

3.2 解析結果の比較 図7に要素数 $N=150, 7350, 12150$ において表2の性能パラメータ Γ を適用した際の各手法の計算時間と平均絶対誤差の関係を示す。なお、図中では各手法を表2記載の略称で示した。Case BとCase Cとでは顕著な相違がなかったため、Case AおよびCase Bの結果を図7(a)および(b)に示す。図7より、ヘミスフィア法は他の手法に比べて要素数の増加による計算時間の増加がない。また、他の手法と同レベルの精度があり、要素数が多い場合に精度と計算時間のバランスにおいて有利である。例えば、Case Aで要素数 $N=12150$ の場合、平均絶対誤差 1.0×10^{-5} 程度の形態係数を求める時間は、ヘミスフィア法 0.04s に対してモンテカルロ法と2重面積分法では約1000sを要する。基準とする要素が立方体壁面寄りとなるCase Bでは各手法ともに精度が低下しているが、ヘミスフィア法は精度と計算時間のバランスを維持している。一方、要素数が $N=150$ と少ない場合には、ヘミスフィア法の精度は他の手法よりも劣化している。要素数が少なくなると、基準となる要素 i の大きさに対して要素 j と

要素 j との要素間距離 r が小さくなるため、 r が十分大きいことを前提として導出した式(5)を満たさなくなるため絶対誤差が大きくなる。具体的には $r/a < 2.5$ (a は要素の一辺の長さ、本解析では $a=1$)になると絶対誤差のオーダーが 10^{-4} 以上になる。要素数が多くなると絶対誤差が大きい部分の面積が、相対的に小さくなるためモデル全体の平均絶対誤差が小さくなる。図7においてCase BとCase Cとで顕著な相違がない要因も両ケースの r が同じ傾向にあることに起因する。また、Case AとCase BとでHS(7350)とHS(12150)の平均絶対誤差の傾向が異なる要因も、両ケースの r の傾向の相違にある。

Table 1 Hardware specification used in performance test

CPU	Itanium2 1.6GHz
Program Language	C++
Compiler	Intel C++ compiler 8.1

Table 2 Performance parameters of each algorithm used in performance test

Algorithm (abbreviation)	Performance parameter	Value of parameter Γ
Hemisphere (HS)	Screen resolution, $\Gamma \times \Gamma$	200, 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000
Monte Carlo (MC)	Amount of emitted rays from an element, Γ	$1 \times 10^4, 10 \times 10^4, 300 \times 10^4, 500 \times 10^4$
Double Area Integral (DAI)	Amount of subdivisions on an element, Γ	1, 4, 16

(a) Case A

(b) Case B

Fig. 7 Mean absolute error and calculation time (CPU time) of three algorithms for $N=150, 7350, 12150$

(a) Case A

(b) Case B

Fig. 8 Comparison of form factor distribution and CPU time among analytical rigorous solution, Hemisphere, Monte Carlo and Double area integral algorithms in case of $N=12150$

Case B と Case C では、Case A に比べて r の小さい要素の数が多く、それらの要素との幾何学的関係 (θ_i と θ_j) も類似しているため、Case B と Case C の傾向はほぼ同じになったと考えられる。また、本手法では r が小さくなると性能パラメータ Γ に関わらず、誤差が大きくなる傾向があるため、Case B と Case C では Γ を大

きくして計算時間を増やしても Case A よりも平均絶対誤差が大きくなり、傾向の差異が現れたものと考えられる。

このように、ヘミスフィア法においては、 r/a が誤差に影響を及ぼす。とくに要素同士が隣接していて $r/a < 1$ で、且つ $\theta_i < 45^\circ$ 、 $\theta_j < 45^\circ$ の場合には、本手法の大

前提となっている式(5)で得られる形態係数は、本来の算出式(4)の値と大きく異なるため適用できない。また、投影される要素の大きさに対してスクリーンセルが大きくなると要素をスクリーンへ投影する際の誤差が大きくなる。したがって、要素 i よりも要素 j のサイズが大きくなり、且つ複雑形状であるようなモデルに対しては、これに応じてスクリーンセルを小さくし、スクリーンの解像度を上げる必要がある。

図8には、要素数 $N=12150$ における理論解および各手法による Case A, Case B の F_{ij} 分布図と計算時間を示す。この分布図を作成する際には、各要素を形態係数に応じた配色で塗りつぶし、補間等の操作は行っていない。モンテカルロ法では光線数の少ない高速計算では分布状態が著しく劣化する。二重積分法では、分布状態の劣化はないが計算時間が長い。これに対して、ヘミスフィア法では低スクリーンセル数においても高速かつ実用性のある分布状態が得られた。

モンテカルロ法では、射出光線の入射要素を決めるために全要素 $j(j=1,2,\dots,N)$ との交差判定をする必要があるため、光線数 $\times$ 要素数 N の演算を要する。精度を高めるためには、光線数を増やす必要がある。

2重面積分法では、再分割要素 dA_i と dA_j について全要素 $k(k=1,2,\dots,N)$ との交差判定を行うため、 $N^2 \times (dA_i \text{ の数} \times dA_j \text{ の数})$ の演算を要する。精度を高めるためには再分割数を増やす必要があり、大規模モデルの解析には計算時間の点で向かない。

ヘミスフィア法では N 回の投影とセル登録で済むため、投影に要する演算量が本質的に少ない。セル登録に要する時間はスクリーンセル数に依存する。このため、要素数が増加しても他の手法のような計算時間の著しい増大はない。ただし、図7のようにスクリーンセル数の増加に対する精度の向上割合は収束する傾向がある。また、他の手法に比べて計算精度が方向によらず空間全体で均一になる傾向がある。

3.3 遮蔽物がある場合の比較

大規模解析では任意形状物体が任意の位置に存在するのが一般的であるため、複雑形状の遮蔽物が存在するモデルにおける各手法の性能を検証すべきである。しかし、そのようなモデルでは理論解を求めることが困難なため、精度は相対的な比較にならざるを得ない。実際の工業的な熱解析設計の現場では、解析結果を逐次可視化ソフトウェアで出力し、可視結果の分布状態に基づいて設計解析を進めるケースが多い。以上の観点から、遮蔽物があるモデルについて各手法で求めた形態係数分布の分布状態および計算時間を比較する。

Fig. 9 Cubic model includes two spheres as obstacle

Fig. 10 Comparison of form factor distribution and CPU time among Hemisphere, Monte Carlo and Double area integral algorithms in case as shown in Fig.6

図9に示すような、立方体の内部に2つの球を配置した要素数 $N=16684$ のモデルを用いた。モデルはすべて三角形要素で構成されている。底面中央の基準要素 i から他のすべての要素 j への F_{ij} をヘミスフィア法、モンテカルロ法、2重面積分法で求めた。ヘミスフィア法はスクリーン解像度 4000×4000 、モンテカルロ法

は射出粒子数 500×10^4 , 2重面積分法は $d\Omega$ 数 16 と設定して形態係数算出を行った。

図 10 に各手法で求めた F_y 分布を示す。図より、すべての手法でほぼ同様の分布が得られているが、計算時間はヘミスフィア法: 8.9s, モンテカルロ法: 1851s, 2重面積分法: 7982s であり、ヘミスフィア法の高速性が示された。分布状態も良好である。

以上の結果から、ヘミスフィア法は要素数の多い大規模なモデルの形態係数の算出において、 1.0×10^5 程度の平均絶対誤差を許容できるのならば効率的な手法である。とくに要素数の多い場合において、精度・計算時間の優位性があるため、大規模モデルにおける試行錯誤計算に適している。なお、滝沢ら⁽¹⁴⁾は、ヘミスフィア法をグラフィックス描画演算専用のハードウェア (GPU) に実装することで、通常の CPU 演算以上に高速演算できることを報告している。また、本研究では灰色面間のふく射伝熱解析における検証を行ったが、ランバートの法則が各波長について適用できる場合には、非灰色面間の解析にもヘミスフィア法を適用できる。空間中にふく射性媒体がある場合には、媒体による吸収の影響は透過距離を用いて考慮できるが、ふく射性媒体からの放射の取り扱いが困難である。

4. 結 言

ヘミスフィア法による形態係数算出の優位性の有無について性能検証を行った。解析モデルは、工学の広い対象に対する普遍性・網羅性の点で十分ではないが、検証した範囲において、以下の知見を得た。

- (1) ヘミスフィア法では、モンテカルロ法や2重面積分法に比べて、要素数の増加による計算時間の著しい増加がなく、要素数が多い場合に精度と計算時間において優位性が認められた。
- (2) スクリーンセル数 (解像度) を下げて高速化した場合においても形態係数分布状態の劣化が少なく、要素数の多い大規模モデルの試行錯誤計算に適する。今後、グラフィックス専用ハードウェアとの併用でふく射伝熱解析の高速・効率化が期待される。

文 献

- (1) Pharr, P. and Humphreys, G., *Physically Based Rendering*, Morgan Kaufmann Publishers, (2004)
- (2) Siegel, R. and Howell, J., *A Catalog of Radiation Heat Transfer Configuration Factor*, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 4th Edition, Taylor and Francis (2002)
- (3) Omori, T. et al., Radiative Heat Transfer Analysis Method for Coupled Simulation of Convection and Radiation in Large-Scale and Complicated Enclosures, *Transactions of the Society of Heating, Air-Conditioning and Sanitary Engineers of Japan*, No.88 (2003), pp.103-113.
- (4) Omori, T. et al., Prediction Method of Radiant Environment in a Room and its Application to Floor Heating, *Transactions of the Society of Heating, Air-Conditioning and Sanitary Engineers of Japan*, No.42 (1990), pp.9-18.
- (5) Murakami, S. et al., Numerical Study on Thermal Environment in Air-conditioned Room by means of Coupled Simulation of Convective and Radiative Heat Transport, No.59 (1995), pp.95-104.
- (6) Yang, W. J., Taniguchi, H. and Kudo, K., Radiative Heat Transfer by the Monte Carlo Method, *Advances in Heat Transfer*, Vol.27 (1995), Academic Press, San Diego.
- (7) Konno, M. et al., Study on Calculation Method of View Factors in Radiant Heat Transfer Analysis, *Journal of Environmental Engineering, AIJ*, No.572 (2003), pp.17-22.
- (8) Mitalas, G.P. et al., Fortran IV Programs to Calculate Radiant Interchange Factors, Technical Report BDR-25, *National Research Council of Canada*, Division of Building Research (1966)
- (9) Cohen, M.H. and Greenberg, D.P., The Hemi-cube: Radiosity Solution for Complex Environments, *Computer Graphics*, Vol.19, No.3 (1985), pp.31-41.
- (10) Doi, A., Hemi-sphere Base Projection Method for Calculating Form Factor and Its Parallelization for Radiosity, *Journal of the Institute of Image Electronics Engineers in Japan*, Vol.24, No.3 (1995), pp.189-195. (in Japanese)
- (11) Spencer, S. N., The Hemisphere Radiosity Method : A Tale of Two Algorithms, *Photorealism in Computer Graphics*, Springer (1992), pp.127-135.
- (12) Inoue, T. et al., Analytical Estimation of Form Factors in Radiosity Method, *Research Reports of Kanagawa Institute of Technology, Part B, Science and Technology*, No.22 (1998), pp.107-110.
- (13) Foley, J. D. et al., *Computer Graphics: Principles and Practice*, Addison-Wesley Educational Publishers Inc. (1995)
- (14) Takizawa, H., Yamada, N., Sakai, S. and Kobayashi, H., Radiative Heat Transfer Simulation Using Programmable Graphics Hardware, *Proceedings of the 5th IEEE/ACIS International Conference on Computer and Information Science* (2006), pp.29-36.