粘性比を考慮した拡散界面モデルに基づく
二相系格子ボルツマン法*瀬 田 剛^{*1}Lattice Boltzmann Method for Two-Phase Flow Based
on the Diffuse-Interface Model with Viscosity RatioTakeshi SETA^{*2}^{*2} Graduate School of Science and Engineering for Research, University of Toyama,
3190 Gofuku, Toyama-shi, Toyama, 930-8555 Japan

The lattice Boltzmann method based on the Diffuse-Interface Model for the simulation of the flow of multiphase fluids is extended to allow the fluid components to have different viscosities. A convective Cahn-Hilliard equation for capturing interface is resolved by an additional lattice Boltzmann equation. To allow the different phases to have different viscosities, the relaxation time depends only on the sign of the order parameter. Numerical surface tension obtained from the Laplace's law agrees very well with the respective analytical solution for any viscosity ratio. The velocity profiles of the LBM show good agreement with those of the analytical solutions for the Poiseuille flow and Couette flow in channels filled with different phase viscosities without pseudo velocity on the interface. In the simulation of evolution of a single finger in a Hele-Shaw cell, the finger widths and terminal velocities show good agreements with the results of the previous studies.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Multi-Phase Flow, Lattice Boltzmann Method, Different Phase Viscosities, Cahn-Hilliard Equation

1. は じ め に

格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, LBM) は、線形な対流過程から Navier Stokes 方程式の非線形な対流過程が導出でき、時間と空間に対し 2 次精度を有し、ポアソン方程式の反復計算が不要であることなどから、非圧縮性流体解析のみならず、熱流体や混相流など様々な流体解析に適用されてきた⁽¹⁾。LBM では、分布関数が局所的に時間発展することにより系全体の挙動が再現されるため、分布関数に二相間相互作用を導入することにより、複雑な二相界面を自立的に形成させられる⁽²⁾。稲室や H. W. Zheng らは、Cahn-Hilliard 方程式に対応する新たな分布関数を導入することにより、LBM の二相流解析における高密度比の問題を解決している⁽³⁾⁽⁴⁾。また、緩和時間を局所的に変更することにより粘性の異なる二相を解析できるモデルが提案されたが⁽⁵⁾⁽⁶⁾、N. Rakotomalala ら⁽⁵⁾は Navier Stokes 方程式において単相流に対する圧力項を用いており、K. Langaas ら⁽⁶⁾は正しく Cahn-Hilliard 方程式を解いていない二相系 LBM⁽⁷⁾を用いている。

二相流に対する圧力項と Cahn-Hilliard 方程式を正確に解析できる二相系 LBM⁽⁴⁾の緩和時間を局所的に変更することで、二相の異なる粘性を解析できるか検証することが本研究の目的である。Laplace の法則を用い、二相間の粘性比を変更したことによる界面張力への影響を調べた後、チャンネル内に粘性の異なる二相が存在する Poiseuille Flow と Couette Flow のシミュレーションにより、厳密解と数値解との比較を行う。多孔質体内の二相流動解析に重要な Hele-Shaw セル内の Saffman-Taylor Finger⁽⁸⁾についてシミュレーションを行い、粘性比とキャピラリ数による Finger の幅、終端速度、形状について、他の計算結果と比較検証する。

2. 計 算 手 法

2.1 格子ボルツマン法 H. W. Zheng らによって提案された LBM では、以下の運動方程式が解析される⁽⁴⁾。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n\vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{u}\vec{u}) = -\vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + n\vec{g}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{u}) = \theta_M \nabla^2 \mu_\phi. \quad (3)$$

* 原稿受付 2008 年 12 月 24 日。

^{*1} 正員, 富山大学大学院理工学研究部(工学) (〒930-8555 富山市五福 3190)。

E-mail: seta@eng.u-toyama.ac.jp

ここで, $\vec{u}$ は流速, P は圧力, μ は粘性係数, $\vec{g}$ は外力, θ_M は易動度, μ_ϕ は化学ポテンシャルである. n および ϕ は A 相と B 相の密度 ρ_A , ρ_B を用い,

$$n = \frac{\rho_A + \rho_B}{2}, \quad \phi = \frac{\rho_A - \rho_B}{2}, \quad (4)$$

のように定義される. ここで, ρ_A と ρ_B は, 初期条件で $\rho_A = \rho_H$ (高密度), $\rho_B = \rho_L$ (低密度) に設定される. 式 (2) の圧力項は, 界面張力と関係し,

$$\vec{\nabla}P = \phi \vec{\nabla}\mu_\phi + \vec{\nabla}p_0, \quad (5)$$

のように記述される. ここで, $p_0 = nc_s^2$ であり, 格子間距離が 1 の場合, 音速 $c_s = 1/\sqrt{3}$ になる.

式 (1), (2) が, 分布関数 f_i に関する運動方程式,

$$\begin{aligned} & f_i(\vec{x} + \vec{c}_i\delta, t + \delta) - f_i(\vec{x}, t) \\ &= -\frac{f_i(\vec{x}, t) - f_i^{eq}(\vec{x}, t)}{\tau_n} + \delta F_i, \end{aligned} \quad (6)$$

により, 式 (3) が, 分布関数 g_i に関する運動方程式,

$$\begin{aligned} & g_i(\vec{x} + \vec{c}_i\delta, t + \delta) - g_i(\vec{x}, t) = -\frac{g_i(\vec{x}, t) - g_i^{eq}(\vec{x}, t)}{\tau_\phi} \\ & + (1 - q)[g_i(\vec{x} + \vec{c}_i\delta, t) - g_i(\vec{x}, t)], \end{aligned} \quad (7)$$

により, それぞれ, 解析される. ここで, τ_n , τ_ϕ は緩和時間, $\vec{c}_i$ は離散速度である. H. W. Zheng は, 式 (6) の F_i により圧力が, 式 (7) の q により Cahn-Hilliard 方程式が適切に導出されるようにしている. 分布関数 f_i は, 図 1(a) に示すように離散速度が,

$$\begin{aligned} & \vec{c}_0 = (0, 0), \\ & \vec{c}_i = \left(\cos \frac{(i-1)\pi}{2}, \sin \frac{(i-1)\pi}{2} \right), \quad i = 1-4, \quad (8) \\ & \vec{c}_i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{(2i-1)\pi}{4}, \sin \frac{(2i-1)\pi}{4} \right), \quad i = 5-8, \end{aligned}$$

で定義される D2Q9 モデル上に定義され, 分布関数 g_i は, 図 1(b) に示すように $\vec{c}_0 = (0, 0)^T$, $\vec{c}_{1,3} = (\pm 1, 0)^T$, $\vec{c}_{2,4} = (0, \pm 1)^T$ で定義される D2Q5 モデル上に定義される. ここで D2 は 2 次元を意味し, Q の後の数字は離散速度の数を表す⁽⁴⁾.

式 (6), (7) の平衡分布関数は,

$$f_i^{eq} = w_i \left[A_i + n \left(1 + 3\vec{c}_i \cdot \vec{u} + \frac{9(\vec{c}_i \cdot \vec{u})^2}{2} - \frac{3\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right) \right], \quad (9)$$

$$g_i^{eq} = B_i + C_i\phi + D_i\phi\vec{c}_i \cdot \vec{u}, \quad (10)$$

である. 重み w_i と係数 A_i , および $B_i - D_i$ は,

$$w_0 = \frac{4}{9}, \quad w_i|_{i=1,2,3,4} = \frac{1}{9}, \quad w_i|_{i=5,6,7,8} = \frac{1}{36}, \quad (11)$$

$$A_0 = -\frac{15}{4}\phi\mu_\phi, \quad A_i = 3\phi\mu_\phi \quad (i \neq 0),$$

$$B_0 = -2\Gamma\mu_\phi, \quad B_i = \frac{1}{2}\Gamma\mu_\phi \quad (i \neq 0), \quad (12)$$

$$C_0 = 1, \quad C_i = 0 \quad (i \neq 0), \quad D_i = \frac{1}{2q},$$

(a) D2Q9 model

(b) D2Q5 model

Fig. 1 Schematic diagrams of the discrete velocity directions.

のように定義される. ここで, Γ は易動度を調整するパラメータである.

式 (6) の F_i は, 式 (2) の圧力項 $\vec{\nabla}P$ と外力項 $\vec{g}$ が適切に導出されるように, $\vec{F} = \mu_\phi \vec{\nabla}\phi + \vec{g}$ とし,

$$F_i = w_i n \left(1 - \frac{1}{2\tau_n} \right) [3\vec{c}_i \cdot \vec{F} + 9(\vec{u}\vec{F} : \vec{c}_i\vec{c}_i) - 3\vec{u} \cdot \vec{F}], \quad (13)$$

で与えられる⁽⁹⁾. n , $\vec{u}$, ϕ は分布関数 f_i , g_i を用い,

$$n = \sum_i f_i, \quad \phi = \sum_i g_i, \quad \vec{u} = \left(\sum_i f_i \vec{c}_i + \frac{\delta}{2} \vec{F} \right) / n, \quad (14)$$

のように定義される.

2.2 化学ポテンシャル, 粘性係数及び易動度の導出
2 つの平衡状態 $\pm\phi^*$ を有する二重井戸ポテンシャル $\Phi(\phi) = a(\phi^2 - \phi^{*2})^2$ を用い, 化学ポテンシャルは,

$$\mu_\phi = 4a\phi(\phi^2 - \phi^{*2}) - \kappa \nabla^2 \phi, \quad (15)$$

のように導出される⁽⁴⁾. ここで, $\phi^* = (\rho_H - \rho_L)/2$ である. 二相の相互作用エネルギーを調整するパラメータ a と, 表面張力パラメータ κ は, 界面に垂直な座標系 ζ に対し,

$$\phi = \phi^* \tanh(2\zeta/W), \quad (16)$$

のように界面形状が与えられる場合,

$$a = \frac{3\sigma}{4W\phi^{*4}}, \quad \kappa = \frac{3\sigma W}{8\phi^{*2}}, \quad (17)$$

となる⁽⁴⁾. ここで, W は界面厚さ, σ は界面張力である. 式 (15) で示される化学ポテンシャルから, 圧力は,

$$\begin{aligned} P &= a(3\phi^4 - 2\phi^{*2}\phi^2 - \phi^{*4}) \\ &\quad - \kappa\phi \nabla^2 \phi + \kappa \frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{2} + \frac{n}{3}, \end{aligned} \quad (18)$$

のように導出される⁽⁴⁾.

式 (6), (7) に Chapman-Enskog 展開を行うと, 粘性係数 μ と易動度 θ_ϕ は,

$$\mu = \frac{n}{3}(\tau_n - 0.5)\delta, \quad \theta_\phi = q\Gamma(\tau_\phi q - 0.5)\delta, \quad (19)$$

Fig. 2 Schematic illustration of the two-phase displacement for surface tension measurements.

Fig. 3 The influence of the width of the interface layer.

のように導出される。ここで、Cahn-Hilliard 方程式 (3) を正確に導出するため、 q は、

$$q = \frac{1}{\tau_\phi + 0.5}, \quad (20)$$

となる。

2.3 拡散界面モデル 非平衡系の自由エネルギーに基づく拡散界面モデル (Diffuse-Interface Model, DIM) による解法は、実在の界面幅であるナノメートル・オーダーよりもはるかに大きな界面を形成するが、濡れ性などを考慮した二相流解析に有効であることが高田らにより示されている⁽¹⁰⁾。このような一定幅の界面厚さを考慮する DIM では、一般に、粘性係数はオーダー・パラメータ ϕ の関数として界面上を滑らかに変化する⁽³⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。本研究では、界面張力や圧力の計算に対してのみ界面厚さが考慮されるものとし、オーダー・パラメータが $\phi = 0$ である位置を界面とし、

$$\tau_n = \begin{cases} \tau_{nA} & \phi \geq 0, \\ \tau_{nB} & \phi < 0, \end{cases} \quad (21)$$

のように、局所的に緩和時間 τ_n を変えることで、各相の粘性係数を考慮する。ここで、 τ_{nA} 、 τ_{nB} は A 相、B 相の粘性係数 μ_A 、 μ_B に対応する緩和時間であり、式 (19) から、

$$\tau_{nA} = \frac{3\mu_A}{n\delta} + \frac{1}{2}, \quad \tau_{nB} = \frac{3\mu_B}{n\delta} + \frac{1}{2}, \quad (22)$$

のように求められる。

3. 手法の検証

3.1 不連続粘性の界面張力への影響 一定格子幅の界面厚さが存在する LBM に対し、式 (22) のように、不連続に各相の粘性を変えることによる界面張力 σ への影響を検証する。図 2 に示すように A 相 ($\phi \geq 0$) で満たされた 100×100 の計算領域に、半径 $R = 25$ の B 相 ($\phi < 0$) を置き、周期境界条件を設定する。界面張力 σ は Laplace の法則、

$$\sigma = R\Delta P, \quad (23)$$

から算出される。 ΔP は気泡の内外圧力差であり、圧力 P は式 (18) から計算される。式 (15) に示される化学ポテンシャルの計算に用いられるラプラシアンは、空間二次精度の近似式⁽¹¹⁾、

$$\nabla^2 \phi = \sum_{i=1}^4 \phi_i - 4\phi_0, \quad (24)$$

が用いられる。以下の全ての計算において、H. W. Zheng の論文⁽⁴⁾と同様に、 $\delta = 1$ 、 $\tau_\phi = 0.7$ 、 $\sigma = 0.01$ 、 $\Gamma = 100$ 、 $\rho_H = 1000$ 、 $\rho_L = 1$ とし、密度比を 1000 にする。ここで、A 相の粘性 μ_A と B 相の粘性 μ_B に対する粘性比 $M = \mu_B/\mu_A$ の設定方法は、 $M = 0.01 \sim 1$ では $\mu_B = 0.1n$ とし、 $\mu_A = \mu_B/M$ の関係から μ_A を求め、 $M = 10 \sim 100$ では $\mu_A = 0.1n$ を先に与え、 $\mu_B = M\mu_A$ から μ_B を決定した。初期条件の界面形状は式 (16) に従う。図 3 に界面幅 W と、界面張力 σ との関係を示す。粘性比 $M = 1$ の場合と同様に、全ての粘性比において、界面厚さが小さくなるにつれ、設定した値 $\sigma = 0.01$ に対する誤差が大きくなっている。また、拡散界面モデルでは界面厚さ W を小さくすると数値的に不安定になり易いため、界面厚さに対し $W > 3$ まで計算することにした。粘性比 $M = 0.01$ において $W = 3.6$ で、 $M = 1$ においては $W = 4.4$ で、1 点のみ急に値が変化したのは、定常状態近傍での数値的な微細な振動のため収束判定条件 $|\Delta P^{n+1} - \Delta P^n| \times R < 10^{-8}$ を満足し、計算が終了したためと考えられる。図 3 において、全ての粘性比について、粘性比 $M = 1$ の場合とほぼ等しい精度で界面張力が計算されていることと、 $M = 1$ において $W = 4.4$ で急に値が変化したことから、以下の

Fig. 4 The verification of Laplace's law.

計算では、文献⁽⁴⁾と同じく、界面厚さを $W = 5$ に設定する。

3.2 Laplace の法則 次に、界面厚さを $W = 5$ 、界面張力 $\sigma = 0.01$ に設定し、式 (23) で示される Laplace の法則の検証を行う。粘性比 M を変更した場合の、気泡の内外圧力差 ΔP と、気泡の曲率 $1/R$ との関係を図 4 に示す。実線は、 $\sigma = 0.01$ に対する式 (23) の理論式を示す。図 4 から、全ての粘性比 M に対して、曲率が小さくつまり半径が大きく十分な格子点数が存在する領域で、Laplace の法則が満足されていることが分る。以上より、DIM における界面厚さを、圧力と界面張力の計算にのみ考慮し、粘性は界面位置 $\phi = 0$ で不連続に変更しても、静止二相流体の計算には実用上問題ないことが分る。

3.3 Poiseuille Flow 図 5 に示すように、外力 g が存在する Poiseuille Flow のシミュレーションを行い、式 (21) で示されるように、1 格子間隔で粘性を変化させても、二相流を安定に計算できるか検証する。幅 $2L$ のチャンネル内の壁近傍の領域 $y < -L/2$, $y > L/2$ において $\phi \geq 0$, $-L/2 \leq y \leq L/2$ において $\phi < 0$ とし、格子点数は 4×101 とする。壁近傍の τ_{nA} の値が 1 近傍に設定され、かつ、安定に計算できるように、粘性比 $M = \mu_B/\mu_A$ が、 $M = 1 \sim 100$ では $\tau_A = 0.53$, $M = 0.5$ では $\tau_A = 0.56$, $M = 0.1$ では $\tau_A = 0.8$, $M = 0.01$ では $\tau_A = 3.5$ とする。上下の静止壁に対する分布関数 f_i に対する境界条件の設定には、Q. Zou らによって提案された二次精度の非平衡分布関数に対するバウンス・バック・ルール⁽¹²⁾を用いる。 g_i に対する壁境界条件は、大西らによって提案された 2D5Q モデルに対する境界条件⁽¹³⁾を用い、壁上で $\partial\phi/\partial y = 0$ とし、上壁に対しては $\phi_4 = \phi_2$ 、下壁に対しては $\phi_2 = \phi_4$ とする。 x 軸方向

Fig. 5 Schematic illustration of the two-phase displacement and the corresponding images of the Poiseuille flow inside a channel. $L = 50$.

Fig. 6 Velocity profiles of the generalized Poiseuille flow for different phase viscosities.

には周期的境界条件を適用し、 $g_x = 1.0 \times 10^{-5}$ の外力を与える。粘性が異なる二相に対する Poiseuille Flow の厳密解は、 $y \geq 0$ の領域に対し、

$$u_x(y) = \begin{cases} \frac{g_x}{2} \left[\frac{(L^2/4 - y^2)}{\mu_B} + \frac{3L^2}{4\mu_A} \right] & 0 \leq y \leq \frac{L}{2}, \\ \frac{g_x}{2} \left[\frac{(L^2 - y^2)}{\mu_A} \right] & \frac{L}{2} < y \leq L, \end{cases} \quad (25)$$

で与えられる。LBM による計算結果を $\bullet$ で、厳密解を実線で図 6 に示す。収束判定条件は、 $|u^{n+1} - u^n| \leq 10^{-14}$ とした。図 6 において、全粘性比に対して、数値計算結果と厳密解が一致しており、本 LBM により粘性の異なる二相が存在するチャンネル内流れを適切に解析できることが分る。

3.4 Couette Flow 移動境界条件に対する本 LBM の適用性を検証するため、粘性が異なる二相がチャンネル内に存在する Couette Flow の計算を行う。図 7 に示すように、格子点数を 4×201 とし、移動

Fig. 7 Schematic illustration of the two-phase displacement and the corresponding images of the Couette flow inside a channel. $L = 100$.

Fig. 8 Velocity profiles of the generalized Couette flow for different phase viscosities.

境界条件を用いる点以外は、 ϕ や τ_n 等の計算条件や境界条件の設定手順は、Poiseuille Flow と等しい。 $u_x(y = -L) = -u_0$, $u_x(y = L) = u_0$ とした場合の厳密解は、 $y \geq 0$ の領域に対し、

$$u_x(y) = \begin{cases} \frac{2u_0\mu_A y}{L(\mu_A + \mu_B)} & 0 \leq y \leq \frac{L}{2}, \\ \frac{u_0(\mu_B(2y-L) + \mu_A L)}{L(\mu_A + \mu_B)} & \frac{L}{2} < y \leq L, \end{cases} \quad (26)$$

である。本計算では $u_0 = 0.05$ とした。厳密解を実線で、計算結果を $\bullet$ で図 8 に示す。全ての粘性比に対して厳密解と等しい結果が得られている。以上より、DIM に基づく LBM において粘性を 1 格子幅で変更しても、界面上に偽の流れ⁽³⁾は発生せず、粘性による流速への影響を適切に計算できることが示された。

3.5 Fingering 現象 LBM は複雑な境界条件の設定が容易であり、二相流解析に適していることから、多孔質体内の二相流動解析に重要な、粘性の異なる二相の Saffman-Taylor 不安定性⁽⁸⁾に起因する Fingering

Fig. 9 Two-phase displacement in a Hele-Shaw cell in the initial condition.

現象解析に本手法を適用する。前述の計算条件からパラメータ $\Gamma = 1000$ のみ条件を変える。格子点数は 51×251 である。 f_i に対しては、Q. Zou によって提案された手法⁽¹²⁾を用い、図 9 に示すように、左右境界に静止壁境界を、上下に流入・流出条件を設定する。流速の最大値が $u_{max} = 1/(4L\mu_A)$ となるように、流入、流出部に Poiseuille Flow の厳密解である放物型の流速分布を設定する。ここでチャンネル幅は、 $2L$ である。 g_i に対しては、オーダー・パラメータ ϕ の勾配がゼロになるように、上壁、下壁、右壁、左壁に対して、それぞれ、 $g_4 = g_2$, $g_2 = g_4$, $g_3 = g_1$, $g_1 = g_3$ とする。B 相で満たされた領域内に、流入部近傍に 14 格子幅の A 相 ($\phi \geq 0$) をおく。図 10 に粘性比を変えた場合の、Finger の成長過程を示す。二相界面の位置 ($\phi = 0$) を、流入部(下壁)から時間 $t = 2.5 \times 10^4$ 刻みに示す。 τ_A は、それぞれ、A 相に対する B 相の粘性比 $M = \mu_B/\mu_A$ に対し、 $M = 0.5$ では $\tau_A = 1.25$, $M = 1 \sim 10$ では $\tau_A = 0.875$ とした。全ての粘性比に対し、安定した二相界面の成長が観測でき、 M が大きくなるにつれ、Fingering 現象が現れ、成長速度が速くなっている。

Finger 先端の速度 U_{tip} と計算領域全体の平均速度 U_0 の比に対する、粘性比 M の影響について、N. Rakotomalala らによる計算結果⁽⁵⁾との比較を図 11 に示す。図 11 において、粘性比 $M < 0.5$ である Saffman-Taylor 不安定性が発生しない B 相の粘性が流入する A 相より低い領域では、N. Rakotomalala らによる計算結果よりも速度 U_{tip} が小さく評価されているが、Viscous Fingering が発生する領域では、N. Rakotomalala らの結果と等しい結果が得られている。次に、粘性比 M を

Fig. 10 Finger evolution in the Hele-Shaw cell for different values of the viscosity ratio.

Fig. 11 Reduced tip velocity U_{tip}/U_0 versus the viscosity ratio.

10に固定し、キャピラリ数 Ca ,

$$Ca = \frac{U_{tip}\mu_B}{\sigma}, \quad (27)$$

を変更した場合の、Fingerの時間発展の様子を図12に示す。図12(a), (b), (c)では、時間を 2.5×10^4 刻みで、図12(d)では、 5.0×10^4 刻みで界面形状を示す。図12に、キャピラリ数が増加するにつれ、Fingerの幅 $2H$ が狭くなっていく様子が示されている。

D. Halpern らにより、チャンネル幅 $2L$ に対する Finger の相対幅 $\lambda = H/L$ に関する関係式、

$$\lambda = 1 - 0.417(1 - \text{Exp}(-1.69Ca^{0.5025})), \quad (28)$$

が、境界要素法による解析結果に基づき提案されている⁽¹⁴⁾。キャピラリ数を変化させた場合の本モデルによ

Fig. 12 Finger evolution in the Hele-Shaw cell for different values of the capillary numbers.

Fig. 13 Finger width as a function of capillary number.

る計算結果を●で、式(28)を実線で図13に示す。図13から、D. Halpern らによって示された境界要素法による解析結果と同様に、キャピラリ数が増加するにつれ、Fingerの幅が狭くなり、0.5に近づいていくことが分る。

P. G. Saffman らは、界面張力を考慮しない場合の Finger の形状について、次式で示される理論式を提案している⁽⁸⁾。

$$y = y_{tip} - \frac{2L(1-\lambda)}{2\pi} \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi(x-L)}{2\lambda L} \right) \right]. \quad (29)$$

図14に、キャピラリ数が $Ca = 0.935$ と $Ca = 19.08$ の場合の Finger 形状を示す。本計算では、相対幅 λ が $1/2$ に近づくにつれ、式(29)で示される理論解に近づいており、これは、A. Hernández-Machado らによって示された Phase-Field 法による計算結果⁽¹⁵⁾と同

Fig. 14 Numerical results (lines) and Saffman-Taylor solution (symbols).

等である。以上から、界面幅とは関係なく、界面位置 ($\phi = 0$) で不連続に粘性を切り替えることで、LBM による Hele-Shaw セル内の Finger の成長を解析できることが示された。

4. お わ り に

H. W. Zheng らによって提案された高密度比の二相流解析に対する LBM の緩和時間をオーダー・パラメータの符号により局所的に変更することで、二相の異なる粘性を解析できることを示した。Laplace の法則の検証から、界面位置で粘性比を変更しても、界面張力が適切に導出されることが示された。Poiseuille Flow, Couette Flow の計算において、厳密解と LBM による数値解とが、0.01~100 の粘性比の範囲で一致することが示された。Hele-Shaw セル内の Finger に関する計算において、粘性比とキャピラリ数による Finger の幅、終端速度、形状について、他の計算結果や理論式と一致する結果が得られた。以上から、数メッシュの界面幅が存在する拡散界面モデルに基づく LBM において、粘性比を界面位置で不連続に切り替えても、二相流を安定に計算できることが実証された。

謝 辞

本研究の実施に当たり、大変貴重なご意見を頂いた富山大学大学院理工学研究部山本辰美助教、東京工業大学高橋亮一名誉教授、富山大学竹越栄俊名誉教授、富山大学奥井健一名誉教授に深謝する。

文 献

- (1) Chen, S. and Doolen, G. D., Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.30, (1998), pp.329-364.
- (2) Shan, X. and Chen, H., Lattice Boltzmann Model for Simulating Flows with Multiple Phases and Components, *Physical Review E*, Vol.47, (1992), pp.1815-1819.
- (3) Inamuro, T., Ogata, T., Tajima, S., and Konishi, N., A Lattice Boltzmann Method for Immiscible Two-

Phase Flows with Large Density Differences, *Journal of Computational Physics*, Vol.198, (2004), pp.628-644.

- (4) Zheng, H. W., Shu, C., and Chew, Y. T., A Lattice Boltzmann Model for Multiphase Flows with Large Density Ratio, *Journal of Computational Physics*, Vol.218, (2006), pp.353-371.
- (5) Rakotomalala, N., Salin, D., and Watzky, P., Miscible Displacement between Two Parallel Plates: BGK Lattice Gas Simulations, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.338, (1997), pp.277-297.
- (6) Langaas, K. and Yeomans, J. M., Lattice Boltzmann Simulation of a Binary Fluid with Different Phase Viscosities and its Application to Fingering in Two Dimensions, *The European Physical Journal B*, Vol.15, No.1 (2000), pp.133-141.
- (7) Orlandini, E., Swift, M. R., and Yeomans, J. M., A Lattice Boltzmann Model of Binary Fluid Mixture, *Europhysics letters*, Vol.32, No.6 (1995), pp.463-468.
- (8) Saffman, P. G. and Taylor, G. I., The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, Vol.245, (1958), pp.312-329.
- (9) Guo, Z., Zheng, C., and Shi, B., Discrete Lattice Effects on the Forcing Term in the Lattice Boltzmann Method, *Physical Review E*, Vol.65, (2002), pp.046308 (6pages).
- (10) Takada, N., Matsumoto, J., Matsumoto, S., and Ichikawa, N., Application of a Phase-Field Method to the Numerical Analysis of Motions of a Two-phase Fluid with High Density Ratio on a Solid Surface, *Journal of Computer Science and Technology*, Vol.2, No.2 (2008), pp.318-329.
- (11) Seta, T. and Okui, K., Effects of Truncation Error of Derivative Approximation for Two-Phase Lattice Boltzmann Method, *Journal of Fluid Science and Technology*, Vol.2, No.1 (2007), pp.139-151.
- (12) Zou, Q. and He, X., On Pressure and Velocity Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model, *Physics of Fluids*, Vol.9, (1997), pp.1591-1598.
- (13) Onishi, J., Chen, Y., and Ohashi, H., Lattice Boltzmann Simulation of Natural Convection in a Square Cavity, *JSME International Journal Series B*, Vol.44, No.1 (2001), pp.53-62.
- (14) Halpern, D. and Gaver, D. P., Boundary Element Analysis of the Time-Dependent Motion of a Semi-infinite Bubble in a Channel, *Journal of Computational Physics*, Vol.115, (1994), pp.366-375.
- (15) Hernández-Machado, A., Lacasta, A. M., Mayoral, E., and Poire, E. C., Phase-Field Model of Hele-Shaw Flows in the High-Viscosity Contrast Regime, *Physical Review E*, Vol.68, (2003), pp.046310 (6pages).