鉛直加振を受けるメニスカスの周期変形により励起される
円筒容器内界面波の特性*伊藤 高啓^{*1}, 日比 昭^{*2}, 久木田 豊^{*3}Characteristics of the Interface Waves Excited
by Periodic Deformation of Meniscus Subject to Vertical Oscillation
in a Cylindrical ContainerTakahiro ITO^{*4}, Akira HIBI and Yutaka KUKITA^{*4} Department of Mechanical Engineering, Toyohashi University of Technology,
1-1 Hibarigaoka, Tempaku-cho, Toyohashi-shi, Aichi, 441-8580 Japan

Standing waves excited by the periodic deformation of meniscus are investigated for the interface between two immiscible fluids confined in a vertical cylindrical container. When meniscus is subject to vertical oscillation, it can be deformed due to the time-dependent change of the capillary length, which is the horizontal scale of the meniscus, and the periodic deformation excites interface waves. The resonance characteristics of the excited wave is experimentally and numerically investigated under pinned-edge contact line condition and it is found that the resonant wave height grows with increase in the absolute deviation of the static contact angle from 90 degrees. A linear analysis model is derived under the assumption of quasi-static deformation of the meniscus with respect to the change in the vertical acceleration. The model shows that the magnitude of the excitation term is in proportion to $\tan|\pi/2 - \theta_0|$ with θ_0 the static contact angle, and to the fourth power of the exciting frequency. With appropriate decay factor, the linear model well reproduces the resonance curve of the wave height and the dependence of the resonant wave height on the static contact angle observed in the experiments and the numerical simulations.

Key Words: Wave, Surface Tension, Resonance, Contact Angle, Numerical Analysis, Linear Analysis

1. 緒 言

容器内に封入された流体界面と固体壁面のなす角度(接触角)は, 流体が静止した条件においても一般に表面張力のバランスにより 90°からずれる. このため壁面が鉛直であっても壁面付近の界面は傾斜し, 界面は上もしくは下に凸になる. この湾曲部分(メニスカス)の幅はおおよそキャピラリー長 $l_c = \sqrt{\sigma / \Delta \rho g}$

($\Delta \rho$: 上下流体間密度差, g : 鉛直方向加速度, σ : 表面張力)により与えられるが, 流体が加振を受けてメニスカスの形状が周期的に変化すると, 加振振動数に等しい振動数の界面波が励起される.

メニスカスの形状が時間変化する原因としてはまず, 接触線(界面と固体壁面の交線)の易動度(mobility)によって界面の上下運動が拘束されることの影響が挙げられる. 接触線は, 完全に均一で平坦な固体表面上では自由に移動できるが, 表面上の微小な欠陥や異物によって容易に捕捉され, いったん捕捉されると, 接触角がある範囲を超えない限り壁面に対して静止した状態を保つ. この範囲の上限・下限をそれぞれ前進接触角, 後退接触角と呼ぶ. また, そのように接触角がある範囲で任意の値を取る性質のことを接触角ヒステリシスとも呼ぶ. このような性質が現れる条件下において流体を壁面に対して相対的に加振すると, 接触線が壁面のある高さに静止したまま, 接触角及びメニスカス形状が周期的に変化する. ただし, 界面波の波高が大きくなって接触角が前進接触角・後退接触角を越えるようになると接触線は移動を開始し, これはメニスカスの変形を緩和する効果を持つ⁽¹⁾⁻⁽³⁾.

* 原稿受付 2009年1月9日.

^{*1} 正員, 豊橋技術科学大学工学部(〒441-8580 豊橋市天伯町雲雀が丘1-1).^{*2} 豊橋技術科学大学工学部.^{*3} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8601 名古屋市千種区不老町).

E-mail: takaito@mech.tut.ac.jp

また、これとは異なるメニスカスの変形メカニズムとして、鉛直加速度の時間変動によるものがある。これはメニスカスの水平方向スケールである l_c が鉛直加速度に依存することによる。この変形は接触線の易動度や流体-壁面間の相対運動にかかわらず発生し、これによっても界面波が励起される。

これらのメニスカスの形状の変化によって励起される界面波は容器半径 R が l_c に対して大きくないときに顕著となり、特に R が l_c と同程度以下 (すなわち Bond(Bo)数 $= 4\rho g R^2 / \sigma = R^2 / l_c^2 < 1$) の場合には毛細管に見られるように、表面張力によって界面が全体にわたって湾曲し、流体を加振したときの界面形状の時間変化はメニスカスにおける表面張力の影響のみが支配的となる⁽⁴⁾⁻⁽⁷⁾。これに対し、 R が l_c よりも十分に大きい場合 ($Bo > 100$ 程度) には表面張力による効果は小さくなり、流体を加振した際の低次モードの界面波は容器直径と重力加速度によって定まる固有振動数を持ち、重力加速度の変動によるパラメトリック励振によって励起される。これを Faraday 波と呼ぶ⁽⁸⁾⁻⁽¹⁵⁾。Faraday 波を励起するためには加振の振幅がある値以上であることが必要であるが、固有振動数の2倍の振動数で低調波加振したときに、最も小さな加振振幅で励起される。

一方、 Bo 数がそれらの中間程度 (例えば $Bo \sim 50$) の場合には、メニスカスの表面張力・重力加速度双方が界面波に対して影響を及ぼすため、Faraday 波とメニスカスから励起される界面波の双方が混在しうる。また、 Bo 数がそれよりも小さな場合でも、鉛直加振下においては上で述べたようなメニスカスの周期変形は常に起こるため、壁面付近の界面形状への影響は無視できない場合もある。このため、Faraday 波の発生限界や界面波形状を論じている研究ではメニスカスの周期変形の影響に言及しているものもあるが⁽¹¹⁾⁻⁽¹³⁾、それを定量的に記述したモデルは提案されていない。

このような状況でのメニスカス形状の変動は、密度差の小さい液液界面や液体金属のような高表面張力液体の自由界面が容器内で加振を受ける際の界面安定性に大きな影響を持つ他、壁面上の気泡や液泡の運動の制御を行う際にも重要となるため、その定量的な評価手法の確立が急務となっている。

本研究では、このような表面張力と重力加速度の双方が重要となる Bo 数が 50 程度の領域において、鉛直加速度の周期変動によるメニスカスの周期変形により励起される鉛直円管内界面の定在波に着目し、特に接触線が壁面に対して完全に拘束された条件下 (ピン止め条件下) において励起される界面波の共振特性につ

Fig. 1 Experimental system.

いて、実験および数値解析により明らかにすることを目的として行った。また、それらの特性に対する支配因子を明確にするため、界面の自由振動を記述する線形モデルとメニスカスの変形による界面波励起を組み合わせた線形理論モデルを提案することも目的とした。

2. 実験及び数値解析手法

2・1 実験手法 実験は図1に示すように、動粘度 $\nu=0.82\text{mPa}\cdot\text{s}$ 、密度 $\rho=818\text{ kg/m}^3$ のシリコンオイル (PDMS) と純水 ($\nu=1\text{mPa}\cdot\text{s}$, $\rho=998\text{kg/m}^3$) とを内径 56mm の透明アクリル円管内に層状に封入し、この円管を鉛直加振する体系で行った。液深は両流体とも 30mm とし、PDMS の上部界面は自由表面のままとした。両流体間の界面張力はウィルヘルミー法による測定では 30 mN/m であった。よって l_c は 4.1 mm, Bo 数は 46 となる。

水-PDMS 間界面位置の測定は可視化法によって行った。すなわち、水に蛍光発光性を有する Rhodamine-B を微量溶かし、管軸を通る鉛直断面に照射するレーザーシート (波長 532nm) によりこれを励起することによって水部分のみを発光させ、その明部の上端を界面位置として検出した。撮影は界面における像の屈折を回避するため界面よりも下方に設置した CCD カメラで行い、撮影後に仰角による像のゆがみを補正することによって正しい界面形状を得た。また、アクリル円筒を囲うように直方体水槽を設置することでアクリル円筒表面での屈折を抑えている。

本実験ではアクリル壁面と PDMS・水間界面からなる接触線は接触角ヒステリシスによりアクリル表面にほぼピン止めされていたため、静止接触角をある程度任意に変更することができた。本実験ではこれを利用し、下部流体 (水) の体積を注射器で微調整することにより、静止接触角を 67°, 85°, 90°, 116°, 132° の 5

Fig. 2 Typical mesh distribution.

Fig. 3 Interface profile for $\theta_0=132^\circ$.

段階に変化させ、静止接触角の界面波励起への影響を調べた。

加振振幅は1.75mmとし、加振振動数は本条件における最低次の軸対称界面波の固有振動数（静止接触角が 90° で接触角がピン止めされているとき2.39Hz）を中心として1.7~3.5 Hzとした。この加振条件は鉛直加振に伴う Faraday 不安定波の発生領域からは殆ど外れている。

撮影画像の空間分解能は界面付近で $75\mu\text{m}$ 、時間分解能は 30fps である。カメラは加振台に固定されているため、測定される界面位置の変位に加振変位は含まれない。

2・2 数値解析手法 数値解析は筆者らが本実験と似た体系を解析した際に適用した手法⁽¹⁾を用いた。

この方法では上層（灯油）中の流れは解析せず、下層（水）中の流れに対する物性および界面での境界条件において仮想的に上層の存在を考慮するものである。すなわち、流体の運動が速度ポテンシャルによって表すことができるものとして2層の円管内微小振幅波の挙動を求めると上層流体と下層流体の速度ポテンシャル（ Φ_a , Φ_b とする）は $z=0$ を界面とする r - z 円筒座標

Fig. 4 Resonance curve of interface wave for $\theta_0=132^\circ$.

系において $\Phi_a(r, z, t) = -\Phi_b(r, -z, t)$ で表される。この関係を界面での上下流体間の圧力差がラプラス圧に等しいことを表す式に代入すると、単層の場合での式表現で用いられる重力加速度等の各物性値に定数を乗じた形が得られる。よって本研究でもこのようにして変換された物性値を用いて解析を行った。

また、実験で観察された界面波は基本的に管軸対称であり、エントレインメントなどの発生もみられなかったので、2次元 r - z 座標系の境界適合座標手法を用いた。解析体系は水平方向は管半径に等しく 28mm、縦方向は水の平均液深さと等しく 30mm とした。メッシュには図2に示すように壁面及び界面付近で細くなるような不等間隔メッシュを採用した。このときの最小メッシュサイズは接触線付近で半径方向0.18mm、軸方向 0.08mm であり、総メッシュ数は半径方向 42、軸方向 38 である。接触線での境界条件は実験に合わせてピン止めされるような条件とした。これは接触線の速度を0で拘束しつつ接触角は界面の運動によって自由に変動するようにするものである。

3. 実験及び数値解析結果

図3に静止接触角 $\theta_0=132^\circ$ 、加振振動数 $f=2.32$ Hzのときの界面運動が上死点および下死点に達したときの界面形状を実験・数値解析についてあわせて示す。実験からは接触線がピン止めされているのが明確に捉えられている。また、数値解析結果は実験結果をよく再現しているのがわかる。図4には $\theta_0=132^\circ$ のときの波高（管軸部分での界面変位の振幅）の周波数応答を示す。波高がピークを示す共振振動数は実験、数値解析とも 2.32 Hz となっている。2.1Hz よりも加振振動数の低い領域での実験値は波高が 0.1mm よりも小さく、ほぼ画像の解像度に近いため、測定された波高自身と同程度もしくはそれ以上の誤差を含むものと思われる。そのために解析値よりも小さな値を示しているものと考えられる。

Fig. 5 Resonant amplitude vs static contact angle.

Fig. 6 Resonant frequency vs static contact angle.

図5および図6には静止接触角を変化させた時の各々の静止接触角に対するピークとなる波高（共振波高）及びそのときの振動数（共振振動数）を示す。なお、共振値は周波数応答を実験・数値解析とも0.02Hz刻みで調べた結果である。また、今回の条件では、数値解析により求めたごく小さな波高下での自由振動から求めた固有振動数と、波高がピークを取る共振振動数とはほぼ一致していた。

図5から共振波高は θ_0 が90°から離れるにしたがって大きくなるのがわかる。このような波高の θ_0 への依存性は4章で論じる。一方、図6で示される共振振動数については実験値ではややばらつきがみられるが、数値解析では θ_0 が90°から離れるに従って低下する傾向を示している。このような傾向は接触線がピン止めされているときに見られるものであり、Nicolas⁽¹⁶⁾が単層系（自由界面を持つ気液系）に対して線形理論を用いて理論的に示している。また、 $\theta_0=90^\circ$ のときの数値解析における固有振動数は2.38Hzでこれは接触線が自由に滑る時の固有振動数(2.10 Hz)よりも高いが、これも接触線がピン止めされていることの影響である。このような接触線のピン止めによる固有振動数への影響はHendersonら⁽¹³⁾やMiles⁽¹⁷⁾が理論的に示している。

たとえばMilesの理論を用いれば、2.39Hzが求まり、解析値とよく一致する。

4. 線形理論モデル及びそれを用いたパラメータ解析

ここではMilesの線形理論解析⁽¹⁷⁾をもとに、静止接触角およびキャピラリー長さが共振波高に与える影響を線形解析により導く。

4・1 接触線がピン止めされた場合の界面波の自由振動（静止接触角=90°） まず静止接触角が90°の状態において、接触線がピン止めされた場合の軸方向に無限の長さを持つ円筒内流体の界面における微小振幅波の自由振動を表す式を導く。

今、流れ場が非粘性・渦無し velocityポテンシャル Φ で表されるものとする流れ場を表す基礎方程式は

$$\nabla^2 \Phi_a = \nabla^2 \Phi_b = 0 \quad (1)$$

で表され、これに対する境界条件は

$$\partial \Phi_a / \partial r = \partial \Phi_b / \partial r = 0 \quad (r=R), \quad (2a)$$

$$\partial \Phi_a / \partial z = 0 \quad (z=\infty), \quad (2b)$$

$$\partial \Phi_a / \partial z = 0 \quad (z=-\infty) \quad (2c)$$

となる。ここで添え字 a, b はそれぞれ上層及び下層流体を表し、円筒座標の原点は管軸における界面位置としている。境界条件(2a)~(2c)を満たす式(1)の解は

$$(\Phi_a, \Phi_b) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\omega A_{mn}}{\lambda_{mn}} J_m(\lambda_{mn} r) \times \cos m\phi \exp(i\omega t) (-e^{-\lambda_{mn} z}, e^{\lambda_{mn} z}) \quad (3)$$

で表される。ここで J_m は第1種 m 階のベッセル関数を表し、 λ_{mn} は $dJ_m(\lambda_{mn} r)/dr|_{r=R} = 0$ の n 番目の根

である。界面位置 η_p と速度ポテンシャルの関係は運動学的条件により

$$\partial \Phi / \partial z = \partial \eta_p / \partial t \quad (z=0) \quad (4)$$

で書かれるので、界面形状は

$$\eta_p = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) \cos m\phi T_{mn} \quad (5)$$

となる。ここで $T_{mn} = A_{mn} e^{i\omega t}$ は η_p の mn 成分の角周波数 ω での振幅を表す。これを用いると界面($z=\eta_p \approx 0$)での速度ポテンシャルは

$$\Phi_{bmn}(z=0) = i\omega \eta_{pmn} / \lambda_{mn} \quad (6)$$

となる。また、界面での圧力の釣り合いは線形化されたベルヌイの式より以下のように導かれる。

$$-(\rho_a + \rho_b) \frac{\partial \Phi_b}{\partial t} - (\rho_b - \rho_a) g \eta_p + \sigma \nabla^2 \eta_p = 0 \quad (7)$$

ここで ρ , g , σ は密度及び重力加速度, 表面張力を表し, 第 3 項のラプラス圧を求める部分について $(\partial \eta_p / \partial r)^2 \ll 1$ の仮定を用いている. 式(7)で表される場合の界面運動では接触角は常に 90° で一定となり, 接触線は界面の運動に従って自由に動くものとなる.

これに対して Miles⁽¹⁷⁾ は接触線運動が拘束を受ける際の界面形状について, 拘束がない場合の界面形状 η_p と拘束による接触線近傍の界面変形の補正成分 (η_c とする) との和で表すことによってその影響を $l_c \ll R$ の仮定の下で解析している. これを用いれば, 特に接触線がピン止めされる場合には補正項 η_c は

$$\eta_c = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} R) \cos m\phi \exp\left(-\frac{R-r}{l_c}\right) T_{mn} \quad (8)$$

と表され, これを用いて $\eta = \eta_p + \eta_c$ として(7)式の η_p

を η で置き換えることにより界面の運動が表される. これによって接触線の変位は波高に関わらず 0 となり, 接触角は界面形状の変動に伴って変化する. このようにして式(7)に式(5)および式(8)を代入すれば

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -(\rho_a + \rho_b) \frac{i\omega}{\lambda_{mn}} \frac{\partial}{\partial t} (\eta_{p_{mn}} + \eta_{c_{mn}}) - (\rho_b - \rho_a) g \eta_{p_{mn}} + \sigma \nabla^2 \eta_{p_{mn}} = 0 \quad (9)$$

となる. 式(9)の関係は $l_c \ll R$ のもとで導かれるが Miles⁽¹⁷⁾ は(9)に基づくモデルは l_c/R が 10^{-1} のオーダーでも実験における固有振動数の増加をよく再現することを示している.

4・2 鉛直加速度の周期変動に伴うメニスカスの変形 本研究の条件下では鉛直加速度の変化に伴うメニスカスの界面変位 $\Delta\eta$ は管壁から l_c の距離の点においてもきわめて小さい (加振振幅 a の 1% 程度) ことが想定される. よって, そこでの流体運動による加速項の大きさ (加振振動数を ω として $\rho \Delta\eta \omega^2$ のオーダーと見積もられる) は鉛直加速度の変動に伴う静水圧勾配の変動 ($\Delta \rho a \omega^2$) よりも 2 桁程度小さいものと考えられる. よってここではメニスカスが鉛直加速度の変化に伴って変形する過程を, 準静的な変形を仮定して導く.

静止状態におけるメニスカスの形状 η_{M0} は $l_c \ll R$ および $(\partial \eta_{M0} / \partial r)^2 \ll 1$ を仮定すれば

$$\eta_{M0} = \xi_{M0} \left[1 - \exp\left(-\frac{R-r}{l_c}\right) \right] \quad (10)$$

で表される. ここで ξ_{M0} は接触線から十分に離れ, 界面が水平とみなせる部分での液面高さと接触線の高さの差であり, 水平方向スケール l_c とともにメニスカスの形状を決定する. また, これ以降添え字 0 は静止時における値を示すものとする. このときの接触角 θ_0 は式(10)から ξ_{M0} を用いて

$$\theta_0 = \tan^{-1}(\xi_{M0} / l_{c0}) + \pi/2 \quad (11)$$

と表される.

今, 変形するメニスカスの形状 (η_M とする) を一定値 (= 初期値) とそれからの摂動成分 (上付きの $\sim$ で表す) との和により,

$$\eta_M = \eta_{M0} + \tilde{\eta}_M \quad (12)$$

で書くこととする. メニスカス形状の変動成分 $\tilde{\eta}_M$ は, 鉛直加速度の変動成分 $\tilde{g}$ の 1 次のオーダーまで取れば

$$\tilde{\eta}_M = \tilde{g} \frac{\partial \eta_M}{\partial g} = \tilde{g} \frac{\partial l_c}{\partial g} \bigg|_{g=g_0} \frac{\partial \eta_M}{\partial l_c} \bigg|_{l_c=l_{c0}} \quad (13)$$

と書ける. ここで, メニスカスの変形は体積一定のもとで起こるので, η_M は以下の条件を満たしながら変化する.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \eta_M r dr d\theta \approx 2\pi \xi_M [R^2/2 - l_c(R - l_c)] = \text{const.} \quad (14)$$

よって

$$\xi_M = \frac{\xi_{M0} [R^2 - 2l_{c0}(R - l_{c0})]}{[R^2 - 2l_c(R - l_c)]} \quad (15)$$

となる. これらから(13)式は $\tilde{g} = a\omega^2 e^{i\omega t}$ とすれば

$$\tilde{\eta}_M = C_{\eta M} e^{i\omega t} \quad (16)$$

となる. ただし $C_{\eta M}$ は以下で表される定数である.

$$C_{\eta M} = \frac{a\omega^2 \sigma \tan(\theta_0 - \pi/2)}{2(\rho_b - \rho_a) g_0^2} \times \left\{ \frac{2R - 4l_{c0}}{R^2 - 2l_{c0}(R - l_{c0})} \left[1 - \exp\left(-\frac{R-r}{l_{c0}}\right) \right] - \left(\frac{R-r}{l_{c0}^2} \right) \exp\left(-\frac{R-r}{l_{c0}}\right) \right\}. \quad (17)$$

4・3 接触線ピン止め条件下の自由振動解との組み合わせ 4・1節での導出に倣い、メニスカスが存在する場合の界面波の形状も自由振動に伴う界面変形とメニスカスによる界面形状との線形和で書かれるとして

$$\eta = \eta_p + \eta_c + \eta_M \quad (18)$$

で表すことにする。なお、3章で述べたように、本研究では軸対称波のみが卓越しているため、以下では $m=0$ の場合のみ記述することとする。

式(18)に式(5), (8), (12)を代入し、式(7)の η_p を η と書き換えてこれを代入することにより

$$\sum_n \left\{ J_0(\lambda_{0n} r) - J_0(\lambda_{0n} R) \exp\left(-\frac{R-r}{l_{c0}}\right) \right\} T_n'' + \omega_{0n}^2 J_0(\lambda_{0n} r) T_n + \omega^2 C_{\eta M} e^{i\omega t} = 0 \quad (19)$$

が得られる。ここで

$$\omega_{0n}^2 = \frac{(\rho_b - \rho_a) g_0 \lambda_{0n} + \sigma \lambda_{0n}^3}{\rho_a + \rho_b} \quad (20)$$

であり、プライム記号は時間微分を表す。また、これ以降 T_{mn} は時間変動は $e^{i\omega t}$ との位相差を含むものとする。本研究で着目している範囲では $\tilde{g}/g_0 < 0.09$ であるので鉛直加速度の変化はメニスカスの変形に関する項でのみ考慮し、静水圧を表す部分(式(7)左辺第2項)での鉛直加速度は g_0 にて一定としている。また、式(8)で現れる l も鉛直加速度の影響によって変化を受けるがこの変化は T_n'' との2次の項となるため、 l_0 にて一定とした。

式(19)に $rJ_0(\lambda_{0n} r)$ を掛け、 $0 \sim R$ で積分することにより、

$$\sum_n \left\{ [\delta_{nn'} - J_0(\lambda_{0n} R) \alpha_n] T_n'' + \omega_{0n}^2 \delta_{nn'} T_n + \omega^4 \beta_n e^{i\omega t} \right\} = 0 \quad (21)$$

が得られる。ただし、

$$\alpha_n = \int_0^R \exp\left(-\frac{R-r}{l_{c0}}\right) J_0(\lambda_{0n} r) r dr / I_n, \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{\omega^4} \int_0^R \omega^2 C_{\eta M} J_0(\lambda_{0n} r) r dr / I_n \\ &= \frac{\alpha \sigma \tan(\theta - \pi/2)}{2(\rho_b - \rho_a) g_0^2 I_n} \int_0^R dr J_0(\lambda_{0n} r) r \\ &\times \left\{ \frac{2R - 4l_{c0}}{R^2 - 2l_{c0}(R - l_{c0})} \left[1 - \exp\left(-\frac{R-r}{l_{c0}}\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Fig. 7 Resonance curve of interface wave for $\theta_0=132^\circ$. Abscissa axis is reduced by the respective resonance frequencies

$$-\left(\frac{R-r}{l_{c0}^2}\right) \exp\left(-\frac{R-r}{l_{c0}}\right) \Bigg\}, \quad (22b)$$

$$I_n = \int_0^R r [J_0(\lambda_{0n})]^2 dr \quad (22c)$$

である。ここで、対象としているような最低次のモードの近傍では各モードの固有振動数の差が大きいので、特に加振振動数があるモードの共振域にあるときには共振モード以外の波高は共振モードに比べて無視できる大きさと考えられる。よって、式(21)の n についての和記号ははずしても差し支えないと考えられる。これによって

$$T_n'' + \omega_n^2 T_n + \left\{ \omega^4 \beta_n / [1 - J_0(\lambda_{0n} R) \alpha_n] \right\} e^{i\omega t} = 0 \quad (23)$$

が得られる。ただし式(23)では n' を改めて n と表記している。また ω_n は式(23)で表される系の固有振動数であり、以下で表される。

$$\omega_n = \omega_{0n} / \sqrt{[1 - J_0(\lambda_{0n} R) \alpha_n]}. \quad (24)$$

式(23)は強制単振動を表す式であり、第3項が加振を表す項となる。ここでは池田ら⁽¹⁴⁾に倣って減衰項を付与した以下の形

$$\begin{aligned} T_n'' + h\omega_n T_n' + \omega_n^2 T_n \\ + \left\{ \omega^4 \beta_n / [1 - J_0(\lambda_{0n} R) \alpha_n] \right\} e^{i\omega t} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

を用いて得られる解について議論を進める。

図7に $h=0$ とした場合と0.03とした場合について実験・数値解析を重ねて示す。なお、この線形モデルにおける共振周波数(ω_R とする)は

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{[3(1 - h^2/2) - \sqrt{9(1 - h^2/2)^2 - 8}]/2} \quad (26)$$

Fig. 8 Resonant amplitude vs. $|\tan(\theta_0 - \pi/2)|$.

Fig. 9 Resonant amplitude and frequency vs. vertical acceleration reduced by gravitational acceleration. Symbols and solid lines correspond to numerical analysis and linear model (Eqs. (25) & (26)), respectively.

で表されるが、ここでのモデルでは式 (24) で表される固有振動数 ω_n の値に対して静止接触角の影響が評価されないこと、および式(25)の導出において Σ_n の演算をはずしていること、が主な誤差として含まれてくる。しかし、図7に示すように共振振動数で加振振動数を無次元化して表示すれば、 $h=0.03$ とした場合の線形モデルは数値計算での波高をよく再現しており、共振部分以外では $h=0$ の場合も実験・解析結果とよく一致している。また、 $\omega/\omega_R > 1.2$ の領域では波高が徐々に増加しているがこれは加振項が ω^4 に比例していることによるものであり、そのような傾向は実験・数値解析でも現れている。

4・4 パラメータの共振波高への影響 本研究の場合は粘性減衰の影響が小さく、 $h^2 (= 0.03^2) \ll 1$ であり、共振振動数は固有振動数とほぼ等しい。このような場合には式(25)で表される振動系の共振波高は

$$A_R \approx A(\omega = \omega_n) = \frac{\beta_n \omega_n^2}{h[1 - \xi_0(\lambda_{0n} R)\alpha_n]} \quad (27)$$

で書かれる。本節ではこれを用いてパラメータの共振波高への影響について論じる。

Fig. 10 Variations in β_n and $K = 1/[1 - \xi_0(\lambda_{0n} R)\alpha_n]$.

まず静止時の接触角に着目すると、式(26)に含まれるパラメータ β_n は式(17)および式(22b)から $\tan(\theta_0 - \pi/2)$ に比例する。従って波高は静止時の接触勾配の大きさである $|\tan(\theta_0 - \pi/2)|$ に比例することになる。また、本モデルでは取り扱われないが、実際には図6に示したように、共振周波数 ω_n が θ_0 に依存して変化するので、共振波高は $|\tan(\theta_0 - \pi/2)|\omega_n^2$ に

比例すると考えられるが、本研究の場合、 ω_n^2 の変化は20%程度であり $|\tan(\theta_0 - \pi/2)|$ に比べて変化が小さいので $|\tan(\theta_0 - \pi/2)|$ を横軸にとって実験・数値解析結果をプロットしたものを図8に示す。また、式(27)で表される本線形モデルの値もあわせて示す。実験、数値解析とも波高は $|\tan(\theta_0 - \pi/2)|$ にほぼ比例しており、線形モデルともよく一致していることがわかる。

(ここで示す解析および実験は静止接触角のみ変えたものであり、静止メニスカスの水平方向の代表スケールである l_0 は一定である)

次に静止接触角は 132° で一定のまま、 l_0 に関与するパラメータとして静止時の鉛直加速度(g_0)を変化させた場合の振る舞いについて示す。ここでは数値解析を用い、 g_0 を重力加速度(G)の値からその7倍まで変化させることによって l_0 を変化させた。図9に共振波高及び共振周波数の g_0/G に対する変化を示す。共振波高は g_0/G が増加するに従って減少し、共振周波数は増加している。このときの共振波高および周波数の変化について式(27)を用いて評価したものを同じ図中に示すが、本モデルは共振波高・周波数とも数値計算結果の傾向をよく再現している。以下ではこのときの共振波高の減少の要因について議論する。

ここで行ったような g_0 の変化は式(26)においては β_n 、 ω_n および分母の $[1 - \xi_0(\lambda_{0n} R)\alpha_n]$ に影響を与える。このうちの β_n および $K \equiv 1/[1 - \xi_0(\lambda_{0n} R)\alpha_n]$ の変化を図10に示す。図を見ると $[1 - \xi_0(\lambda_{0n} R)\alpha_n]$ はほぼ一定であるのに対し、 β_n は大きく減少している。図9から ω_R

Fig. 11 Variation in the terms associated with β_n . All values are normalized by those at $g_0/G=1$.

が増加していることを考えると β_n の減少が波高の減少に寄与していることがわかる。一方、 β_n を構成する因子のうち g_0 の変化によって影響を受ける成分は、 $1/g_0^2$ および式(22b)の r に関する積分の部分(Bとする)である。これらの値の $g_0/G=1$ のときの値に対する相対変化を示したものが図 11 である。この図から β_n の変化はほぼ $1/g_0^2$ に依存していることがわかる。このことと図 10 での波高および ω_R の挙動とを鑑みれば、波高に対しては ω_R^2/g_0^2 が大きな影響を及ぼすことがわかる。このうち ω_R^2 は g_0 の増加に伴って増加し $1/g_0^2$ は減少するが、ここでは後者が優位となって β_n が減少したことがわかる。このことは、式(20)から $\omega_{0n} (\approx \omega_R)$ が g_0 に対して一次でしか増加しないことによる。

5. まとめ

本研究では、円管内に層状に封入した二流体界面に形成されるメニスカスが鉛直加振を受けることによって周期的に変形し、これによって励起される管軸対称界面波の特性を実験及び解析により明らかにした。実験はアクリル円管内のシリコンオイル/水界面(Bo 数 ≈ 50)を対象とし、接触線がピン止めされた条件の下で下部流体(水)の静止接触角を $67^\circ \sim 132^\circ$ の範囲で変化させて行った。また、数値解析及び線形理論解析により、波高の支配因子を明確にした。以下に本研究で得られた知見を要約する。

- ・ 接触線がピン止めされる境界条件を取り入れた境界適合座標系を用いた数値解析は実験における周波数応答や共振波高とよく一致した。また、線形解析モデルも実験・数値解析における共振波高の傾向をよく再現した。線形モデルより界面を励起する因子の強度は加振振動数の 4 乗に比例した形となることが示され、実験・数値解析による周波数応答でもそれによる特徴が見られた。
- ・ 実験・数値解析とも共振波高は静止接触角が 90 度から離れるに従って大きくなった。線形理論解

析から、これは界面波を励起する因子の強度が $\tan(\pi/2 - \theta)(\theta$: 静止接触角)、すなわち静止メニスカスの高さ(深さ)に比例することによるためであることが見出された。

重力加速度を増加させた場合についての数値解析では共振波高は重力加速度の増加と共に減少した。線形理論解析から界面波の励起因子の強度は共振周波数と重力加速度の二乗比 ω_R^2/g_0^2 に比例することが導かれ、 g_0 の増加に伴う ω_R^2 の増加よりも $1/g_0^2$ の減少が優るために波高が減少することが示された。

なお、本研究の一部は豊橋技術科学大学卒業生の松田 準之輔氏(現 ブラザー工業株式会社)及び鈴木優太郎氏(現 ミツワ電子株式会社)の協力により行われた。ここに記して謝意を表する。

文 献

- (1) Ito, T. and Kukita, Y., Interface Behavior between Two Fluids Vertically Oscillated in a Circular Cylinder under Nonlinear Contact Line Condition (1st Report, Measurement and Modeling of the Contact Line Behavior), *J. Fluid Science and Technology*, 3(5) (2008), 690-700.
- (2) Ito, T. and Kukita, Y., Interface Behavior between Two Fluids Vertically Oscillated in a Circular Cylinder under Nonlinear Contact Line Condition (2nd Report, Characteristics of the axisymmetrical fundamental mode wave), *ibid.*, 701-711.
- (3) Ting, C.-L. and Perlin, M., Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: an experimental investigation, *J. Fluid Mech.*, 295 (1995), 263-300.
- (4) Bian, X., Perlin, M., Shults, W. W. and Agarwal, M., Axisymmetric slosh frequencies of a liquid mass in a circular cylinder, *Phys. Fluids* 15(12) (2003), 3659-3664.
- (5) Dimon, P., Kushnick, A. P. and Stokes, J. P., Resonance of a liquid-liquid interface, *J. Phys. France* 49 (1988), 777-785.
- (6) Hilpert, M., Stopper, D. and Jirka, G. H., Resonance of a liquid column in a capillary tube, *Z. angew. Math. Phys.* 48 (1997), 424-438.
- (7) Charlaix, E. and Gayvallet, H., Dynamics of a harmonically driven fluid interface in a capillary, *J. Phys. II France*, 2 (1992), 2025-2038.
- (8) Benjamin, T. B. and Ursell, F., The stability of plane free surface of a liquid in vertical periodic motion, *Proc. Roy. Soc.*, A225 (1954), 505-514.
- (9) Jiang, L., Ting, C., Perlin, M. and Shultz, W. W., Moderate and steep Faraday waves: instabilities, modulation and temporal asymmetries, *J. Fluid Mech.* 329 (1996), 275-307.
- (10) Dodge, F. T., Kana, D. D. and Abramson, N., Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers, *AIAA J.* 3(4) (1965), 685-695.
- (11) Westra, M. -T., Binks, D. J. and De Water, W. V., Patterns of Faraday waves, *J. Fluid Mech.*, 496 (2003), 1-32.

- (12) Douady, S., Experimental study of the Faraday instability, *J. Fluid. Mech.*, 221 (1990), 383-409.
 - (13) Henderson, D. M. and J. W. Miles, Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed container, *J. Fluid Mech.*, 275 (1994), 285-299.
 - (14) Ikeda, S., Yamasaka, M., Mutoh, S. and Hirai, K., Sloshing of two immiscible liquids contained in circular tanks suffering from vertical vibration, *J. Struct. Mech. Earthquake Eng. JSCE*, No.381/II-7 (1987), 65-74 (in Japanese).
 - (15) Hill, D. F., The Faraday resonance of interfacial waves in weakly viscous fluids, *Phys. Fluids* 14(1) (2002), 158-169.
 - (16) Nicolas, J. A., Effects of static contact angles on inviscid gravity-capillary waves, *Phys. Fluids*, 17 (2005), 022101.
 - (17) Miles, J., The capillary boundary layer for standing waves, *J. Fluid mech.*, 222 (1991), 197-225
-