高分子水溶液の多段屈曲流路流れにおける流体混合の可視化観察*

玉野 真司^{*1}, 伊藤 基之^{*1}
笹川 哲^{*2}, 横田 和彦^{*1}Flow Visualization of Fluid Mixing in
Curvilinear Pipe Flow of Polymer SolutionShinji TAMANO^{*3}, Motoyuki ITOH,
Akira SASAKAWA and Kazuhiko YOKOTA^{*3} Graduate School of Engineering, Nagoya Institute of Technology,
Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 466-8555 Japan

The fluid mixing in a curvilinear pipe flow of polymer solutions was investigated using the flow visualization. The number of curves N was set at 1, 6, 32 and 60. As a viscoelastic fluid, polyacrylamide (PAA) solutions of 0.05 and 0.1 wt% were used. It was found that the drastic change of the secondary flow pattern strongly promoted the fluid mixing at $N=60$ for PAA solutions. The Reynolds number, at which the fluid mixing was promoted, became smaller with the increase in concentration of polymer solution.

Key Words: Non-Newtonian Fluid, Viscoelastic Fluid, Pipe Flow, Secondary Flow, Mixing, Flow Visualization, Curvilinear Pipe

1. 緒 言

本研究で扱う曲がり管路内の流れは, 基本的な流れの一つであり, その二次流れに関してはこれまでに数多くの数値的・実験的研究が報告されている⁽¹⁾⁽²⁾. しかしながら, その報告例のほとんどがニュートン流体に関するものであり, 非ニュートン流体に関する研究, 特に実験的研究⁽³⁾⁽⁴⁾は極めて少ない. Jones & Davies⁽³⁾は曲率半径と曲がり段数が異なる円形断面ベンダパイプにおける希薄高分子水溶液の圧力損失測定を行っている. また, 横山・富田⁽⁴⁾は希薄高分子水溶液の曲がり管において, 曲がり部開始から 180° までの流れ場の発達過程を, 断面の速度分布及び二次流れの可視化観察から検討している.

一方, 非ニュートン流体の曲がり管流れの数値的研究として, 分子モデル⁽⁵⁾, Power-law モデル^{(6)~(8)}, 2 次流体モデル⁽⁹⁾, UCM モデル⁽¹⁰⁾, Oldroyd-B モデル⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾, 及び Oldroyd3 定数モデル⁽¹⁰⁾など様々なモデルを用いた報告例がある. Tsang & James⁽⁵⁾は, 高分子水溶液のネットワーク構造による高い伸長粘度特性が二次流れを減衰させるとした. また, Fan ら⁽¹⁰⁾は, せん断粘度一定の粘弾性流体の完全発達円管内流

れの数値シミュレーションにより, 第一法線応力差はニュートン流体と同じ向きの二次流れを強める方向に, 第二法線応力差は弱める方向にそれぞれ作用し, それらのバランスにより二次流れが強くなるか弱くなるかが決定されるとした. このように, 二次流れに及ぼすレオロジー特性が議論されてきているものの, ニュートン流体のものと比較すると, 非ニュートン流体の曲がり管流れの二次流れの発生メカニズムについては不明な点が多い.

近年, 化学工学分野において, 多段屈曲構造を有するマイクロチャネルの静的ミキサーとしての利用が注目されてきている⁽¹²⁾. Liu ら⁽¹³⁾は, 3 次元多段屈曲構造を有するマイクロチャネルにおいて, Yamaguchi ら⁽¹⁴⁾は, 多段ヘアピンカーブ構造を有するマイクロチャネルにおいて, ニュートン流体の 2 液間の界面面積が増加することにより, 層流域における流体混合が促進されることを報告している. 一方, 非ニュートン流体については, Groisman & Steinberg⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾及び Burghlea ら⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾が, 分子量が大きい希薄高分子水溶液の多段屈曲流路内流れにおいて, 溶液の弾性効果によって誘起される弾性乱れ (Elastic turbulence) により, 非常に低いレイノルズ数においても, 流体混合が促進されることを明らかにしている. また, Pathak ら⁽¹⁹⁾は, ジグザグマイクロチャネルにおいて, 第一法線応力差と曲がり流線の複雑な複合効果により生じる流れの不安定性 (弾性不安定性) により, 流体混合が

* 原稿受付 2009 年 2 月 3 日.

^{*1} 正員, 名古屋工業大学大学院工学研究科(☎ 466-8555 名古屋市昭和区御器所町).^{*2} (株)小松製作所(☎ 107-8414 東京都港区赤坂 2-3-6).

E-mail: tamano.shinji@nitech.ac.jp

Fig. 1 Curvilinear pipe.

促進されるとしている。しかしながら、多段屈曲流路における二次流れと流体混合効果との関連については不明である。

本研究では、円形断面を有する単段及び多段屈曲流路の下流直後の直管部において、高分子水溶液の混合の様子を可視化観察により明らかにすることを目的とする。さらに、可視化画像の輝度値の標準偏差を算出することにより、多段屈曲流路による流体混合促進効果についても明らかにする。

2. 実験装置及び方法

図1に多段屈曲流路の概略図を示す。流路は、半径 $a = 4 \text{ mm}$ の円形断面を有し、流路中心線の曲率半径 $R = 12 \text{ mm}$ 、角度 180° の半円形のカーブを互い違いに組み合わせたものである。円形断面の半径 a と流路中心線の曲率半径 R の比である曲率半径比は $a/R = 0.33$ である。屈曲段数 N は装置を組み替えることにより、1 から 60 まで様々に変化させることが出来る。本研究では、 N を 1, 6, 32 及び 60 とした。なお、円形断面を持つ流路は、厚さ 10 mm の透明アクリル板 2 枚それぞれに半円形の溝を加工し、それらを上下対称になるように重ねることにより製作した。

図2に実験装置の概略図を示す。実験装置は主として、2つのヘッドタンク、合流部、直管部及びテストセクションから構成される。2つのヘッドタンクには同じ作動流体が満たされるが、片側の流体には可視化染料が混合される。2つのヘッドタンクからそれぞれ流出した流体は、ビニールチューブを通り合流部で1つの流路にまとめられる。合流部直後では、図1に示すように直管部の垂直断面の左側に染料の混入していない流体、右側に染料の混入した流体が左右対称に分かれる。流体はその後、長さ $446 \text{ mm} (\approx 56d)$ の直管部を通過して十分発達した後、テストセクションに流入する。そして、テストセクションを通過した流体は流路出口から長さ 46 mm の下流直管部を通過して流出す

Fig. 2 Experimental setup.

る。流路出口には、下流方向からの可視化観察を行なうために、透明なアクリル板が僅かな隙間 ($\leq 1 \text{ mm}$) を空けて設置されている。重量法により流量 Q を求め、ヘッドタンクの高さを変えることにより Q を調節した。なお、実験の際、作動流体の流出によるヘッド差の変化を 3% 以下とした。

流体混合の可視化観察実験では、可視化用染料としてローダミンB(Rhodamine B, ナカライテスク(株)製)を作動流体に 2 ppm 加えた。Nd: YAG レーザーシート光源 (1.5 W 、厚さ約 3 mm 、波長 532 nm 、DPSS Green Laser, (株)日本レーザー製)により流路垂直断面を光切断し、マイクロレンズ (Micro Nikkor 105 mm F2.8S, PN-11, (株)ニコン製)を取り付けた高速度ビデオカメラ (FASTCAM-1024PCI, (株)Photoron製)を用いて、流路出口に設置した透明アクリル板を通して下流方向から撮影した。本研究において、下流直管部において、最終曲がり管の終端を原点とし、主流方向に z' 軸を取った。可視化観察における撮影位置は、レーザーシート光の厚さの中心が、 $z' = 1.5 \text{ mm}$ となる位置 (曲がり管下流直管部) とした。なお、本研究では、曲率半径比が $a/R = 0.33$ であり、従来の横山・富田⁽⁴⁾の研究の $a/R = 0.033$ よりもかなり大きく、曲がり管部における流路垂直断面での撮影画像に屈折率の影響が強く現れたため、現時点においては、曲がり管部での可視化観察は行なっていない。

作動流体として、ポリアクリルアミド (Polyacrylamide, SANFLOC AH70P, 分子量 $200 \sim 400$ 万、三洋化成工業(株)製)を水道水に溶解させたものを使用した。所定量のポリアクリルアミド (PAA) を少量ずつ混合し、機械的なせん断による劣化を防ぐため、手で約 30 分攪拌することにより PAA 水溶液を作成した。その後、1日以上放置し、PAA 水溶液中の気泡を取り除いた。また、実験直前に、PAA 水溶液をふるい (目開き: 0.5 mm) にかけて、僅かではあるが溶けきらなかった PAA を除去し、再び手でよく攪拌して容

Table 1 Rheological properties for PAA solutions.

PAA (wt%)	η_0 (Pa s)	λ (s)	α	β	E_0
0.05	0.20	1.8	0.15	0.035	5.6
0.1	0.28	3.0	0.15	0.030	13

器内の濃度の分布が一様になるようにした。PAA 水溶液の密度 ρ は、水と等しいものとした。本研究では、PAA 水溶液の濃度は、0.05 及び 0.1 wt% の 2 種類とした。また、溶液温度は約 20°C とした。

使用した PAA 0.05 及び 0.1 wt% のゼロせん断粘度 η_0 、緩和時間 λ 、Giesekus モデルのモビリティ係数 α 、ゼロせん断粘度に対する溶媒のせん断粘度 β 、及び弾性数 $E_0 = \lambda\eta_0/(4\rho a^2)$ を表 1 に示す。ここで、 η_0 、 λ 、 α 及び β は、せん断粘度と第一法線応力差の測定結果 (図は示されていない) が単純せん断流れにおける Giesekus モデルの近似曲線に最も合うように算出した⁽²⁰⁾。また、局所せん断粘度 η によるレイノルズ数 Re は次式により定義される。

$$Re = \frac{2\rho a V_m}{\eta} \quad (1)$$

ここで、 V_m は断面平均速度である。また、 η には、壁面せん断速度 $\dot{\gamma}_w$ における壁面せん断粘度の値を用いた。 $\dot{\gamma}_w$ は、Giesekus モデルでは算出が困難であるため、流れを定常層流のべき乗則流体のポアズイユ流れと仮定することにより得られる次式により求めた⁽²¹⁾。

$$\dot{\gamma}_w = \frac{3n+1}{n} \frac{Q}{\pi a^3} \quad (2)$$

ここで、 n はべき乗則モデルの指数であり、せん断速度に対するせん断粘度の測定値を両対数グラフで直線近似することにより、PAA 0.05 及び 0.1 wt% 共に $n = 0.38$ を得た。

3. 可視化観察結果

本節では、屈曲段数 $N = 1, 6, 32$ 及び 60 について、Glycerin 50 % 水溶液、PAA 0.05 及び 0.1 wt% 水溶液の流路垂直断面での可視化観察結果を示す。本節で示す可視化画像において、円形断面の左側は流路の曲がりの内側、右側は曲がり外側に対応する。また、図の左から右の順にレイノルズ数 Re が大きくなる。白く写っているのが染料であり、白色が強いほど染料の濃度が高いことを意味する。染料を含む作動流体は初期に、 $N = 1$ では、曲がり管部の内側に、 $N = 6, 32, 60$ では、最終曲がり管部の外側に入っている。

3.1 屈曲段数 $N = 1$ 図 3 に、 $N = 1$ における可視化観察結果を示す。図 3(a) より、Glycerin 50 % 水溶液の場合、 Re が大きくなるのに伴い、染料が断面中央部分で曲がりの外側に張り出し、さらに壁に

Fig. 3 Flow visualization at $N = 1$: (a) Glycerin 50 %, (b) PAA 0.05 wt%, and (c) PAA 0.1 wt%.

沿って曲がりの内側方向に流れる様子が見て取れる。これは、断面中央で外向きに流れる二次流れが Re の増加に伴い強くなるためである。PAA 0.05, 0.1 wt% 水溶液の場合、染料の分布パターンが Glycerin 50 % 水溶液のものと同様であり [図 3(b), (c)], 断面中央部で曲がり外向きの二次流れであると推察される。このことは、層流の場合、水と PEO 100 ppm 水溶液の二次流れの渦の発達パターンに明瞭な違いがないとした横山・富田⁽⁴⁾の知見と整合している。また、Glycerin 50 % 水溶液、PAA 0.05, 0.1 wt% 水溶液の順に、染料の広がり幅が小さくなる。これは、PAA 水溶液の濃度が高くなるにつれて、二次流れの強さが弱くなることを示唆している。このことは、Tsang & James⁽⁵⁾の知見とも整合している。なお、 $N = 1$ の場合、実験を行った Re の範囲 ($Re < 150$) では、2 液が混合している様子は見られなかった。

3.2 屈曲段数 $N = 6$ 図 4 に、 $N = 6$ における可視化観察結果を示す。Glycerin 50 % 水溶液において、 $Re = 38$ では、流路入口で鉛直であった 2 液間の境界面が、奇数段と偶数段とで交互に外向きの遠心力を受けるため、大きく湾曲した形状になる [図 4(a-1)]。 Re が増加すると、2 液間の境界面はさらに湾曲する [図 4(a-2)]。 $Re = 94$ では、壁面に沿って曲がりの内向きに伸びていた染料がほとんどなくなり、染料の入った流体は断面の中央付近に集まることが分かる [図 4(a-3)]。

PAA 0.05 wt% 水溶液について、図 4(b-1) より、

Fig. 4 Flow visualization at $N = 6$: (a) Glycerin 50 %, (b) PAA 0.05 wt%, and (c) PAA 0.1 wt%.

$Re = 32$ では、Glycerin 50% 水溶液の場合 [図 4(a-1)] と染料の分布が似ていることが分かる。 $Re = 64$ では、2 液間の境界面が湾曲し、Glycerin 50% 水溶液の場合よりも複雑な形状となる [図 4(b-2)]。また、 $Re = 64$ では、 $Re = 32$ の場合よりも染料部分が中央部付近で外側に窪んでいるため、中央部付近では外向きの二次流れとなっていると推測される。 $Re = 99$ では、染料の入っている部分が中央部で曲がりの内側に向かって伸びており [図 4(b-3)]、中央部で内向き流れとなっていると考えられる。つまり、 $Re = 64$ と 99 の間で二次流れの向きが逆転したと推察される。

PAA 0.1 wt% 水溶液について、図 4(c-1) より、 $Re = 27$ では、二次流れパターンは Glycerin 50% 水溶液及び PAA 0.05 wt% 水溶液のものに似ているが、染料の界面の変形度合いは小さく、二次流れは弱くなることが分かる。 $Re = 65$ では、中央部において曲がりの内向きに向かう二次流れパターンが見られる [図 4(c-2)]。 $Re = 98$ では、上下の非対称性が見られるものの、 $Re = 65$ の場合と同様の二次流れパターンが観察される [図 4(c-3)]。

屈曲段数 $N = 6$ の場合、同程度の Re の $N = 1$ の場合と比較して、溶液に依らず境界面の変形の度合いが大きくなるが、2 液の混合が進んでいる様子は、 $N = 1$ の場合と同様に見られない。

3.3 屈曲段数 $N = 32$ 図 5 に、 $N = 32$ における可視化観察結果を示す。図 5(a) より、Glycerin 50 % 水溶液では、 $N = 6$ の場合 [図 4(a)] と比較して、曲

Fig. 5 Flow visualization at $N = 32$: (a) Glycerin 50 %, (b) PAA 0.05 wt%, and (c) PAA 0.1 wt%.

がり段数が増加しているために、2 液間の境界面はかなり複雑になることが分かる。また、図 5(a-3) より、 $Re = 106$ では、 $N = 6$ の場合 [図 4(a-3)] よりも、染料が断面に広く分布していることが分かる。ただし、染料の濃度の濃い領域は中央部付近にあり、この点は $N = 6$ の場合と同じである。

PAA 0.05 wt% 水溶液について、図 5(b-1) より、 $Re = 30$ では、 $N = 6$ の場合 [図 4(b-1)] よりも、2 液間の界面が不明確で、複雑であることが分かる。 $Re = 61$ では、二次流れが断面中央で内向きであること [図 5(b-2)]、 $Re = 85$ では、染料が断面全体に分布しており、2 液間の混合がかなり進んでいること [図 5(b-3)] が分かる。

PAA 0.1 wt% の場合 [図 5(c)] の二次流れパターンの変化の様子は、PAA 0.05 wt% の場合 [図 5(b)] と類似している。

3.4 屈曲段数 $N = 60$ 図 6 に、 $N = 60$ における可視化観察結果を示す。Glycerin 50 % 水溶液の場合、図 6(a) より、 Re による二次流れと混合の変化の様子は、 $N = 32$ の場合 [図 5(a)] とほとんど変わらないことが分かる。しかし、 Re がほぼ同じ場合には、 $N = 32$ の場合よりも 2 液界面が不明確であり、混合が促進されているように見える。

PAA 0.05 wt% 水溶液について、図 6(b-1) より、 $Re = 30$ では、流れのパターンは $N = 32$ の場合 [図 5(b-1)] と類似しているが、混合はより促進されていることが分かる。図 5(b-2), 5(b-3) の静止画像から

Fig. 6 Flow visualization at $N = 60$: (a) Glycerin 50 %, (b) PAA 0.05 wt%, and (c) PAA 0.1 wt%.

では分かりにくいですが, $Re = 59$ では中央で外向き流れ, $Re = 110$ では中央で内向き流れとなっており, $Re = 59$ と 110 の間において, 二次流れの向きが逆転する. また, $Re = 110$ では, 染料の分布がほぼ均一となっており, 流体混合が十分に進んでいることが推察される. なお, この時の $Re (= 110)$ は, Glycerin 50 % 水溶液において染料分布がほぼ均一となる Re の約半分である (図は示されていない).

PAA 0.1 wt% 水溶液について, 図 6(c-1) より, $Re = 30$ では, 二次流れの様子は, PAA 0.05 wt% 水溶液の場合 [図 6(b-1)] と変わらず, 中央で内向き流れであることが分かる. $Re = 60$ では, 静止画からは分かりにくいですが, 中央付近で二次流れの向きは内向きである [図 6(c-2)]. つまり, $Re = 30$ と 60 の間で二次流れパターンが変化したと推察される. また, $Re = 91$ までレイノルズ数が増加しても, $Re = 60$ での二次流れパターンから変化した様子は見られない [図 6(c-3)].

なお, 可視化観察により得られた動画から, Glycerin 50 % 水溶液の場合には, 界面の揺動は全く観察されなかったのに対して, PAA 水溶液の場合には, 非常に僅かではあるが非周期的な界面の揺動が観察された. この界面の揺動は, 高分子水溶液の持つ弾性の影響であると考えられるが, 弾性乱れ⁽¹⁵⁾及び弾性不安定性⁽¹⁹⁾との関連については, 現時点では不明である. また, Arratia ら⁽²²⁾は, 高分子水溶液のせん断粘度の shear-thinning 特性には流体混合を促進する効果があると報告しているが, 本研究では, shear-thinning 特

Fig. 7 Standard deviation of brightness.

性と粘弾性効果とを併せ持つ PAA 水溶液を用いているため, shear-thinning 特性のみの混合促進効果については不明である. 今後, 流体混合促進のメカニズムのさらなる理解のためには, 曲がり管部における二次流れ挙動, 曲がり管の断面形状及び曲率半径比の二次流れに及ぼす影響などについても, 解明が求められる.

3.5 混合度の評価 取得した画像の輝度値分布より, 次式で定義される輝度値の標準偏差 Di を算出し, 2 液の混合度合いを評価する⁽¹³⁾.

$$Di = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (I_i - I_{max})^2} \quad (3)$$

ここで, n はピクセル数, I_i はピクセル i の輝度値, I_{max} は解析画像内における最大の輝度値である.

図 7 に, $N = 1, 60$ における Glycerin 50% 水溶液, PAA 0.05 及び 0.1 wt% 水溶液の輝度値の標準偏差 Di/Di_0 の Re に対する変化を示す. ここで, Di_0 は, 実験を行った最も低い Re における輝度値の標準偏差である. $N = 1$ では, 溶液に依らず, Re が増加しても混合はほとんど進行しない. 一方, $N = 60$ では, Glycerin 50 % 水溶液の場合には, Re の増加に伴い Di/Di_0 が緩やかに減少しており, 徐々に混合が進むのに対して, PAA 0.05 wt% 水溶液の場合には, $Re \simeq 60$ において, Di/Di_0 の減少割合が急に大きくなり, 混合が急激に促進されることが分かる. また, $Re > 80$ においては, Di/Di_0 はほぼ一定値 ($\simeq 0.6$) となり, 実験を行った定常流れと見なせる Re の範囲 ($Re \leq 100$) では, 完全に均一な混合 ($Di/Di_0 = 0$) とはならなかった. PAA 0.1 wt% 水溶液では, $Re \simeq 40$ において, PAA 0.05 wt% の場合と同様に, 急激に混合が促進されるが, その値 ($= 40$) は PAA 0.05 wt% 水溶液の値 ($= 60$) に比べて小さい. これらの混合が急激に促進され始める Re は, 可視化観察によって確認された二次流れパターンが変化する Re とほぼ対応している.

ここで、混合度合いは、作動流体がテストセクション内に留まっている時間(滞留時間)が長くなる程、分子拡散の影響を強く受けると考えられる。本研究では、レイノルズ数が大きくなる程、平均流速が大きくなり、滞留時間は短くなる。このことから、本研究で観察されたレイノルズ数の増加に伴う流体混合促進効果は、滞留時間が増加したこと起因するものではないと言える。

4. 結 言

本研究では、Glycerin 50% 水溶液、粘弾性流体である高分子水溶液(PAA 0.05 及び 0.1 wt% 水溶液)について、円形断面を有する多段屈曲流路(屈曲段数 $N = 1, 6, 32$ 及び 60)の下流直後の直管部において、流体混合の可視化観察を行い、以下の結論を得た。

(1) $N = 6$ の場合、同程度のレイノルズ数 Re の $N = 1$ の場合と比較して、溶液濃度に依らず境界面の変形の度合いが大きくなるが、2 液の混合が進んでいる様子は、 $N = 1$ の場合と同様に見られない。また、 $N = 1, 6$ の場合は共に、PAA 0.1 wt% 水溶液の方が、PAA 0.05 wt% 水溶液よりも染料の広がり幅が小さく、二次流れが弱くなる。

(2) $N = 32$ の場合、 $N = 6$ の場合に比べて、2 液間の界面がさらに複雑になり、 Re の増加に伴い、染料が断面全体に分布するようになる。なお、この傾向は PAA 0.1 及び 0.05 wt% 水溶液とで同じである。

(3) $N = 60$ の場合、PAA 0.1 wt% 水溶液では $Re \simeq 40$ において、PAA 0.05 wt% 水溶液では $Re \simeq 60$ において、それぞれ流体混合が急激に促進される。また、流体混合が急激に促進され始める Re は、可視化観察によって確認された二次流れパターンが変化する Re とほぼ対応する。

謝 辞

本研究に精力的に協力された馬場貴之氏(当時、名古屋工業大学機械工学科卒研生)に感謝する。本研究は、平成 19, 20 年度科学研究費補助金若手研究(B)(課題番号 No. 19760113)の補助を受けている。ここに記して感謝の意を表す。

文 献

- Berger S. A., Talbot L., and Yao L.-S., Flow in curved pipes, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15**, (1983), 461-512.
- Itō H., Flow in curved pipes, *JSME Int. J.*, **30**, (1987), 543-552.
- Jones W. M. and Davies O. H., The flow of dilute aqueous solutions of macromolecules in various geometries: III. Bent pipes and porous materials, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **9**, (1976), 753-770.
- Yokoyama T. and Tomita Y., Flow on dilute polymer solutions through curved pipes (Flow in inlet region), *Trans. JSME, Ser. B*, **56**, (1990), 983-989.
- Tsang H. Y. and James D. F., Reduction of secondary motion in curved tubes by polymer additives, *J. Rheol.*, **24**, (1980), 589-601.
- Hsu C.-F. and Patankar S. V., Analysis of laminar non-Newtonian flow and heat transfer in curved tubes, *AIChE J.*, **28**, (1982), 610-617.
- Iemoto Y., Nagata M., and Yamamoto F., Steady laminar flow of a power-law fluid in a curved pipe of circular cross-section with varying curvature, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **19**, (1985), 161-183.
- Takami T., Sudou K., and Tomita Y., Flow on non-Newtonian fluids in curved pipes (1st report, numerical analysis for laminar flow of power-law fluids), *Trans. JSME, Ser. B*, **84**, (1986), 1228-1234.
- Jitchote W. and Robertson A. M., Flow of second order fluids in curved pipes, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **90**, (2000), 91-116.
- Fan Y., Tanner R. I., and Phan-Thien N., Fully developed viscous and viscoelastic flows in curved pipes, *J. Fluid Mech.*, **440**, (2001), 327-357.
- Zhang M. K., Shen X. R., Ma J. F., and Zhang B. Z., Galerkin method study on flow of Oldroyd-B fluids in curved circular cross-section pipes, *J. Zhejiang Univ. SCIENCE A*, **7**, (2006), 263-270.
- Hessel V., Löwe H., and Schönfeld F., Micromixers-a review on passive and active mixing principles, *Chem. Eng. Sci.*, **60**, (2005), 2479-2501.
- Liu R. H., Stremmer M. A., Sharp K. V., Olsen M. G., Santiago J. G., Adrian R. J., Aref H., and Beebe D. J., Passive mixing in a three-dimensional serpentine microchannel, *J. Microelectromech. Syst.*, **9**, (2000), 190-197.
- Yamaguchi Y., Takagi F., Yamashita K., Nakamura H., Maeda H., Sotowa K., Kusakabe K., Yamasaki Y., and Morooka S., 3-D simulation and visualization of laminar flow in a microchannel with hair-pin curves, *AIChE J.*, **50**, (2004), 1530-1535.
- Groisman A. and Steinberg V., Efficient mixing at low Reynolds numbers using polymer additives, *Nature*, **410**, (2001), 905-907.
- Groisman A. and Steinberg V., Elastic turbulence in curvilinear flows of polymer solutions, *New J. Phys.*, **6**, No. 29, (2004).
- Burghelea T., Segre E., and Steinberg V., Mixing by polymers: Experimental test of decay regime of mixing, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, No. 164501, (2004).
- Burghelea T., Segre E., Bar-Joseph I., Groisman A., and Steinberg V., Chaotic flow and efficient mixing in a microchannel with a polymer solution, *Phys. Rev. E*, **69**, No. 066305, (2004).
- Pathak J. A., Ross D., Migler K. B., Elastic flow instability, curved streamlines, and mixing in microfluidic flows, *Phys. Fluids*, **16**, (2004), 4028-4034.
- Tamano S., Itoh M., Ide Y., and Yokota K., Vortex shedding in confined swirling flow of polymer solutions, *Phys. Fluids*, **19**, No. 023103, (2007).
- Bird R. B., Armstrong R. C., and Hassager O., *Dynamics of Polymeric Liquids. Volume 1: Fluid Mechanics*, 2nd ed. (1987), Wiley Interscience.
- Arratia P. E., Voth G. A., Gollub J. P., Stretching and mixing of non-Newtonian fluids in time-periodic flows, *Phys. Fluids*, **17**, No. 053102, (2005).