回転二重円筒間を旋回する二液流体の界面の振動と混合現象*

(第1報, 流れの可視化による二つの液体界面の基礎研究)

戸谷 順信^{*1}, 渡辺 崇^{*2}, 中村 育雄^{*3}Wave Motion and Mixing Phenomena in the Interfacial
Surface of the Immiscible Fluids between Rotating Cylinders
(1st Report, Fundamental Research on an Interfacial Surface of
the Two Liquids by Flow Visualization)Yorinobu TOYA^{*4}, Takashi WATANABE and Ikuo NAKAMURA^{*4} Department of Mechanical Engineering, Nagano National College of Technology,
716 Tokuma, Nagano-shi, Nagano, 381-8550 Japan

This work studies wave motions and mixing phenomena in an interfacial surface of two immiscible fluids between rotating cylinders, the inner cylinder is rotating and the outer cylinder is fixed. This report clarifies a series of waving and mixing phenomena by flow visualization technique. When the Reynolds number was increased, the interfacial surface became unstable due to the centrifugal force and consequently the surface swelled up around the inside wall of the outer cylinder. At last the swelled part of the surface was torn off and a droplet of a liquid penetrates into the other liquid. It was clarified that the amplitude of the swelled film of surface in axial direction was increased up to a certain value with the Reynolds number. The critical Reynolds number for the onset of the mixing was decreased with aspect ratio. However it was not depended on the ratio of the viscosities of the two-liquids.

Key Words: Fluid Dynamics, Swirling Fluids, Interfacial Phenomena, Flow Visualization

1. 緒 言

回転二重円筒間を旋回する流れはテイラー渦流れ(最近ではテイラー・クエット流れ, またはクエット・テイラー流れ, ここでは簡明のため, テイラー渦と呼ぶ)として知られており, 非線形力学系の代表的なモデルとして, 活発に研究成果が報告されている^{(1)~(3)}. 一般的なテイラー渦における幾何学的境界条件は, 円筒の上下端面が固定であるが, 条件を拡張して上端を自由表面にして非対称条件としたテイラー渦も研究されている. これには, Cole⁽⁴⁾, の研究を始め, Toya ら⁽⁵⁾, Watanabe ら⁽⁶⁾, がある. これは気液界面を持った二流体テイラー渦でもある. これらの研究では非対称条件による渦構造の変化が問題とされ自由表面の波立ちは調べられていない. 円筒回転数を上げ自由表面が波立つ場合は, 戸谷・中村⁽⁷⁾により渦断面, 表面波の可視化, 波高測定が行われているが, 気

泡の巻き込みは調べていない. 自由表面の波の巻き込みにより気泡が取り込まれ, 気液二相となるテイラー渦は Djeridi ら⁽⁸⁾⁽⁹⁾, Atkhen ら⁽¹⁰⁾ による研究が報告されている. なお, 気泡を含んだテイラー渦の研究には自由表面からの気泡の巻き込みの他に気体を軸方向に流入させた場合や圧力を下げてキャビテーション気泡を発生させた場合などの実験があるが, これらについては文献⁽¹⁰⁾を参照されたい. さらに, 二つの液体の混合に関係するテイラー渦や気象, 海洋の成層流に関する成層流体のテイラー渦の研究がある. 前者には回転軸が水平な場合と垂直な場合があり, 水平な場合は Joseph ら⁽¹¹⁾, Baier-Graham⁽¹²⁾, Campero ら⁽¹³⁾, Gelfgat ら⁽¹⁴⁾, Dulska ら⁽¹⁵⁾, Vedantam ら⁽¹⁶⁾ など多くの研究があり, 複雑な二つの液体の分離した渦構造が発生することが知られている. 成層テイラー渦にも直線的に密度変化がある場合と密度の異なる二つの液体が界面を作る場合がある. 前者については文献⁽¹⁷⁾, ⁽¹⁸⁾, 特に文献⁽¹⁸⁾を参照されたい. 著者らは互いに溶解しないシリコンオイルとグリセリン水溶液の二つの液体が作る密度及び粘度のステップ状の成層を構成して内部に界面を持つテイラー渦を回転軸が垂直な場合について研究し, 渦構造, 界面の振動などの現象について報告してきた⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾. このような界面に

* 原稿受付 2009年5月11日.

^{*1} 正員, 長野工業高等専門学校機械工学科(〒381-8550 長野市徳間716).^{*2} 正員, 名古屋大学大学院情報科学研究科(〒464-8601 名古屋市中千種区不老町).^{*3} 正員, 名誉員, 名古屋大学名誉教授.

E-mail: toya@me.nagano-nct.ac.jp

関する問題は、最初には静止した二つの液体から浮力不安定により流れが始まる場合は Rayleigh-Taylor の問題として知られ、二つの液体が界面の上下で速度が異なる場合は、一つの液体の場合も含めて Kelvin-Helmholtz の問題として最も不安定な基本的流れである⁽²¹⁾。また、工学上の適用分野として、油脂と水分の混合が関係する乳製品を含む食品製造機械、化粧品・薬品製造機械における液体エマルジョン化、環境問題における流出油と海水の界面における混合等様々な分野に関連すると考える。

本研究は、定常テイラー渦が波動テイラー渦になり、二つの液体界面の振動から液滴が分離し、混合が始まる場合について液滴の発生状況を調べた結果を報告する。これについては上に引用した著者らの可視化実験で観察したが、詳細は調べなかったものである。このような二つの液体の界面の基本問題は、二つの液体クエット流れで、最近では Dong-Johnson⁽²²⁾ の実験と解析があるが、実験では矩形断面の溝をリング状に作り、溝の中に二つの液体を入れ、その溝側を回転させて2次元二液クエット流れを模擬したもので界面の波動が調べられているが、液滴の分離などは調べられていない。二液クエット流れの関連文献については、Dong-Johnson の論文を参照されたい。

二つの液体界面に起こる問題には、分子的に混合・溶解する場合と互いに溶解しないがエマルジョンを作り混合する場合がある。なお、海洋学では塩分濃度のステップ状に異なる二層の界面流れが研究されているが、ここでの流れとの直接の関係は明らかでない⁽²³⁾。本研究は、溶解しない二つの液体でかつエマルジョン形成以前の液滴発生を問題としている。その場合でも、このような界面問題には表面張力の影響、界面の力学的条件の問題が重要である。表面張力問題は、ごく最近でも基礎方程式に関する考察が行われ⁽²⁴⁾、界面条件については渦度生成が議論されている⁽²⁵⁾ 複雑な現象であるが、ここでは可視化で調べられるマクロな液滴発生状況を報告する。

記 号

- R_1 : 内側円柱半径 (=20.08 mm)
- R_2 : 外側円筒半径 (=30.02 mm)
- R_1/R_2 : 半径比 (=0.667)
- D : 内外半径の隙間 (=9.94 mm)
- L : 流体の高さ
- L_g : グリセリン水溶液の高さ
- L_o : シリコンオイルの高さ
- ω : 内円筒の回転角速度

- ν : 動粘度
- ν_g : グリセリン水溶液の動粘度
- ν_o : シリコンオイルの動粘度
- R_ν : 動粘度比 $=\nu_o/\nu_g$
- Re : レイノルズ数 $=\omega R_1 D/\nu$
- Re_g : グリセリン水溶液のレイノルズ数 $=\omega R_1 D/\nu_g$
- Re_o : シリコンオイルのレイノルズ数 $=\omega R_1 D/\nu_o$
- Γ : アスペクト比 $=L/D$
- Γ_g : グリセリン水溶液のアスペクト比 $=L_g/D$
- Γ_o : シリコンオイルのアスペクト比 $=L_o/D$
- s_g : グリセリン水溶液の比重 (=1.124)
- s_o : シリコンオイルの比重 (=0.93~0.94)
- σ_g : グリセリン水溶液の表面張力 (=0.040 mN/m)
- σ_o : シリコンオイルの表面張力 (=0.024 mN/m)
- σ_{go} : 二液の界面張力 $=\sigma_g - \sigma_o$ (=0.016 mN/m)
- ρ_g : グリセリン水溶液の密度 $=1124 \text{ kg/m}^3$ (50%濃度)
- We : グリセリン水溶液のウェーバー数 $=\rho_g D R_1^2 \omega^2 / \sigma_{go}$
- Fr : フルード数 $=R_1 \omega / \sqrt{g R_1}$

2. 実験装置および実験方法

2.1 実験装置 実験装置を図1に、装置の概略の寸法を記号中に示す。今回使用した実験装置は、二

① Inner Cylinder ② Outer cylinder,
③ Slide ring ④ Outer bath

Fig.1 Experimental setup

つの液体の界面における振動・混合現象を一般的に確認する目的で既にレイノルズ数やアスペクト比の影響が予想できる既存の実験装置を使用した。ステンレス鋼製の内円柱①は、サーボモータからタイミングベルトを介して DC 電圧値に比例した回転数で回転する。アクリル樹脂製の外円筒②は固定されており、透明であるため、流れや界面の現象を観察できる。内外円筒間に二つの液体が注入される。アスペクト比は、円筒間に挿入されているスライドラング③で規定の高さに設定される。二重円筒の外側に四角の槽④を設置し、一定の水を満たすことで流れの観察を容易にすることができ、かつ、作動流体の急激な温度変化を避けることができる。断面流れの観察は、側面よりスリット光を当てることにより可能にした。外観面からの流れの観察は、外円筒の左右側面側から照明を当てることにより行われた。

2・2 実験方法 使用した作動流体は、互いに溶解しないグリセリン水溶液とシリコンオイルである。グリセリン水溶液は、蒸留水とグリセリンを適当な体積割合で混合して作られた。シリコンオイルは、信越化学工業(株)製のものを使用した。グリセリン水溶液、シリコンオイルともに動粘度が、5 cSt (cSt = 10^{-6} m²/s), 10 cSt, 20 cSt の流体を用意し、これらを組合わせて実験した。流体の密度によりグリセリン水溶液が下側に位置し、シリコンオイルが上側に位置する。実験は、グリセリン水溶液が 10 cSt に対してシリコンオイルが 5, 10, 20 cSt の場合とシリコンオイルが 10 cSt に対してグリセリン水溶液が 5, 10, 20 cSt の場合の 6 種類の動粘度の組合わせで行われた。よって、両液体の動粘度比は、 $R_v = 0.5, 1.0, 2.0$ となる。グリセリン水溶液とシリコンオイルの比重と表面張力の値は、記号中に示す。

二つの液体は、二重円筒間に体積比 1 : 1 で注入される。よって、アスペクト比の半値が各液体のアスペ

クト比になる。断面流れを可視化するためにグリセリン水溶液は、青インクで着色されており、動粘度は、着色後に測定されている。正面の流れの観察の場合は、グリセリン水溶液は着色されていない。断面流れの観察は、4 分ごとにレイノルズ数を約 20 ずつ増加して行われた。

両液体の動粘度の組合せとして一方の液体の動粘度を固定して、他方の液体を変化させている。これより実験における Re の表示は、動粘度を固定した方の液体を基準として採用した。よって、 R_o と表示する場合は、シリコンオイルの動粘度を固定して、グリセリン水溶液の動粘度を変化させた実験であることを意味する。

実験は、レイノルズ数の増加に対して二つの液体界面が振動し始めた後、発展していく様子とその後に混合に至る過程をビデオカメラで記録して明らかにする。界面の上下振動幅は、撮影した映像から画像をコンピュータに取り込み、切り取った拡大画像から実測で測定した。

3. 実験結果と考察

3・1 二液界面の振動現象 図 2 は、レイノルズ数を増加した時の二つの液体界面の振動現象を撮影した画像を示す。各図の右側の黒い部分が回転内円柱である。下側の液体は、グリセリン水溶液であり、上側の液体は、シリコンオイルである。中央に二つの液体界面が存在する。この流れは、 $\Gamma = 4.0$, $\nu_o = 20$ cSt, $\nu_g = 10$ cSt で $R_v = 0.5$ の場合である。図 2(a) の $R_o = 367$ の場合は、グリセリン水溶液が外円筒内壁に沿ってわずかに盛り上がっている状態が分かる。図 2(b) の $R_o = 425$ では、盛り上がった部分の高さはい定ではなく、波状のように高低差があることが映像から見て取れる。図 2(c) の $R_o = 468$ の場合では、グリセリン水溶液の盛り上がりの高さが最大になる。図

Fig. 2 Interfacial surface from front view $\Gamma = 4.0$ $R_v = 0.5$

2(d)は、図2(c)とレイノルズ数が同じ $R_g=468$ であり、グリセリン水溶液の液滴が剥がれてシリコンオイルに侵入していることを示している。この瞬間が混合開始となる。

図3は、レイノルズ数が増加した時、二つの液体界面が振動し、その後グリセリン水溶液の液滴が分離してシリコンオイルへ侵入する瞬間を示す断面流れである。 $\Gamma=5.0$, $\nu_g=10$ cSt, $\nu_o=10$ cSt であり, $R_v=1.0$ の場合である。図3(a)の $R_o=804$ では、外円筒内壁にグリセリン水溶液が盛り上がり始めている。この盛り上がっている部分は、外円筒の内壁に沿ってリング状に形成されており、レイノルズ数の増加により空間的周期状に変形すると考えられる。このことは、二重円筒間を旋回する液体が気体と接触している自由表面を持つ流れの実験からも確認されている⁽⁸⁾。図3(b)~(d)は $R_o=827$ であり、図3(b)では、グリセリン水溶液は、外円筒の内壁に沿って盛り上がり次第に大きくなり、図3(c)では、盛り上がった膜の一部が液滴となる直前の様子が示されている。反対に、シリコンオイルは、グリセリン水溶液側に窪んでいる。図3(d)において、盛り上がったグリセリン水溶液が分離して液滴となってシリコンオイル中に侵入する。 $R_v=0.5$ と 2.0 の場合においても混合する瞬間の様子は類似していた。

図4は、図3と同じ $\Gamma=5.0$, $R_v=1.0$ の場合において、シリコンオイルの液滴がグリセリン水溶液に侵入する瞬間の様子を示す。図4は、すべて $R_o=827$ であり、連続した画像である。参考までにこの条件に

おけるウェーバー数 We は、 4.86×10^5 であり、フルード数 Fr は、 1.88 である。図4(a)においては、外円筒内壁に沿ってシリコンオイル(写真上では黒い部分)がコブのように垂れ下がっている。図4(b)では、グリセリン水溶液(写真上では白い部分)がシリコンオイルの塊を囲むように発展していき、図4(c)では、シリコンオイルの塊を完全に囲んだ後に図4(d)において、シリコンオイルの液滴がグリセリン水溶液中へ侵入する(写真上グリセリン水溶液にシリコンオイルの液滴が侵入している状態は、判別しにくい)。混合において、どちらの液滴が先に形成されるかは、実験ごとに異なっており、明確な違いは見られなかった。本実験では、二つの液体の密度、動粘度、表面張力が異なっているが、他の条件においてもその順序は任意であり、どちらの液滴が先に分離して侵入するかは、分岐現象に見られる初期値敏感性と同一界面の振動状態の微小な違いによると推定される。

回転する二重円筒間における密度の異なる二つの液体において、二つの液体界面からの液滴の生成条件は、遠心力、外円筒内壁に衝突することにより発生する回転軸方向の重力、表面張力、動粘度の違いによる速度差が関連すると予想される。

液滴の生成条件については、高圧噴霧の流れにおけるキャビテーションにも関連している。Dabiri ら⁽²⁶⁾ は、キャビテーション発生条件に圧力と粘性応力の双方を含む全応力により引き起こされることを表面張力項が表面に集中したデルタ関数的特異力として含む Navier-Stokes 方程式を用いて調べている。また、

Fig. 3 Formation process of droplet of the glycerin water $\Gamma=5.0$ $R_v=1.0$

Fig. 4 Formation process of droplet of the silicone oil $\Gamma=5.0$ $R_v=1.0$ $Ro=827$

Fig. 5 Amplitude of the swelling of the interfacial surface

Wang-Sheng⁽²⁷⁾ は, 化学的に生成されたパターン表面において, 滑り速度は, 新たに発見した一般化ナビア境界条件により粘性応力とヤング応力の和である全接線応力に比例することを 2 次元チャンネルにおける混じり合わない二つの液体の問題から求めた. このように, 液滴の発生は, 圧力と全粘性応力が深く関連すると思われる.

そこで, 本実験において二つの液体の動粘度の違いとして動粘度比 R_v を導入し, レイノルズ数に対する界面の盛り上がりの高さを求め, さらに混合が開始されるレイノルズ数のアスペクト比への依存性について

実験的に調べた.

3.2 界面の変動高さ 図 5 にレイノルズ数の変化に対する二つの液体界面の盛り上がりの高さ変化を示す. 図 5(a) は, $\Gamma=5.0$, 図 5(b) は, $\Gamma=6.0$ で, 各条件とも $R_v=0.5, 1.0, 2.0$ の 3 種類について示す. 横軸は, Ro で示す. これは, 実験が $\nu_o=5, 10, 20$ cSt でそれぞれ行われており, レイノルズ数を ν_o で計算して Ro を求めたことによる. 縦軸は, 盛り上がりの高さ h を内外円管の隙間 D で除して百分率で示す. 高さの測定は, 撮影した画像を拡大し, 振動の最下点と最上点の差を画面から直接測定した. 画像からの直

接測定のため、高さの数値は、内外円筒間の距離により校正された。各条件とも10回の測定の平均値を示す。界面の変動高さは、 $\Gamma=5.0, 6.0$ ともに R_o の増加により大きくなり、最大高さは、ほぼ2 mm程度であることが分かる。液体は、最大高さを超えると分離して液滴になると考えられる。内外円筒間の隙間は、10 mmであるので、約20%の盛り上がりで達すると分離することになる。一方、 R_o の値は、 ν_o が異なるので、それに依存して異なっているが、定性的な変化の仕方は同じと考えられる。また、定量的にも変動の高さは、一様に2 mm程度であることからグリセリン水溶液に対するシリコンオイルの動粘度の違いにより変動高さが大きく異なることはないと考えられる。

3.3 混合開始の臨界値 二つの液体の混合の開始は、流れの現象の観察から以下のように定義される。二つの液体界面は、レイノルズ数の増加により振動を始め、半径方向の進行波と外円筒内壁からの反射波が相互に干渉しあいながら外円筒内壁に沿って回転軸方向の界面の高さが変化する。そして、ある臨界点で界面の一部が分離して液滴となって他方の液中に侵入する。図6に二つの液体が混合する臨界レイノルズ数を動粘度比ごとに示す。横軸を Γ 、縦軸を R_o で示す。図6から臨界レイノルズ数は、 Γ が増加すると次第に減少し、 $\Gamma=4.0$ 付近でほぼ一定になると考えられる。このことにより、二つの液体の混合の開始は、アスペクト比が小さい場合は、アスペクト比に依存するが、アスペクト比が4.0を超えるとあまり依存しないことが分かる。一般に、回転二重円筒間の流体の流れは、遠心力と粘性力の影響によりテイラー渦流れとして形成されており、ひとつの渦はその大きさがアスペクト比が2付近で不安定になることが知られている。よって、二つの液体界面から法線方向に二重円筒における隙間の2倍程度の大きさで混合を開始する

Re への依存性がなくなることが予想される。

一方、二つの液体の混合が開始する臨界レイノルズ数は、二つの液体の動粘度比に依存しないことが分かる。当初は流体の動粘度が異なると互いのレイノルズ数が異なるため、それが振動現象に影響し、動粘度の組合せによって混合開始の臨界値が異なる可能性があったが、結果的に二つの液体の動粘度比に大きな依存性はなかった。これは、二つの液体界面の振動は、二つの液体の動粘度より界面張力の影響が大きいことが考えられる。

4. 結 言

互いに溶解しない二つの液体が回転二重円筒間で巡回したとき、二つの液体界面の変化を可視化実験で明らかにした。主な結論は以下のとおりである。

(1) 回転二重円筒間を巡回する二つの液体界面は、レイノルズ数が増加するにつれて外円筒内壁に盛り上がり、次第に盛り上がりの高さが増して、その後、界面の一部が分離して液滴となり、他方の液体に侵入することが分かった。

(2) 上側の液体が下側の液体に侵入して混合する場合と、下側の液体が上側の液体に侵入して混合する場合における界面の振動現象が明らかになった。

(3) レイノルズ数の増加に対して混合までの界面の高さの変動を定量的に求めた。その高さは、内外円筒間の隙間の20%程度であることが分かった。

(4) 混合を開始する臨界レイノルズ数が明らかになった。臨界レイノルズ数は、アスペクト比が増加するにつれて緩やかに減少するが、アスペクト比が4.0程度でほぼ一定になることが分かった。よって、界面の上下方向で二重円筒間の距離の2倍を越えると影響はないことが予想される。

(5) 二つの液体の混合は、それらの液体の動粘度比には依存しないことが分かった。

本研究において、松本悠喜氏(信州大学)、南澤清一氏(岐阜大学)に多大な協力を得た。ここに感謝の意を表す。

文 献

- (1) *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Special Issue: Taylor-Couette Flows, Vol. 8, No. 2-4 (2004).
- (2) *Journal of Physics Conference Series*, Vol. 14 (2005), 14th Int. Couette-Taylor Workshop.
- (3) *Journal of Physics Conference Series*, Vol. 137 (2008), 15th Int. Couette-Taylor Workshop.
- (4) Cole, J. A., Taylor-Vortex Instability and Annulus-Length effects, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 75,

Fig. 6 Critical Reynolds number for onset of mixing

- No. 1 (1976), pp. 1-15.
- (5) Toya, Y., Nakamura, I., Yamashita, S. and Ueki, Y., An Experiment on a Taylor Vortex Flow in a Gap with a Small Aspect Ratio, Bifurcation of Flows in an Asymmetric System, *Acta Mechanica*, Vol. 102 (1994), pp. 137-148.
 - (6) Watanabe, T., Furukawa, H. and Toya, Y., Transition of Free-Surface Flow Modes in Taylor-Couette System, *Journal of Visualization*, Vol. 10, No. 3 (2007), pp. 309-316.
 - (7) Toya, Y. and Nakamura, I., A Wave Motion on the Free Surface of the Taylor Vortex Flow with an Asymmetric System; Flow Visualization and FFT Analysis (in Japanese), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 65, No. 635 (1999), pp. 172-179.
 - (8) Djeridi, H., Fave, J-F., Billard, J-Y. and Fruman, D. H., Bubble Capture and Migration in Couette-Taylor Flow, *Experiments in Fluids*, Vol. 26 (1999), pp. 233-239.
 - (9) Djeridi, H., Gabillet, C. and Billard, Y., Two-Phase Couette-Taylor Flow: Arrangement of the Dispersed Phase and Effects on the Flow Structures, *Physics of Fluids*, Vol. 16, No. 1 (2004), pp. 128-139.
 - (10) Atkhen, K., Fontaine, J. and Wesfreid, J. E., Highly Turbulent Couette-Taylor Bubbly Flow Patterns, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 422 (2000), pp. 55-68.
 - (11) Joseph, D. D., Nguyen, K. and Beavers, G. S., Non-Uniqueness and Stability of the Configuration of Flow of Immiscible Fluids with Different Viscosity between Corotating Cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 141 (1984), pp. 319-345.
 - (12) Baier, G. and Graham, M. D., Two-Fluid Taylor-Couette Flow; Experiments and Linear Theory for Immiscible Liquids between Co-Rotating Cylinders, *Physics of Fluids*, Vol. 10, No. 12 (1998), pp. 3045-3055.
 - (13) Campero, R. J. and Vigil, R. D., Flow Patterns in Liquid-Liquid Taylor-Couette-Poiseuille Flow, *Industrial and Engineering Chemistry Research*, Vol. 38 (1999), pp. 1094-1098.
 - (14) Gelfgat, A. Y., Yarin, A. L., Bar-Yoseph, P. Z., Graham, M. D. and Bai, G., Numerical Modeling of Two-Fluid Taylor-Couette Flow with Deformable Capillary Liquid-Liquid Interface, *Physics of Fluids*, Vol. 16, No. 11 (2004), pp. 4066-4074.
 - (15) Dluska, E., Wronski, S. and Ryszczyk, T., Interfacial Area in Gas-Liquid Couette-Taylor Flow Reactor, *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 28 (2004), pp. 467-472.
 - (16) Vedantam, S., Joshi, J. B. and Koganti, S. B., Three-Dimensional CFD Simulation of Stratified Two-Fluid Taylor-Couette Flow, *The Canadian Journal Chemical Engineering*, Vol. 84, No. 6 (2006), pp. 279-288.
 - (17) Molemaker, M. J., McWilliams, J. C. and Yavneh, I., Instability and Equilibration of Centrifugally Stable Stratified Taylor-Couette Flow, *Physical Review Letters*, Vol. 86, No. 23 (2001), pp. 5270-5273.
 - (18) Caton, F., Janiaud, B. and Hopfinger, E. J., Stability and Bifurcations in Stratified Taylor-Couette Flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 419 (2000), pp. 93-124.
 - (19) Toya, Y. and Nakamura, I., Instability of Two-Fluid Taylor Vortex Flow (1st. Rep. the Case of a Symmetric System) (in Japanese), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 63, No. 612 (1997), pp. 2629-2637.
 - (20) Toya, Y. and Nakamura, I., Instability of Two-Fluid Taylor Vortex Flow (2nd Rep. the Case of an Asymmetric System) (in Japanese), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 70, No. 692 (2004), pp. 943-949.
 - (21) Tatsumi, T. and Goto, K., *The Stability Theory of the Flow* (in Japanese), Sangyo Tosho, (1989), p. 177.
 - (22) Dong, L. and Johnson, D., Experimental and Theoretical Study of the Interfacial Instability between Two Shear Fluids in a Channel Couette Flow, *Heat and Fluid Flow*, Vol. 26 (2005), pp. 133-140.
 - (23) Hino, M., *Turbulence Hydrodynamic Progress* (in Japanese), ed. Tani, I., Maruzen, (1980), p. 204.
 - (24) Yonemoto, Y. and Kunugi, T., Discussion on Young's Equation Based on Interfacial Jump Condition (in Japanese), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 74, No. 742 (2008-6), pp. 1310-1313.
 - (25) Wu, J. Z. and Wu, J. M., Vorticity Dynamics on Boundaries, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 32 (1996), pp. 120-275, Academic Press.
 - (26) Dabiri, S., Sirignano, W. A. and Joseph, D. D., Two-Dimensional and Axisymmetric Viscous Flow in apertures, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 605 (2008), pp. 1-18.
 - (27) Wang, X-P., Quian, T. and Sheng, P., Moving Contact Line on Chemically Patterned Surfaces, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 605 (2008), pp. 59-78.