逆圧力勾配乱流境界層の数値予測*

野村 駿^{*1}, 橋詰 諒^{*2}, 島 信行^{*3}

Prediction of Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients

Takashi NOMURA^{*4}, Ryo HASHIZUME and Nobuyuki SHIMA^{*4} Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University,
3-5-1 Johoku, Hamamatsu-shi, Shizuoka, 432-8561 Japan

A second-moment closure proposed by Shima and Kobayashi (2007) is applied to turbulent boundary layers in adverse pressure gradients. The computation adopts a very simple 'standard' model for the ε transport equation. In spite of the simple scale-determining equation, the closure reproduces a case that is often used for testing turbulence models, i. e. the Samuel-Joubert flow in which a standard log law region exists. The model is also tested in equilibrium boundary layers of a recent DNS, in which the velocity profile in the log law region shifts downward from the standard law and the slope in that region becomes higher than that for the zero pressure gradient flow. The present model gives reasonable predictions for mild and moderate pressure gradient cases, but fails to capture a mean velocity profile for a strong gradient case. The Launder-Sharma k - ε model is also tested in these cases, and the performance is discussed.

Key Words: Turbulent Flow, Boundary Layer, Computational Fluid Dynamics, Turbulence Model, Second-Moment Closure, Adverse Pressure Gradient

1. 結 言

逆圧力勾配のもとで発達する乱流境界層を精度良く予測することは基本的に重要な課題である。 k - ε モデルや応力方程式モデルにとって、逆圧力勾配境界層は予測の難しい流れであることは古くから認識されていた (Kline ら⁽¹⁾, Patel ら⁽²⁾⁽³⁾). モデル検証はしばしば, Samuel-Joubert⁽⁴⁾の実験を対象として行われたが, 多くのモデルがその低い壁面摩擦を再現できなかった. 最近, Viti ら⁽⁵⁾は5種のモデルによってこの流れを計算し, 良好な予測が得られることを示している. 用いられたモデルのうち三つは応力方程式モデル (Launder-Shima⁽⁶⁾, Jakirlić-Hanjalić⁽⁷⁾, Manceau-Hanjalić⁽⁸⁾) である. この好予測が何に起因するのかは必ずしも明らかではないが, 主として, 乱れエネルギーの散逸率 ε の輸送方程式への付加項の導入あるいはモデル係数の関数化によっているものと思われる.

広い適用性を目指す乱流モデルにとって, 逆圧力勾

配境界層における性能検証は必須である. 本研究では, Shima-Kobayashi⁽⁹⁾が提案した応力方程式モデルによって逆圧力勾配境界層の数値予測を行う. 予測の対象は, 上で挙げた Samuel-Joubert の実験およびごく最近の Lee-Sung⁽¹⁰⁾の DNS である. 後者に対しては, 広く用いられている低レイノルズ数型 k - ε モデルである Launder-Sharma⁽¹¹⁾モデルによる予測も行う.

2. 乱 流 モ デ ル

Shima-Kobayashi⁽⁹⁾が提案したモデルを要約する.

非圧縮の流れにおいて, レイノルズ応力の厳密な輸送方程式は次のように書ける.

$$\frac{D}{Dt} \overline{u_i u_j} = P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Pi_{ij} + T_{ij} + V_{ij} \quad (1)$$

$$P_{ij} = - \left(\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \quad (3)$$

$$\Pi_{ij} = - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \overline{u_j} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

$$T_{ij} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j u_k} \quad (5)$$

$$V_{ij} = \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \overline{u_i u_j} \quad (6)$$

* 原稿受付 2009年5月29日.

^{*1} 准員, 静岡大学大学院工学研究科機械工学専攻 (〒432-8561 浜松市中区城北3-5-1).^{*2} アステラス富山(株) (〒930-0809 富山市興人町2-178).^{*3} 正員, 静岡大学工学部機械工学科 (〒432-8561 浜松市中区城北3-5-1).

E-mail: f0930049@ipc.shizuoka.ac.jp

ここで, U_i , u_i はそれぞれ速度の平均分, 変動分, p は圧力の変動分, ν は動粘度, ρ は密度であり, バーは平均を示している. 式(2)~(6)で定義された各項は, 順に, 生成, 散逸, 速度・圧力勾配相関, 乱流拡散, 粘性拡散である.

生成 P_{ij} と粘性拡散 V_{ij} はモデル化の必要がない. 乱流拡散 T_{ij} には次の Daly-Harlow⁽¹²⁾モデルが採用される.

$$T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_S \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_l} \right) \quad (7)$$

ここで, k は乱れエネルギー, ε はその散逸率である.

散逸 ε_{ij} と速度・圧力勾配相関 Π_{ij} のモデリングにあたっては, 壁面効果を代表するベクトル N_i が次の楕円型方程式の解として導入される.

$$L^2 \frac{\partial^2 N_i}{\partial x_k \partial x_k} - N_i = 0 \quad (8)$$

ここで, L は次式で定義される乱れの長さスケールである.

$$L = C_L \max \left[\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right] \quad (9)$$

方程式(8)の壁面境界条件は

$$N_i = n_i \quad (10)$$

である. ここで, n_i は壁面単位法線ベクトルである. したがって, N_i は壁で n_i に一致し, 壁から遠ざかるにつれてゼロに近づいていくベクトルである. このベクトル N_i を用いて, 散逸と速度・圧力勾配相関の和が次のようにモデル化される.

$$-\varepsilon_{ij} + \Pi_{ij} = -\frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} + (1-N) \phi_{ij}^* + \phi_{wij} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^* = & -(C_1 - 1) \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \\ & - C_3 \left(D_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - C_4 k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\phi_{wij} = -C_W \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_k} N_j N_k + \overline{u_j u_k} N_i N_k - \frac{2}{3} \overline{u_i u_k} N_l N_k \delta_{ij} \right) \quad (13)$$

ここで

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_l} \right)^2 \quad (14)$$

$$D_{ij} = - \left(\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) \quad (15)$$

であり, $P = P_{kk}/2$ である. 式(11)中の N はベクトル N_i の大きさである.

壁から遠く離れたと, $N_i \rightarrow$ ゼロベクトル, $N \rightarrow 0$, $\tilde{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon$ となるので, 式(11)は, 等方散逸モデル, Rotta

モデル, $C_2 \sim C_4$ ラピッドモデルの和に帰着する. 壁に近づくと, 式(11)右辺において, 第1項と第3項が支配的になる. $(1-N)\phi_{ij}^*$ は自由乱流における再分配プロセスの壁面の存在による修正, ϕ_{wij} は壁乱流のみ存在する再分配プロセスを表している.

ε 輸送方程式としては次式が採用されている.

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} + \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) \quad (16)$$

これは最もシンプルな標準形である.

モデル定数の値は以下のとおりである.

$$C_S = 0.2 \quad (17)$$

$$C_L = 0.31, C_\eta = 60 \quad (18)$$

$$C_1 = 2.5, C_2 = 0.45, C_3 = 0.23, C_4 = 0.22. \quad (19)$$

$$C_W = \frac{15}{4} \quad (20)$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92, C_\varepsilon = 0.15 \quad (21)$$

このモデルの特徴は, 境界条件(10)のもとでの方程式(8)の解として一つのベクトルを導入し, それを用いて, 再分配項として扱われる速度・圧力勾配相関と散逸の和を式(11)のようにモデル化している点にある. その他については, 既存の代表的でシンプルなモデルが採用されている. また, モデル係数は関数ではなく, すべて定数として与えられている.

3. 予測対象と数値解法

3.1 Samuel-Joubert⁽⁴⁾の実験 図1に Samuel-Joubert の実験における境界層外縁での圧力係数 C_p の流れ方向変化を示す. x は流れ方向座標である. 図に見るように, 単に圧力が增大するだけではなく, 中流域までは圧力勾配も増大する流れである.

圧力勾配パラメータ $\beta = (\delta^*/\tau_w) dP/dx$ は下流に向かって増大する (δ^* は排除厚さ, τ_w は壁面せん断応力). 後に平均速度分布を検討する二つの位置 $x = 2.87, 3.40m$ において, β の値はそれぞれ 2.90, 7.72 である. また, それらの位置における, 運動量厚さに基づくレイノルズ数 Re_θ はそれぞれ 12600, 18400 である. Viti⁽⁵⁾はこの流れの圧力勾配の強さを中程度 (moderate) と表現している.

計算においては, 上流に圧力勾配ゼロの領域を設け, 流入境界には乱れ強さ 1% の一様流を与える. バイパス遷移を起こした境界層の平均速度分布が, 実験の最上流位置におけるデータと一致するように計算と実験の流れ方向位置を対応させる. 図2にその位置 $x = 0.855m$ における平均速度分布を示す. y は壁から

Fig. 1 Pressure coefficient (Samuel-Joubert flow)

の距離, U は平均速度の x 方向成分, U_e は主流速である. 計算で得た分布が実験データとほぼ一致していることが分かる.

流出境界条件は x 方向の勾配ゼロ, 壁面境界条件はすべりなしである. 外縁境界条件として, 圧力には図 1 の値を与え, その他については y 方向勾配ゼロとする.

有限体積法によって, 方程式系を離散化した. 対流項の離散化スキームは, 平均流では QUICK⁽¹³⁾, 乱れの方程式では 2 次線形法と 2 次上流法を組み合わせた TVD⁽¹⁴⁾ である. 圧力解法には SIMPLE⁽¹⁵⁾ を用いた. 130×70 および 260×140 の不等間隔格子を用いて計算を行い, 結果に格子依存性のないことが確認されている.

3.2 Lee-Sung⁽¹⁰⁾ の DNS 主流速度が次式によって与えられ, 十分下流に至るといわゆる平衡境界層が得られる流れである.

$$U_e(x) = \begin{cases} U_0 & \text{for } x < 0 \\ U_0 \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^m & \text{for } x > 0 \end{cases} \quad (22)$$

3 種の m の値 -0.075 , -0.15 , -0.20 に対して DNS が行われている. 平衡状態において (β, Re_θ) の値はそれぞれのケースに対して $(0.25, 850 \sim 1300)$, $(0.73, 1000 \sim 1300)$, $(1.68, 1200 \sim 1400)$ である. Lee-Sung は, これらをそれぞれ弱い, 中程度, 強い逆圧力勾配であるとしている. 図 3 にその主流速度変化を示す. θ_{in} は入口における運動量厚さである. 本計算ではベルヌーイの式によって得た圧力変化を外縁で与えている. 計算結果の主流速が式 (22) とほぼ一致することは確かめられている.

DNS において流入位置での流れは Re_θ が 300 の平

Fig. 2 Mean velocity profile at the inlet (Samuel-Joubert flow)

Fig. 3 Free-stream velocity (Lee-Sung flow)

板境界層である. 本計算では Spalart⁽¹⁶⁾ の DNS から得た $Re_\theta = 300$ の境界層の諸分布を与える. ただし, ϵ と N_2 (ベクトル N_i の y 方向成分) については, 諸量の x 方向勾配をゼロとした方程式を解いて与えた. その他の境界条件は Samuel-Joubert の場合と同じである.

離散化法, 圧力解法は前述と同じである. 格子についても, やはり 130×70 および 260×140 の 2 種を用いて計算を行い, 結果に差がないことを確認した.

4. 結果と考察

4.1 Samuel-Joubert⁽⁴⁾ の実験 以下では Shima-Kobayashi のモデルを SK モデルと呼ぶ.

図 4 に壁面摩擦係数 C_f の流れ方向変化を示す. ここの摩擦係数は, 圧力勾配がゼロである上流域の主流速を用いて定義されている. 逆圧力勾配によって C_f が流れ方向に急速に低下していくことが, モデルによってよく捉えられている. 最下流における不自然な変化は勾配ゼロとした境界条件によっている.

Fig. 4 Skin friction coefficient (Samuel- Joubert flow)

図 5,6 に二つの位置における平均速度分布を示す。図 6 において、 $U^+ = U/U_\tau$, $y^+ = U_\tau y/\nu$, U_τ は摩擦速度である。図には、標準的な対数速度分布として、カルマン定数 0.418, 切片定数 5.5 とした分布を示した。ここで、「標準的な」(あるいは以下で、「通常の」)分布とは、ゼロ圧力勾配でレイノルズ数が十分高い平板境界層における分布を指している。0.418, 5.5 という数値は、Patel ら⁽²⁾⁽³⁾が多数の乱流モデルの性能評価を行った際に用いた値を採用したものである。

モデルによる (β, Re_θ) の計算値は $x = 2.87, 3.40m$ においてそれぞれ (3.21, 14100), (7.68, 19800) であり、先に触れた実験値と比較すると 10% 程度の相違がある。

逆圧力勾配境界層の特徴の一つは外層における大きい伴流成分である。モデルはそれをよく再現している。図に見るように、この実験においては通常の対数則にしたがう領域が存在する。そして、モデルはそれを忠実にとらえている。

逆圧力勾配境界層における対数則については、従来、議論のあるところである。Nagano ら⁽¹⁷⁾の実験によれば、分布は対数則の下方にシフトする。しかし、傾きは変わらない。後に見る Lee-Sung⁽¹⁰⁾の DNS でも下方にシフトする。しかも、傾きが急になる。一方、例えば Skåre-Krogstad⁽¹⁸⁾の実験によれば、非常に強い圧力勾配にも関わらず、通常の対数則が成り立っている。もちろん圧力勾配の強さによるし、DNS では低レイノルズ数の効果もあるかもしれない。また、多くの実験が通常の対数則が成り立つことを前提にして壁面摩擦を定めていることに注意しなければならない。本研究では、対数則が成立するとするデータ (Samuel-Joubert の実験) と成立しないとするデータ (Lee-Sung の DNS) の両方をモデル予測の対象としていることになる。

図 7 にせん断応力 $-\tau_w$ の分布の流れ方向変化を示す。ゼロ圧力勾配の境界層では壁面近傍に一定応力層

Fig. 5 Mean velocity profiles (Samuel- Joubert flow)

Fig. 6 Mean velocity profiles in wall coordinates (Samuel-Joubert flow)

が存在するのに対し、逆圧力勾配境界層ではせん断応力は対応する位置で y 方向に正の勾配をもつ。したがって、下流に進むにつれてせん断応力が最大値をとる位置は壁から離れていく。予測は実験データをよく捉えている。

図 8~10 に乱れ強さ分布の変化を示す。 u', v', w' はそれぞれ、流れ方向、壁垂直方向、横方向の乱れ強さである。下流域の u' の分布には、壁のごく近傍における極大のほかに、もう一つの緩やかな極大が現れる。これは上で見たせん断応力の極大による応力成分 $\overline{u^2}$ の生成によっている。再分配を受ける v' もその位置で最大値をとる。最下流位置における v' が壁近傍で過大予測されているが、全体としては予測とデータの一致は良い。

Fig. 7 Shear stress profiles (Samuel-Joubert flow)

Fig. 9 Profiles of turbulence intensity v' (Samuel-Joubert flow) Fig. 8 Profiles of turbulence intensity u' (Samuel-Joubert flow) Fig. 10 Profiles of turbulence intensity w' (Samuel-Joubert flow)

4.2 Lee-Sung⁽⁹⁾ の DNS この流れについては、SK モデルに加えて、Launder-Sharma の $k-\epsilon$ モデルによる予測結果も示す。以下では、後者を LS モデルと呼ぶ。

図 11 に摩擦係数の流れ方向変化を示す。ここでも摩擦係数は $C_f = 2\tau_w/\rho U_0^2$ と定義されている。 $x/\theta_{in} \simeq 900$ では、DNS、モデルともほぼ平衡状態に達しているのであるが、その位置でモデルは壁面摩擦を過大予測している。 $m = -0.20$ のケースの $x/\theta_{in} = 900$ における SK モデルの予測値は 34% 過大となっている。SK, LS 両モデルの差は小さい。流入位置近傍でモデ

ルは不自然な変化を与えているが、これは流入分布の与え方によっている。しかし、その影響は下流に進むにつれて消えていく。

以下では、平衡状態における諸分布について、DNS とモデル予測を比較する。DNS において、その流れ方向位置は明示されていない。

SK モデルによる $x/\theta_{in} = 900$ における (β, Re_θ) の計算値は $m = -0.075, -0.15, -0.20$ に対して、それぞれ $(0.25, 1270)$, $(0.83, 1570)$, $(1.69, 1870)$ であり、先に触れた DNS データと比較すると Re_θ がかなり高い。

Fig. 11 Skin friction coefficient (Lee-Sung flow)

図 12 に平均速度分布を示す。(a) は壁座標プロット, (b) は速度欠損プロットである。(b)において, $\Delta = \delta^* \sqrt{2/C_f}$, $C_f = 2\tau_w/\rho U_e^2$ である。モデル計算の結果として示したのは $x/\theta_{in} = 900$ における分布である。図には含まれていないが, $x/\theta_{in} = 1000, 1100$ の分布は, 図 12(a) では内層において $x/\theta_{in} = 900$ の分布と重なる。また, 図 12(b) ではほぼ全域にわたって 3 位置の分布は重なる。すなわち, 流れは平衡状態にある。壁座標プロットにおける外層の分布は重ならないが, その差は小さく, 以下の議論はそれに影響されない。

図 12(a) において DNS が示す特徴は, 圧力勾配が強くなるにつれて対数層での分布が対数則から下方へシフトすることである。しかも, その傾きは急になる。両モデルとも, 下方へのシフトの傾向は捉えているが, 最も強い圧力勾配のケースにおいては DNS 分布との相違が目立つ。シフトが大きすぎることでむしろ, 傾きが小さすぎることで不一致を生んでいる。分布を $U^+ = (1/\kappa) \ln y^+ + C$ と書くと, κ の値は, 採用した標準値 0.418 に対し, DNS では 0.33, SK モデルでは 0.46 である。この場合でも SK モデルは十分な大きさの伴流成分を与えているように見える。LS モデルの場合, 傾きは SK と較べると DNS により近いが, 伴流成分は小さすぎる。全体として見れば, SK モデルは中程度の強さの圧力勾配までは, 許容範囲内の予測を与えよう。LS についても同じことが言えるように見えるが, その問題点を次に指摘する。

Lee-Sung は圧力勾配のない場合についても DNS を行い, その結果を $Re_\theta = 1430$ における DeGraaff-Eaton⁽¹⁹⁾ の実験データと比較している。本研究においても, SK, LS 両モデルを用いてゼロ圧力勾配境界層を計算した。図 13 において, その $Re_\theta = 1430$ における速度分布を DNS データと比較する。SK モデルは対数

Fig. 12 Mean velocity profiles (Lee-Sung flow),
(a) Velocity profiles in wall coordinates,
(b) Velocity defect profiles

則 $U^+ = (1/0.418) \ln y^+ + 5.5$ を捉えている。DNS 分布はやや下に位置しているが, その差は小さい。LS モデルでは分布は対数則の上方に位置し, 傾きはやや急である。摩擦係数 $C_f = 2/(U_e/U_\tau)^2$ の値は DNS に比べて 12% 低となっている。乱流モデルを作る場合, 通常, チャネル流や平板境界層を参照しつつモデル定数が定められる。SK モデルでも, チャネル流が再現されるように定数が決められている。一方, LS モデルでは, モデル定数を定めるに際し, チャネル流や平板境界層が参照されていない。その結果, 上述のような対数則におけるずれが生じている。LS モデルの場合, このことが, 逆圧力勾配の場合の速度分布と摩擦係数の予測をデータに近づける方向に効いている。

以下では, 乱れに関する諸量を壁座標において検討する。圧力勾配のないケースについても, 上述の位置

Fig. 13 Mean velocity profile in zero pressure gradient boundary layer

Fig. 15 Profiles of turbulence intensity u' (Lee-Sung flow)

Fig. 14 Shear stress profiles (Lee-Sung flow)

における分布を示す。

図 14 はせん断応力分布である。Samuel-Joubert の流れと同じく、粘性影響領域の外端 ($y^+ \simeq 40$) においても、逆圧力勾配によってせん断応力は正の勾配をもっている。したがって、ピークをとる位置は外側へシフトする。圧力勾配が中程度の強さまでは、モデルの予測はデータに近い。

図 15, 16, 17 に乱れ強さの分布を示す。せん断応力のピークによって、外層に u' の大きい領域が生じる。それに応じて、 v', w' はその位置で最大値をとる。 $m = -0.20$ では、その位置での u' のピークの高さは壁近傍のそれを超えている。モデルはその傾向を捉えているが定量的一致は得られていない。

5. 結 言

Shima-Kobayashi⁽⁹⁾が提案した応力方程式モデルによって逆圧力勾配を伴う乱流境界層の数値予測を行った。 ε 輸送モデルには、最も簡単な標準形が用いられ

Fig. 16 Profiles of turbulence intensity v' (Lee-Sung flow)

Fig. 17 Profiles of turbulence intensity w' (Lee-Sung flow)

ている。

Samuel-Joubert⁽⁴⁾の流れにおいては通常の対数則にしたがう領域が存在する。モデルはその対数則とともに大きい伴流成分も捉え、低い摩擦係数をよく再現した。これは、従来の多くのモデルとは異なり、本モデルではこの流れを再現するために ε 輸送モデルへの付加項の導入は不要であることを意味している。

Lee-Sung⁽¹⁰⁾の流れにおいては、対数域における分布は対数則の下方にシフトする。圧力勾配が弱いケース、中程度のケースでは、モデルはまずまずの予測を与えた。圧力勾配が強い場合も、平均速度分布における伴流成分は十分大きい。しかし、対数域での分布の傾きはDNSに較べて小さすぎる。

Launder-Sharma⁽¹¹⁾モデルは、Lee-Sungの流れにおいて一見、本モデルと同等の予測を与えた。しかし、このモデルは、基本である圧力勾配のないケースにおいて対数速度分布を忠実にとらえない。分布は対数則の上方に位置し、その傾きは大きすぎる。このことが、逆圧力勾配境界層における好結果の相当部分を占めている。

いまの応力方程式モデルの枠組みのなかで、非常に強い逆圧力勾配の効果を再現するためには、やはり ε 輸送方程式への付加項の導入が必要であると考えられる。本研究の結果は、応力再分配モデルの構成しだいで、そのような項の役割を限定的なものにすることができることを意味している。

文 献

- (1) Kline, S. J., Cantwell, B. J. and Lilley, G. M., *The 1980-81 AFOSR-HTTM-Stanford Conference on Complex Turbulent Flows*, (1981), Stanford University.
- (2) Patel, V. C., Rodi, W. and Scheuerer, G., Evaluation of turbulence models for near-wall and low-Reynolds number flows, *Third Symposium on Turbulent Shear Flows*, (1981), pp.1.1-1.8, University of California.
- (3) Patel, V. C., Rodi, W. and Scheuerer, G., Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: A review, *AIAA Journal*, Vol.23, No.9(1985), pp.1308-1319.
- (4) Samuel, A. E. and Joubert, P. N., A boundary layer developing in an increasingly adverse pressure gradient, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.66, Part 3(1974), pp.481-505.
- (5) Viti, V., Huang, G. and Bradshaw, P., Numerical study of stress-transport turbulence models: Implementation and validation issues, *Computers & Fluids*, Vol.36(2007), pp.1373-1383.
- (6) Launder, B. E. and Shima, N., Second-moment closure for the near-wall sublayer: Development and application, *AIAA Journal*, Vol.27, No.10(1989), pp.1319-1325.
- (7) Jakirlić, S. and Hanjalić, K., A new approach to modeling near wall turbulence energy and stress dissipation, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.459(2002), pp.139-166.
- (8) Manceau, R. and Hanjalić, K., Elliptic blending model: a new near-wall Reynolds-stress turbulence closure, *Physics of Fluids*, Vol.14, No.2(2002), pp.744-754.
- (9) Shima, N. and Kobayashi, H., Modelling of the Reynolds stress redistribution with a wall effect vector, *Fluid Dynamics Research*, Vol.39(2007), pp.320-333.
- (10) Lee, J.-H. and Sung, H. J., Effects of an adverse pressure gradient on a turbulent boundary layer, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol.29(2008), pp.568-578.
- (11) Launder, B. E. and Sharma, B. I., Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disk, *Letters in Heat and Mass Transfer*, Vol.1(1974), pp.131-138.
- (12) Daly, B. J. and Harlow, F. H., Transport equations in turbulence, *Physics of Fluids*, Vol.13(1970), pp.2634-2649.
- (13) Leonard, B. P., A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.19(1979), pp.59-98.
- (14) Sweby, P. K., High resolution schemes using flux limiter for hyperbolic conservation laws, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol.21, Issue 5(1984), pp.995-1011.
- (15) Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, (1980), Hemisphere.
- (16) Spalart, P. R., Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $R_\theta = 1410$, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.187(1988), pp.61-98.
- (17) Nagano, Y., Tagawa, M. and Tsuji, T., Effects of adverse pressure gradients on mean flows and turbulence statistics in a boundary layer, *Turbulent Shear Flows 8*, F. Durst et al. (eds.), (1993), pp.7-21, Springer.
- (18) Skåre, P. E. and Krogstad, P.-Å., A turbulent equilibrium boundary layer near separation, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.272(1994), pp.319-348.
- (19) DeGraaff, D. B. and Eaton, J. K., Reynolds-number scaling of the flat-plate turbulent boundary layer, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.422(2000), pp.319-346.