二層粘性浅水波方程式と保存則*

金 山 寛^{*1}, 檀 啓^{*2}Two-Layer Viscous Shallow-Water Equations
and Conservation LawsHiroshi KANAYAMA^{*3} and Hiroshi DAN^{*3} Department of Mechanical Engineering, Kyushu University,
744 Motoooka, Nishi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka, 819-0395 Japan

In our previous papers, the two-layer viscous shallow-water equations were derived from the three-dimensional Navier-Stokes equations under the hydrostatic assumption. Also, it was noted that the combination of upper and lower equations in the two-layer model produces the classical one-layer equations if the density of each layer is the same. Then, the two-layer equations were approximated by a finite element method which followed our numerical scheme established for the one-layer model in 1978. Also, it was numerically demonstrated that the interfacial instability generated when the densities are the same can be eliminated by providing a sufficient density difference. In this paper, we newly show that conservation laws are still valid in the two-layer model. Also, we show results of a new physical experiment for the interfacial instability.

Key Words: Shallow-Water Equations, Layer Model, Conservation Laws, Interfacial Instability

1. 結 言

本研究では準 3 次元的な計算手法としてよく知られている layer model^{(1) ~ (1e)} を使った浅水波方程式に着目している。以前の研究^{(2) (3)} では Kanayama-Ohtsuka (1978)⁽⁴⁾ に基づく有限要素法による計算法を試みた。各層間で密度差があり二層に分かれている場合は layer model は有効である。そのような場合のいくつかの例として、季節による海水の層化と、事故による油拡散による層化などがある。本稿では、読者が文献を参照することなく、内容を理解することができるように、重力方向に静水圧の仮定を入れた Navier-Stokes の式から二層浅水波方程式を再導出する。次に、その式において上層と下層の密度が同じ場合、式を足し合わせると一層の式⁽⁵⁾ と同じになることを示す。さらに文献⁽⁵⁾ に基づき二層粘性浅水波方程式は物理的に妥当な条件のもとで質量保存則とエネルギー保存則を満たすことを示す。これらの保存則は全く新規の内容だと思

われる。最後に、新しい実験の結果と二層の計算結果を示すが、その際、密度が同じ場合に表れる界面の不安定性は、密度差をつけること等により解消できることを数値的に示す。また、これらの計算結果は安定した密度差の限界値が存在する範囲を示している。

ここでの計算例は、界面の不安定性が起こり、それが十分な密度差によって解消されることを示している。上層と下層の密度が同じ場合、式を足し合わせると一層の式と同じになるが、二層浅水波システムは界面不安定性のため数値的に解くのが難しいのは驚くべきことである。このやや矛盾した点は我々の独自の主張の 1 つである。界面不安定性は単なる数値不安定性の 1 つとして詳細な記述なしに文献⁽¹⁾ に説明がある。本稿では、この数値不安定性が著者らの有限要素スキームのような数値スキームによるものではなく、二層モデルによるものであると強く主張する。上層と下層の密度が同じであるときに、二層モデルの界面はかなり人工的であるので、計算ですばやく取り除かれるのは自然である。したがって、密度差がないときは一層モデルを使用すべきである。

* 原稿受付 2010 年 1 月 6 日, 英文誌: Journal of Computational Science and Technology, Vol. 3, No. 1 (2009), pp. 373-384 (原稿受付 2008 年 8 月 19 日).

^{*1} 正員, 九州大学大学院工学研究院(〒819-0395 福岡市西区元岡 744).

^{*2} 九州大学大学院工学研究院.

E-mail: kanayama@mech.kyushu-u.ac.jp

2. 二層粘性浅水波方程式の導出

図1のような二層に分かれ、水深に比べ波長が十分長い、浅水長波流れを考える。まず、二層粘性浅水波方程式を導出する。水平方向に x_1, x_2 , 垂直方向に x_3 の直交座標 $[m]$ とする。また、時間 $[s]$ を t とする。 x_3 方向に関して静水圧の仮定を入れ、外力として x_1, x_2 方向にはコリオリ力、 x_3 方向には重力を仮定した以下の Navier-Stokes の式を用いる。

Fig. 1 2 layer model

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} u_j = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{1j} + f u_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_2}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{2j} - f u_1, \quad (3)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} - g. \quad (4)$$

$u(x_1, x_2, x_3, t)$ は流体の x_i ($i=1\sim 3$) 方向の速度 $[m/s]$, $p(x_1, x_2, x_3, t)$ は圧力 $[N/m^2]$, ρ は密度 $[kg/m^3]$, τ_{ij} は x_j 面に働く x_i 方向の応力 $[N/m^2]$, f はコリオリ係数 $[1/s]$, g は重力加速度 $[m/s^2]$ を表す。また、水面の座標を ζ , 界面の座標を d , 海底面の座標を b とする。

式(1)~(3)をそれぞれ x_3 について、海底 b から界面 d までと、界面 d から水面 ζ まで積分を行う。水面、界面、海底面では法線方向の速度成分を零としている。そうすることにより、層ごとに平均化された速度で表す二層粘性浅水波方程式を導出する。上層を u 層、下層を l 層ということにする。 $m(m=u, l)$ 層の厚さを $H^m(x_1, x_2, t)$ とし、 m 層で平均化された x_i ($i=1\sim 2$) 方向の速度を $U_i^m(x_1, x_2, t)$ とすると H^m, U_i^m は次の式で表せる。

$$H^l = d - b, \quad H^u = \zeta - d,$$

$$U_i^l = \frac{1}{H^l} \int_b^d u_i dx_3, \quad U_i^u = \frac{1}{H^u} \int_d^\zeta u_i dx_3.$$

ここで、図1において水面 ζ は正の値をとり、界面 d と海底面 b は負の値をとる。

また、二層で密度の違う流体を考えるので、 m 層の一定密度を ρ^m とし、 m 層の x_j 面にかかる x_i 方向の応力を τ_{ij}^m , m 層の上面に働く x_i 方向の応力を S_i^m , 下面にかかる x_i 方向の応力を B_i^m とする。水平粘性係数 $[Ns/m^2]$ を μ_H , 風の影響係数を θ , 大気密度を ρ_a , 風の x_i 方向の速度を W_i , Chezy 係数 $[m^{1/2}/s]$ を C , 鉛直方向の粘性係数を μ とする。次のような二層の粘性浅水波方程式が導出される。

$$\frac{\partial}{\partial t} H^m + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (H^m U_j^m) = 0. \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & H^m \left(\frac{\partial}{\partial t} U_i^m + \sum_{j=1}^2 U_j^m \frac{\partial}{\partial x_j} U_i^m \right) \\ &= -g H^m \left(\frac{\rho^u}{\rho^m} \frac{\partial H^u}{\partial x_i} + \frac{\partial H^l}{\partial x_i} + \frac{\partial b}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\rho^m} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (H^m \tau_{ij}^m) \\ &+ \frac{1}{\rho^m} S_i^m - \frac{1}{\rho^m} B_i^m + (-1)^{i+1} f H^m U_{i+1}^m. \end{aligned} \quad (6)$$

ここで

$$S_i^u = \theta \rho_a W_i \left((W_1)^2 + (W_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad B_i^l = \frac{\rho^l g}{C^2} U_i^l \left((U_1)^2 + (U_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$B_i^u = S_i^l = \frac{2\mu(U_i^u - U_i^l)}{H^u + H^l}, \quad \tau_{ij}^m = \mu_H \left(\frac{\partial U_i^m}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^m}{\partial x_i} \right),$$

$$U_i = \frac{H^u U_i^u + H^l U_i^l}{H^u + H^l}, \quad U_3^m = U_1^m.$$

計算領域は境界 Γ に囲まれた 2 次元の多角形領域 Ω である。領域内に直交座標 $x=(x_1, x_2)$ をとる。 Γ 上の境界条件、 $t=0$ における初期条件は以下の通りである。

境界条件：

$$U_i^m(x, t) = 0 \quad \text{on } \Gamma, \quad (7)$$

初期条件：

$$U_i^m(x, 0) = U_{i0}^m(x), \quad H^m(x, 0) = H_0^m(x) \quad \text{in } \Omega. \quad (8)$$

初期値 $H_0^m(x)$ は海底形状 b と層を最初にどこで区切るのかを考えて指定する。 $U_{i0}^m(x)$ は U_i^m の初期値である。

3. 二層と一層の場合の粘性浅水波方程式の比較

上層と下層の密度が同じ場合 ($\rho = \rho' = \rho''$) の二層粘性浅水波方程式を上層と下層で足し合わせた場合, 一層粘性浅水波方程式に一致する⁽²⁾⁽³⁾. 一層の方程式⁽⁵⁾を以下に示す.

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (H U_j) = 0. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & H \left(\frac{\partial}{\partial t} U_i + \sum_{j=1}^2 U_j \frac{\partial}{\partial x_j} U_i \right) \\ &= -gH \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (H \tilde{\tau}_{ij}) \right) + \frac{\theta \rho_a}{\rho} W_i \left((W_1)^2 + (W_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & - \frac{g}{C^2} U_i \left((U_1)^2 + (U_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + (-1)^{i+1} f H U_{i+1} \end{aligned} \quad (10)$$

ここに

$$\begin{aligned} H &= H'' + H', \quad U_i = \frac{1}{H} \int_b u_i dx_3 = \frac{H'' U_i'' + H' U_i'}{H'' + H'}, \\ \tilde{\tau}_{ij} &= \mu_H \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad U_3 = U_1. \end{aligned}$$

4. 初期値境界値問題の保存則

二層粘性浅水波方程式は物理的に妥当な条件のもとで質量保存則とエネルギー保存則を満たす. 式(5)を各層ごとに積分すると次式を得る.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} H'' dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (H'' U_j'') dx = 0. \quad (11)$$

境界条件 (7) より次式を得る.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} H'' dx = 0. \quad (12)$$

$T_1(t)$, $T_2(t)$ を次のように定義する,

$$T_1(t) = \frac{g}{2} \int_{\Omega} \zeta^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} H |U|^2 dx,$$

$$\begin{aligned} T_2(t) &= \frac{g}{2} \int_{\Omega} \zeta^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} H'' |U''|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} H' |U'|^2 dx. \end{aligned}$$

$H'' > 0$, $H' > 0$, $\rho'' = \rho'$ と仮定する. さらに風がない場合 ($W=0$), 一層の式では以下のような⁽⁵⁾.

$$\frac{dT_1}{dt} \leq 0. \quad (13)$$

ここでは二層の式でも次式が成立することを主張する.

$$\frac{dT_2}{dt} \leq 0. \quad (14)$$

実際, 文献(5) の内容と L^2 内積の表記法($\cdot$)を用いると以下のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{dT_2}{dt} &= \left(\frac{\partial U''}{\partial t}, H'' U'' \right) + (U'' \cdot \nabla U'', H'' U'') \\ &+ \left(\frac{\partial U'}{\partial t}, H' U' \right) + (U' \cdot \nabla U', H' U') + \left(g \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

式(5)より,

$$\left(\frac{\partial H''}{\partial t}, g H'' \right) + (\operatorname{div}(H'' U''), g H'') = 0. \quad (16)$$

したがって, 式(6)より次式を得る.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial U''}{\partial t}, H'' U'' \right) + (U'' \cdot \nabla U'', H'' U'') + \left(\frac{\partial H''}{\partial t}, g H'' \right) \\ &= ([f] U'', H'' U'') - g \{ (\operatorname{div}(H'' U''), H'') \} \\ &+ \left(\left(\frac{\rho''}{\rho''} \nabla H'' + \nabla H' + \nabla b \right), H'' U'' \right) \\ &+ \left(\frac{1}{H'' \rho''} (\operatorname{div}(H'' \tilde{\tau}'') + S'' - B''), H'' U'' \right), \end{aligned} \quad (17)$$

ここで,

$$[f] = \begin{bmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{bmatrix}, \quad U'' = \begin{bmatrix} U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}.$$

$m=l$, $m=u$ において式(7)より

$$(\nabla H'', H'' U'') + (\operatorname{div}(H'' U''), H'') = 0, \quad (18)$$

さらに

$$([f] U'', H'' U'') = 0. \quad (19)$$

したがって, 式(17), (9) より次式を得る.

$$\begin{aligned} & \frac{dT_2}{dt} + \left(\frac{\partial H''}{\partial t}, g H'' \right) + \left(\frac{\partial H'}{\partial t}, g H' \right) \\ &= g \{ (\nabla H'', H'' U'') + (\nabla H', H' U') \} \\ &+ \left(\frac{1}{H'' \rho''} (\operatorname{div}(H'' \tilde{\tau}'') + S'' - B''), H'' U'' \right) \\ &+ \left(\frac{1}{H' \rho'} (\operatorname{div}(H' \tilde{\tau}') + S' - B'), H' U' \right). \end{aligned} \quad (20)$$

無風状態のとき ($W=0$), 式(16), (18)より次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{dT_2}{dt} = & \left(\frac{1}{H''\rho''} (\text{div}(H''\tilde{\tau}'') + S'' - B''), H''U'' \right) \\ & + \left(\frac{1}{H'\rho'} (\text{div}(H'\tilde{\tau}') + S' - B'), H'U' \right) \leq 0. \quad (21) \end{aligned}$$

5. 二層粘性浅水波方程式の有限要素近似

有限要素近似⁽²⁾⁽³⁾は以下の通りである。まず、式(5), (6)についてそれぞれ試験関数を掛け、計算領域 Ω で積分を行う。次に時間微分を含む項に対して陽解法を用いて近似する。空間微分を含む項に対しては基底関数 $\hat{\phi}_k$ 、含まない項に対しては対応する階段関数 $\bar{\phi}_k$ を用いて有限要素近似を行う。階段関数 $\bar{\phi}_k$ は節点 k 回りの重心領域では1、それ以外では0である。

$$\left(\frac{\bar{H}^{m,n+1} - \bar{H}^{m,n}}{\Delta t}, \bar{\phi}_k \right) + \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial(\hat{H}^{m,n} \hat{U}_j^{m,n})}{\partial x_j}, \hat{\phi}_k \right) = 0. \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \left(\bar{H}^{m,n+1} \left(\frac{\bar{U}_i^{m,n+1} - \bar{U}_i^{m,n}}{\Delta t} \right), \bar{\phi}_k \right) + \left(\hat{H}^{m,n+1} \sum_{j=1}^2 \hat{U}_j^{m,n} \frac{\partial \hat{U}_i^{m,n}}{\partial x_j}, \hat{\phi}_k \right) \\ & = - \left(g \hat{H}^{m,n+1} \left(\frac{\rho''}{\rho^m} \frac{\partial \hat{H}^{u,n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{H}^{l,n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial b}{\partial x_i} \right), \hat{\phi}_k \right) \\ & - \sum_{j=1}^2 \left(\frac{1}{\rho^m} \hat{H}^{m,n+1} \mu_H \left(\frac{\partial \hat{U}_i^{m,n}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{U}_j^{m,n}}{\partial x_i} \right), \frac{\partial \hat{\phi}_k}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{1}{\rho^m} \bar{S}_i^{m,n}, \bar{\phi}_k \right) \\ & - \left(\frac{1}{\rho^m} \bar{B}_i^{m,n}, \bar{\phi}_k \right) + \left((-1)^{i+1} f \bar{H}^{m,n+1} \bar{U}_{i+1}^{m,n}, \bar{\phi}_k \right). \quad (23) \end{aligned}$$

式(22)で d_k^{n+1} , ζ_k^{n+1} を求め、その値と $U_{i,k}^{m,n}$ から、式(23)で $U_{i,k}^{m,n+1}$ を求める。ここで、 d_k^n , ζ_k^n , $U_{i,k}^{m,n}$ はそれぞれ、節点 k での時刻 n ステップ目の $d(x,t)$, $\zeta(x,t)$, $U_i^m(x,t)$ の近似値を示している。また、 Δt は時間刻みを示している。次のような記号を定義している。

$$\hat{U}_i^{m,n} = \sum_k U_{i,k}^{m,n} \hat{\phi}_k, \quad \bar{U}_i^{m,n} = \sum_k U_{i,k}^{m,n} \bar{\phi}_k.$$

基本境界条件(7)があるので、式(23)については全ての節点から Γ 上のものを除いた節点について成立する。

注1) ここでは簡略化のため、式(22)では $H_k^{m,n+1}$ を未知関数のように書いているが、実際には ζ_k^{n+1} と d_k^{n+1} を求め、その値から $H_k^{m,n+1}$ を計算している。この場合 ζ_k^{n+1} を求めるとき d_k^{n+1} の値が必要になるので、式(22)の u 層の式よりも、式(22)の l 層の式を先に計算している。

注2) 文献(4)のスキームに関連した線形化方程式に対する近似スキームの数学的正当化が Kanayama-Ushijima(1988, 1989)⁽⁶⁾⁽⁷⁾にある。

6. 計算例

水槽の計算結果⁽²⁾を示す。コリオリ係数 $f = 2\omega \sin\phi$, 地球の角速度 $\omega = 0.00416$ [deg/s], 緯度 $\phi = 35^\circ$, 水平粘性係数 $\mu_H = 10,000$ [Ns/m²], 風の影響係数 $\theta = 0.0026$, 風速度 $W_1 = 0$ [m/s], $W_2 = -10$ [m/s], Chezy 係数 $C = 61.4$ [m^{1/2}/s], 時間ステップ $\Delta t = 1$ [s] とする。メッシュデータに関しては総節点数 1,021, 総要素数 1,916, 水槽の水平方向長さは 10×50 [m²] とする。 $H_0'' = 7.5$ [m], $H_0' = 2.5$ [m] とする。図2(a)と2(b)はそれぞれ十分な密度差がある場合の水位 ζ , 界面 d の H_0'' からの変位を示したものである。図2(c)から2(f)は密度差を徐々に小さくしたときの界面 d の H_0'' からの変位を示した図である。密度差が小さくなるにつれ、界面は不安定になる。図2(d)から図2(f)では、界面 d が突然風上側に上昇し、風下側に低くなるので、計算はすぐに止まる。さらに、停止時間は徐々に短くなる(図2(d)で57時間、図2(e)で18時間、図2(f)で6時間)。これらの図から、この例で 5 [kg/m³] から 50 [kg/m³] の間で安定する密度差の限界値が存在すると思われる。観測データは容易に得られないので、簡単な実験の結果を示す。図3は簡単な実験で発生した二層流を示している。3個のドライヤーを右側から吹かせ、密度差なしでビニールシートで水を2つの層に分ける。風を吹かせると数秒で界面の不安定性が生じる。

最後に、より細かいメッシュを使用してチェックした。図4(a)は図2(b)の結果を総節点数 4,017, 総要素数が 7,788 であるより細かいメッシュの結果と比較したもので、時間刻み幅は $\Delta t = 0.5$ [s] である。また、図4(b)は図2(e)と比較したより細かいメッシュの結果である。これらの結果は計算停止時間について完全に一致した。

また、図5は「計算によるエネルギー保存」, すなわち、密度差のない計算結果が無風状態で式(14)に対応する離散化されたエネルギー保存を満たすかを示している。計算は、水面 $\zeta = 1$ [m] で行った。第4章における我々の主張がこのグラフに再現されているのを確認することができる。「計算による質量保存」を表す図はほぼ自明であるため省略した。これらの保存則の更なる応用は今後の課題とする。

Fig. 2(a) Contour map of ζ
 $(\rho'' = 1,000 \text{ [kg/m}^3\text{]}, \rho' = 1,200 \text{ [kg/m}^3\text{]})$

Fig. 2(d) Contour map of $(d + H_0'')$
 $(\rho'' = 1,000 \text{ [kg/m}^3\text{]}, \rho' = 1,005 \text{ [kg/m}^3\text{]})$

Fig. 2(b) Contour map of $(d + H_0'')$
 $(\rho'' = 1,000 \text{ [kg/m}^3\text{]}, \rho' = 1,200 \text{ [kg/m}^3\text{]})$

Fig. 2(e) Contour map of $(d + H_0'')$
 $\rho'' = 1,000 \text{ [kg/m}^3\text{]}, \rho' = 1,001 \text{ [kg/m}^3\text{]})$

Fig. 2(c) Contour map of $(d + H_0'')$
 $(\rho'' = 1,000 \text{ [kg/m}^3\text{]}, \rho' = 1,050 \text{ [kg/m}^3\text{]})$

Fig. 2(f) Contour map of $(d + H_0'')$
 $(\rho'' = 1,000 \text{ [kg/m}^3\text{]}, \rho' = 1,000 \text{ [kg/m}^3\text{]})$

(α) One vinyl sheet before blowing

(β) One vinyl sheet after blowing

Fig. 3 An experimental two layer flow

(α) Number of Nodes 1,021, Number of Elements 1,916
 $\Delta t = 1$ [s]

(α) Number of Nodes 1,021, Number of Elements 1,916
 $\Delta t = 1$ [s]

(β) Number of Nodes 4,017, Number of Elements 7,788
 $\Delta t = 0.5$ [s]

Fig. 4(a) Contour map of $(d + H_0'')$
 $(\rho'' = 1,000 \text{ [kg/m}^3\text{)}, \rho' = 1,200 \text{ [kg/m}^3\text{)})$

(β) Number of Nodes 4,017, Number of Elements 7,788,
 $\Delta t = 0.5$ [s]

Fig. 4(b) Contour map of $(d + H_0'')$
 $(\rho'' = 1,000 \text{ [kg/m}^3\text{)}, \rho' = 1,001 \text{ [kg/m}^3\text{)})$

Fig. 5 A numerical test of the discretized energy conservation

7. 結言

この研究では二層粘性浅水波方程式は物理的に妥当な条件のもとで質量保存則とエネルギー保存則を満たすことが示された。そのうえ、十分な密度差を与えると水位と界面が定常状態になるのが数値的に示された。しかしながら、密度差が小さくなるにつれ、界面は不安定になる。新規の簡易実験結果からこれらの計算結果を確認することができた。

文 献

- (1) Murakami, K., Calculations of Vertical Circulation in Stratified Waters by 2-Level and 2-Layer Models, *Proceedings of Coastal Engineering*, JSCE, Vol.36, (1989), pp. 204-208. (in Japanese)
- (1a) Le Roux, D.Y. and Lin, C.A., A Semi-Implicit Semi-Lagrangian Finite-Element Shallow-Water Ocean Model, *American Meteorological Society*, Vol.128, No.5, (2000), pp. 1384-1401.
- (1b) Bresch, D. and Desjardins, B., Existence of Global Weak Solutions for a 2D Viscous Shallow Water Equations and Convergence to the Quasi-Geostrophic Model, *Communications in Mathematical Physics*, Vol.238, No.1-2, (2003), pp.211-223.
- (1c) Muñoz-Ruiz, M.L., Castro-Díaz, M.J. and Parés, C., On an One-Dimensional Bi-Layer Shallow-Water Problem, *Nonlinear Analysis*, Vol.53, No.5, (2003), pp.567-600.
- (1d) Castro, M.J., García-Rodríguez, J.A., González-Vida, J.M., Macías, J., Parés, C. and Vázquez-Cendón, M.E., Numerical Simulation of Two-Layer Shallow Water Flows through Channels with Irregular Geometry, *Journal of Computational Physics*, Vol. 195, (2004), pp.202-235.
- (1e) Castro, M.J., García-Rodríguez, J.A., González-Vida, J.M., Macías, J., Parés, C. and Vázquez-Cendón, M.E., Coastal Ocean Models: Two Useful Finite Element Methods, *Continental Shelf Research*, Vol.25, No. 7-8, (2005), pp. 775-793.
- (2) Kanayama, H. and Dan, H., A Finite Element Scheme for Two-Layer Viscous Shallow-Water Equations, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol.23-2, (2006), pp. 163-191.
- (3) Kanayama, H. and Ishikawa, T., A Finite Element Scheme of the Two Layer Viscous Shallow Water Equations, *Proceedings of 16th Computational Fluid Dynamics Symposium*, D29-1, (2002). (in Japanese)
- (4) Kanayama, H. and Ohtsuka, K., Finite Element Analysis on the Tidal Current and COD Distribution in Mikawa Bay, *Coastal Engineering in Japan*, Vol.21, (1978), pp. 157-171.
- (5) Kanayama, H. and Ushijima, T., On the Viscous Shallow-Water Equations I – Derivation and Conservation Laws –, *Memoirs of Numerical Mathematics* 8/9, (1981/1982), pp. 39-64.
- (6) Kanayama, H. and Ushijima, T., On the Viscous Shallow-Water Equations II –A Linearized System–, *Bulletin of University of Electro-Communications*, Vol.1, No.2, (1988), pp.347-355.
- (7) Kanayama, H. and Ushijima, T., On the Viscous Shallow-Water Equations III –A Finite Element Scheme–, *Bulletin of University of Electro-Communications*, Vol.2, No.1, (1989), pp.47-62.