レインボーシュリーレン偏向法による適正膨張超音速噴流の計測*

宮 里 義 昭^{*1}, 入 江 将 之^{*2}
山 本 秀 樹^{*1}, 松 尾 一 泰^{*3}Measurements in Correctly Expanded Supersonic Jets
by Rainbow Schlieren DeflectometryYoshiaki MIYAZATO^{*4}, Masayuki IRIE,
Hideki YAMAMOTO and Kazuyasu MATSUO^{*4} Department of Mechanical Systems Engineering, Faculty of Environmental Engineering,
The University of Kitakyushu, 1-1 Hibikino, Wakamatsu-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 808-0135 Japan

Rainbow schlieren deflectometry technique with a filter of a continuous spectrum of colors provides a simple way to obtain the entire density field of an axisymmetric flow field. This technique is capable of providing useful qualitative and quantitative information on the spatial variations in the fluid density without the introduction of additives into the fluid. Experiments on rainbow schlieren deflectometry have been conducted using a supersonic jet issuing from an axisymmetric nozzle of design Mach number 1.6. The ratio of plenum to back pressures is kept constant at 4.25 of its shock-free condition. A density distribution on a jet cross-section is obtained by using the Abel inversion of experimental data of light ray transverse displacement at the filter plane. Also, Pitot pressures at the cross-section have been measured to obtain density profile. For the density profile obtained, good quantitative agreement is reached between measurements from schlieren and Pitot probe.

Key Words: Axisymmetric Flow, Supersonic Flow, Flow Visualization, Rainbow Schlieren, Measurement

1. ま え が き

シュリーレン法⁽¹⁾は、超音速ノズルや超音速ディフューザ等の圧縮性管内流れあるいは超音速噴流や翼周りの流れ等の圧縮性外部流れを調べるときの光学計測法として一般に広く利用されている。

従来、圧縮性流れの可視化計測にシュリーレン法を使用した例では、ナイフエッジあるいはカラーフィルターを用いて流れ場を定性的に可視化観察することが多く、定量化を行った研究はほとんどない。

Howes⁽²⁾は、色が連続的に変化するフィルターを用いたシュリーレン法を考案し、“レインボーシュリーレン法”と命名した。彼は、レインボーシュリーレン法により、アセトンの軸対称燃焼亜音速噴流を光学観察し、噴流軸に対して垂直な断面を通過する光の屈折率の変化を定量的に求めている。Al-Ammar ら⁽³⁾は、ヘリウムガスを作動流体とした軸対称亜音速噴流について、噴流軸に対して垂直な断面の酸素濃度をレインボーシュリーレン法によって計測し、サンプリングプローブによって得られた濃度値と比較すると、両者は

定量的に良く一致することを示した。Kolhe ら⁽⁴⁾は、直径 500 μm のオリフィスからの音速噴流をレインボーシュリーレン法によって観察し、得られた実験データから噴流内部の密度場を算出している。しかし、噴流内はマッハディスクと膨張波を含んだ複雑な流れ場のため、実験で得られた密度が実際とどの程度定量的に一致しているかの比較は行われていない。

本研究では、超音速流れの中でも比較的単純な流れ、すなわち軸対称ノズルからの適正膨張超音速噴流をレインボーシュリーレン法によって計測し、噴流軸に対して垂直な断面の密度分布を定量的に求めることを試みたので、その結果について報告する。

2. レインボーシュリーレン偏向法の原理

2・1 軸対称の密度場を通る光線 $x-y$ 直交座標系の正の向きを図 1 のようにとり、屈折率 n が原点からの距離 r のみの関数で $n=n(r)$, $R \leq r$ では $n=n_a$ となる軸対称の屈折率場を考える。

図 1 に示すように、高さ $y=\eta$ で x 軸の負の方向から x 軸に平行に点 A まで進んだ光線は、点 A を通過直後から連続的に屈折しながら屈折率場を進み、点 B の位置では x 軸となす角が $\varepsilon_b=\varepsilon_b(\eta)$ とする。

光線上の任意の点 T の極座標表示を $T(r, \theta)$ とし、点 T における光線の接線が y 軸となす角を α 、この接線と直線 OT とのなす角を φ とすれば、

* 原稿受付 2010 年 2 月 26 日。

^{*1} 正員, 北九州市立大学国際環境工学部 (〒808-0135 北九州市若松区ひびきの 1-1)。^{*2} 北九州市立大学国際環境工学部。^{*3} 正員, フェロー, 北九州市立大学国際環境工学部。

E-mail: miyazato@env.kitakyu-u.ac.jp

Fig. 1 Representation of axisymmetric refractive index field

$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{dr}{d\theta} - r \tan(\theta)}{\tan(\theta) \frac{dr}{d\theta} + r} \quad (1)$$

$$\tan(\varphi) = -\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} \quad (2)$$

屈折率場は軸対称であるので、次式が成り立つ⁽⁵⁾。

$$nr \sin(\varphi) = \text{const.} \equiv \phi \quad (3)$$

ここで φ が直角のときの光線上の座標を点 M(r_m, θ_m) とおき、 $0 \leq \theta \leq \theta_m$ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$) の場合を考えると、式(3)より、

$$\sin(\varphi) = \frac{\phi}{nr} \quad (4)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{(nr)^2 - \phi^2}}{nr} \quad (5)$$

式(4)を微分し、式(5)を使って整理すると、

$$d\varphi = -\frac{\phi(rdn + ndr)}{nr\sqrt{(nr)^2 - \phi^2}} \quad (6)$$

式(2)、(4)、(5)より、

$$d\theta = -\frac{\phi dr}{r\sqrt{(nr)^2 - \phi^2}} \quad (7)$$

図1に示すように、点 T における光線の接線が x 軸となす角を ε とすれば、 $\varepsilon = \theta - \varphi$ であるから、

$$d\varepsilon = d\theta - d\varphi \quad (8)$$

式(6)~(8)より、

$$d\varepsilon = \frac{\phi dn}{n\sqrt{(nr)^2 - \phi^2}} \quad (9)$$

ここで、 $r \sin(\varphi)$ は、原点 O から光線上の点 T(r, θ) における接線までの垂直距離を示すから、座標 ($\theta = \pi, r \rightarrow \infty$) では、 $r \sin(\varphi) = \eta, n = n_a$ である。この結果と式(3)より、

$$\phi = n_a \eta \quad (10)$$

式(10)を式(9)に代入し、 $0 < n-1 \ll 1, 0 < n_a-1 \ll 1$ を考慮して 2 次以上の微小項を省略すると、

$$d\varepsilon = \frac{\eta}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} \frac{dn}{dr} dr \quad (11)$$

つぎに、光線上の点 A と点 M における接線と x 軸のなす角を、それぞれ $\varepsilon_a(\eta) (= 0), \varepsilon_m(\eta)$ とおくと、点 A から点 B に進む光線の経路の点 M に対する幾何学的対称性から、 $\varepsilon_m(\eta) - \varepsilon_a(\eta) = \varepsilon_b(\eta) - \varepsilon_m(\eta)$ 。したがって、

$$\varepsilon_b(\eta) = 2 \int_{\varepsilon_m(\eta)}^{\varepsilon_b(\eta)} d\varepsilon \quad (12)$$

ここで、 $r = r_m$ のとき $\varepsilon = \varepsilon_m(\eta)$ 、 $r = R$ のとき $\varepsilon = \varepsilon_b(\eta)$ とおくと、式(11)と式(12)より、

$$\varepsilon_b(\eta) = 2\eta \int_{r_m}^R \frac{dn}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} dr \quad (13)$$

$|\varepsilon_m(\eta)| \ll 1$ と仮定すると、 $r_m \doteq \eta / \cos[\varepsilon_m(\eta)] \doteq \eta$ 。また、 $R \leq r$ では $dn/dr = 0$ であるから、式(13)は、

$$\varepsilon_b(\eta) = 2\eta \int_{\eta}^{\infty} \frac{dn}{\sqrt{r^2 - \eta^2}} dr \quad (14)$$

式(14)はアーベル変換型の積分⁽⁶⁾である。

2.2 断面上の密度分布 2.1 節の $\varepsilon_b(\eta)$ は、3 章で述べる集光レンズの焦点距離 f_d およびレインボーフィルター上の基準位置からの光の変位 $d(\eta)$ とつぎの関係がある。

$$d(\eta) \doteq \varepsilon_b(\eta) f_d \quad (15)$$

また、屈折率 $n(r)$ は、気体の密度 $\rho(r)$ およびグラッドストーン・デイル定数 K とつぎの関係がある⁽⁷⁾。

$$n(r) = 1 + K\rho(r) \quad (16)$$

式(14)をアーベル逆変換すると、

$$n(r) = n_a - \frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{\varepsilon_b(\eta) d\eta}{\sqrt{\eta^2 - r^2}} \quad (17)$$

ここで、 $r = i\Delta r$ 、 $\eta = i\Delta \eta$ と離散化し、サンプリング点数を N とおくと⁽³⁾、

$$n(i\Delta r) = n_a + \sum_{j=i}^N D_{ij} \varepsilon_b(j\Delta \eta) \quad (18)$$

ただし、

$$\begin{cases} D_{ij} = J_{ij} & \text{for } j = i \\ D_{ij} = J_{ij} + J_{i,j+1} & \text{for } j > i \end{cases} \quad (19)$$

$$J_{ij} = -\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{j+1 + [(j+1)^2 - i^2]^{1/2}}{j + (j^2 - i^2)^{1/2}} \right\} \quad (20)$$

したがって、式(15)、(16)、(18)~(20)より、噴流軸に対して垂直な任意の断面における密度分布が得られる。

3. 実験装置と方法

実験装置と光学系の模式図および座標系を図2に示す。圧縮機によって高圧タンク (2 m³, 1 MPa) に蓄え

られた乾燥空気は、図2(a)に示すように、圧力制御弁を通過して集合洞で一旦よどみ状態になった後、軸対称超音速ノズルを通して大気に放出される。

本実験で用いた超音速ノズルは軸対称で、スロート直径 10 mm, 出口直径 11.16 mm, 設計マッハ数 1.60 である。ノズルの内壁はノズル出口からの流れがノズル軸に平行になるように、軸対称の特性曲線法⁽⁸⁾によって設計されている。

流れ場の可視化は、レインボーフィルターを用いたシュリーレン法と、比較のため通常の3色カラーフィルターを用いたシュリーレン法により行った。

250 W のメタルハライド光源から出た光は光ファイバーを通った後、対物レンズ(焦点距離 16.56 mm)で集光され、図2(b)の左側に示すピンホール(直径 50 μm)を通過して、コリメータレンズ(直径 58 mm, 焦点距離 500 mm)で平行光線になり、集光レンズ(直径 58 mm, 焦点距離 500 mm)、レインボーフィルター、カメラレンズを通してデジタルカメラ(Nikon: D 300)の受光素子上に達する。ピンホールとレインボーフィルターは、それぞれコリメータレンズと集光レンズの焦点距離の位置にある。また、レインボーフィルターは、 z 軸(ノズルの軸方向)に平行で、 y 方向に色相が変化するように置かれた。

図2(b)に示す実線と破線は、それぞれ流れ場に密度変化がない場合とある場合の光の経路を示してお

り、流れ場に密度変化がない場合とある場合では、レインボーフィルターを通過する光の y 方向の位置が一般に異なる。したがって、 y 方向の変位がカメラの受光素子上に色相の変化となって現れる。

本実験では、外径 0.81 mm, 内径 0.51 mm のピトー管を用いて、適正膨張超音速噴流の半径方向の全圧を求めた。得られた全圧分布から、流れが超音速の場合にはレイリーのピトー管公式⁽⁹⁾を用いて噴流断面のマッハ数分布を算出し、流れ場が断熱流れと仮定して、噴流断面の密度分布を求めた。

集合洞とピトー管に取り付けた半導体圧力センサーからの信号は 12 ビットの AD 変換ボードを通った後パーソナルコンピュータで処理される。

なお、本実験では集合洞圧力 p_{os} と背圧(大気圧) p_b との比 p_{os}/p_b をノズルからの流れが適正膨張 ($p_{os}/p_b = 4.25$) となるように、圧力制御弁を設定した。また、集合洞の温度は、 297 ± 0.1 K の一定値であった。

4. 実験結果と考察

4.1 レインボーフィルター 本実験で使用したレインボーフィルターを図3に示す。図3に示すレインボーフィルターは、ポジフィルムで作製され、縦幅 1.4 mm の間を、色相は 0° から 314° まで変化する。実験では、色相 $Hue = 180^\circ$ を背景色として、レインボーシュリーレン写真撮影を行った。

レインボーフィルターの検定曲線を図4に示す。この検定曲線は、実験を始める前に、レインボーフィルターをマイクロメータによって 0.1 mm 間隔で上下方向に移動させ、基準位置 ($Hue = 180^\circ$) からの距離 η と色相の関係調べたものである。図4の縦軸の $d(\eta) = 0.8$ mm の位置 ($Hue = 0^\circ$) と $d(\eta) = -0.6$ mm の位置 ($Hue = 314^\circ$) は、図3のレインボーフィルターのそれぞれ上端と下端に対応している。噴流内を通過した光は、屈折率の変化に対応して、フィルター上のある色相を通過する。したがって、噴流のレインボーシュリーレン写真について、デジタルデータの色相成分を調べることで、噴流を通過した光の屈折率の情報を得ることができ、2.2 節の方法を使って噴流

Fig. 2 Schematic diagram of rainbow schlieren apparatus

Fig. 3 Rainbow filter

Fig. 4 Calibration curve

軸に対して垂直な任意の断面の密度を得ることができる。

4・2 噴流の光学観察 通常の3色フィルターとレインボーフィルターによる軸対称の適正膨張超音速噴流のシュリーレン写真を図5に示す。図5(a), (b)の流れは左から右で、いずれもフィルターを噴流の中心軸に対して水平においた写真である。図5(a)は、緑色を背景とし、その上側を赤色、下側を青色としてフィルターをセットした写真を示す。図5(b)は図3に示したレインボーフィルターで撮影しており、背景を $Hue=180^\circ$ 、フィルターの向きを図3と同じにして撮影したものである。なお、図5(b)のシュリーレン写真の空間分解能は $18.5\mu\text{m}$ であるが、これは、ピンホールの大きさ、集光レンズの焦点距離、レインボーフィルターの色相の解像度、デジタルカメラの解像度に依存する。

図5(a)のシュリーレン写真では、噴流境界の外側の領域と噴流の内部が同じ緑色で、噴流境界の上部と下部がそれぞれ青色と赤色である。これから噴流境界には噴流軸に対して垂直方向の密度勾配があることがわかる。ただし、この写真では、ノズルの出口近くと十分下流の位置で噴流軸に対して垂直方向の密度勾配は同程度に見積もられる。これに対し、図5(b)のシュリーレン写真において、噴流軸に対して垂直方向の色相の変化を観察すると、ノズル出口近くの噴流境界の色相の変化に比べて、下流での色相の変化はゆるやかである。これは、ノズル出口から下流にいくにつれて噴流のせん断層が厚くなることによる。また、図5(a)と比べて図5(b)のシュリーレン写真では、噴流内部にマッハ波が明瞭に観察される。

図5(b)の写真で、 $z=20\text{ mm}$ の位置の噴流断面の色相の分布を図6に示す。なお、図3のレインボー

Fig. 5 Typical schlieren pictures of correctly expanded supersonic jets

Fig. 6 Hue distributions on jet cross section at axial distance $z=20\text{ mm}$

フィルターは、 $y \geq 0$ のとき $0 \leq Hue \leq 180$ であるが、図6では $y \geq 0$ のとき $180 \leq Hue$ である。これは、本実験では適正膨張超音速噴流を計測しているため、ノズルから流出する噴流内部の流れの密度は、中心軸上 ($y=0\text{ mm}$) で最も高く、中心軸から離れるにしたがって周囲の密度まで徐々に減少する。この結果、噴流境界に近い高さで y が正の領域で x 軸の負の方向から噴流に入ってくる光は、噴流を通過するときに y 軸の負の向きに曲げられる。

図6より、噴流の中心軸の色相は 180° で、これは噴流から十分離れた位置 ($y=\pm 10\text{ mm}$) の色相とほぼ同じである。また、 $y=\pm 5\text{ mm}$ の位置を通過する光の偏向角は最大であり、検定曲線と式(15)より、約 $9.17 \times 10^{-4}\text{ rad}$ となる。この位置は、噴流軸に対して垂直方向の密度勾配が最大の位置に対応する。

4・3 噴流断面の密度分布 図6の実験値から図4の検定曲線を使って、 $d(\eta)$ を計算し、2・2節の方法で噴流軸に垂直な断面の密度分布を求めた。その結果を図7に実線で示す。また、図7には、ピトー管によ

Fig. 7 Density distributions on jet cross section at axial distance $z=20$ mm

って計測した全圧を用い、流れ場全体を断熱流れ、噴流内の静圧は背圧と等しいと仮定して求めた密度分布を○印で示す。

ピトー管の実験値より、 $z=20$ mm の位置で、噴流は、 $-5 \text{ mm} < y < 5 \text{ mm}$ にポテンシャルコアがあり、ポテンシャルコアのすぐ外側で、周囲の密度まで急激に減少する。なお、流れは適正膨張噴流で、ポテンシャルコア内は等エントロピー流れであるから、ポテンシャルコア内の密度は、ノズル上流と背圧の条件から 1.80 kg/m^3 と理論的に計算できる。この値は、ポテンシャルコア内のピトー管による実験値から推測した密度の値と定量的にかなり良く一致する。

図7より、レインボーシュリーレン法による密度の計測値は、ポテンシャルコアから噴流の周囲までの急激な密度の減衰を良く示している。また噴流の中心軸近くの領域を除けば、レインボーシュリーレン法による密度の計測値は、ピトー管による計測値から推測した密度と定量的にかなり良く一致する。なお、噴流中心軸上ではレインボーシュリーレン法の密度の計測値は理論値に対して約6%の誤差をもつ。

5. 結 論

色相の値が連続的に変化するレインボーフィルターを作製し、設計マッハ数1.6の軸対称ノズルからの適正膨張超音速噴流をレインボーシュリーレン法によって定量化することを試みた。その結果、以下のことが分かった。

(1) 幅1.4 mmの間で色相の値が 0° から 314° まで連続的に変化するレインボーフィルターを作製し

た。本実験の場合、空間分解能は $18.5 \mu\text{m}$ であるが、これは、ピンホール大きさ、集光レンズの焦点距離、レインボーフィルターの色相の解像度、デジタルカメラの解像度に依存する。

(2) レインボーフィルターによるシュリーレン法は、従来の3色カラーフィルターによるシュリーレン法に比べて、噴流の中心軸に対して垂直方向の密度こう配の変化をより詳細に観察できる。また、ノズル出口から下流方向への噴流のせん断層の変化をとらえることができる。さらに、適正膨張超音速噴流内部のマッハ波を明瞭に観察することができる。

(3) レインボーシュリーレン法による密度の計測値は、ポテンシャルコアから噴流の周囲までの急激な密度の減衰を示すことができる。

(4) レインボーシュリーレン法によって計測された密度の値は、噴流の中心軸上では理論値に対して約6%の誤差をもつ。噴流の中心軸上を除けば、レインボーシュリーレン法による密度の計測値は、ピトー管による計測値と定量的に極めて良く一致する。

謝 辞

本研究の実験の計測とデータ解析に携わった本学の当時大学院生の吉村文さん、当時学部生の岩下裕之君と山下敬仁君、および現学部生の佐藤宏樹君と深瀬将彦君に感謝の意を表す。

文 献

- (1) Settle, G. S., *Schlieren and Shadowgraph Techniques*, (2001), pp. 39-75, Springer.
- (2) Howes, W. L., Rainbow Schlieren and Its Applications, *Applied Optics*, Vol. 23, No. 14 (1984), pp. 2449-2460.
- (3) Al-Ammar, K. and Agrawal, K. G., Application of Rainbow Schlieren Deflectometry for Concentration Measurements in an Axisymmetric Helium Jet, *Experiments in Fluids*, Vol. 25, No. 2 (1998), pp. 89-95.
- (4) Kolhe, P. S. and Agrawal, A. K., Density Measurements in a Supersonic Microjet Using Miniature Rainbow Schlieren Deflectometry, *AIAA J.*, Vol. 47, No. 4 (2009), pp. 830-838.
- (5) Born, M. and Wolf, E., *Principles of Optics*, (1964), p. 123, Pergamon Press, New York.
- (6) Sneddon, I. N., *The Use of Integral Transforms*, (1972), p. 318, McGraw-Hill Book Company.
- (7) Merzkirch, W., *Flow Visualization*, (1987), p. 118, Academic Press, Inc.
- (8) Foelsch, K., The Analytical Design of an Axially Symmetric Laval Nozzle for a Parallel and Uniform Jet, *J. Aeronautical Sciences*, Vol. 16, No. 3 (1949), pp. 161-188.
- (9) Matsuo, K., *Compressible Fluid Flow*, (1994), p. 109, Rikougaku Sha.