適切な支配方程式に基づく気体のベナール問題の再検討*

片岡 武^{*1}Bénard Problem for a Gas on the Basis of
Appropriate Governing EquationsTakeshi KATAOKA^{*2}^{*2} Graduate School of Engineering, Kobe University,
Rokkodai, Nada-ku, Kobe-shi, Hyogo, 657-8501 Japan

We revisit the Bénard problem for a gas in the continuum limit. It was recently shown that the behavior of a gas with finite temperature difference is not described by the usual NS equations but by the SB equations, which are derived systematically from the Boltzmann equation in the continuum limit. The SB equations include the thermal-stress term which does not appear in the NS equations. In the present study, we investigate the linear stability of the quiescent state of the system on the basis of the SB equations and the results are compared with those on the basis of the NS equations. It is found that the critical Rayleigh number for the onset of instability is always smaller and growth rate of a disturbance is always larger in the framework of the SB equations. Thus, the thermal-stress term has a role of accelerating the Rayleigh-Taylor instability, and increasing the strength of thermal convection. These features are commonly observed not only for no-slip boundary conditions but also for free-slip boundary conditions.

Key Words: Stability, Compressible Flow, Fluid Dynamics, Bénard Problem, Navier-Stokes Equation

1. 結 論

一様な重力加速度の働く系において、底面温度が上面温度よりも高い 2 平行壁に挟まれた気体の振舞を扱うベナール問題は、流体力学的安定性に関する古典的問題として数多くの研究が成されてきた^{(1),(2)}。静止解の線形安定性は、一般性を失うことなく空間 2 次元問題として扱うことができる。とくに上下壁の温度差が温度そのものに比べて小さい場合には、ブジネスク近似が有効であり、連続体極限におけるこの問題はただ 1 つのパラメータであるレイリー数 Ra によって特徴づけられる。レイリー数がある臨界値を超えると、静止解は不安定となり、ベナール対流が誘起される。過去の研究によると、安定限界となる最小の臨界レイリー数は、上下境界が滑りなし条件(固体境界)の場合は 1708、滑り条件(自由境界)の場合は 658 である^{(1),(2)}。

一方、上下境界の温度差が温度そのものと同じオーダーであれば、ブジネスク近似は適用できない。この場合、基礎方程式は圧縮性 NS 方程式であり、静止解の線形安定性はレイリー数だけでなく温度比

と気体の種類にも依る。とくに剛体球分子気体を対象とした研究が過去に広くなされており^{(3),(4)}、例えば上下境界の温度比が 0.1 で固体境界の場合には、安定限界となる最小の臨界レイリー数は 1773 であることが知られている。

このように NS 方程式を基に多くの研究が成されてきたベナール問題であるが、最近、重大な事実が判明した。それは常に支配方程式として正しいと考えられてきた NS 方程式が、温度差が小さくない場合の気体の振舞を正しく記述できないことが分かったのである⁽⁵⁾。分子気体論を基にしたボルツマン方程式の系統的解析により、曾根と土井⁽⁶⁾は連続体極限における正しい支配方程式系が以下の SB 方程式系となることを示した：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{p} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

* 原稿受付 2010 年 2 月 12 日。

^{*1} 正員, 神戸大学大学院工学研究科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町)。

E-mail: kataoka@mech.kobe-u.ac.jp

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial z} - \rho g$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(- \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{p} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] \right\},$$

$$\frac{3\rho R}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial pu}{\partial x} + \frac{\partial pw}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (4)$$

$$p = \rho RT. \quad (5)$$

ここで t は時間, (x, z) は空間直交座標, (u, w) は流速の (x, z) 方向成分, ρ , T , p , p^* はそれぞれ気体の密度, 温度, 圧力, 修正圧力 (詳細は文献^{⑥⑧}を見よ), g は重力加速度, R は気体定数である. 式(2), (3)右辺の定数 σ を含む項が NS 方程式系に現れない項であり, 熱応力項と呼ばれる. 気体論によると $\sigma = O(\mu^2 R / T)$ であり^{⑥⑧}, NS 方程式系がレイノルズ数 $O(1)$ の流れを対象とすることを考慮すれば, この非 NS 項は, 式(2), (3)の NS 項である対流項や粘性項に比して $O((\Delta T / T_0)^2)$ の大きさをもつことが分かる. ただし ΔT は上下境界の温度差を表す.

したがって上下境界の温度差が小さくない ($\Delta T = O(T_0)$) とき, 熱応力項 (非 NS 項) は NS 項と同じオーダーの大きさをもつ. 連続体極限 $\text{Kn} \rightarrow 0$ における気体の支配方程式において, 非 NS 項が有意の大きさをもつこの効果は幽霊効果と呼ばれている^{⑥⑧}. 本研究では, この非 NS 項が静止解の線形安定性に及ぼす影響を調べることを目的とする. 具体的には, SB 方程式系と NS 方程式系による結果の差を以下の3点に関して明らかにする.

- (i) 安定限界となる臨界レイリー数.
- (ii) 攪乱の成長率.
- (iii) 攪乱の流速, 温度分布.

このうち, (i) については上下境界が滑りなし条件の場合の結果が文献^⑦により得られている. ただ, 攪乱の水平方向波数の離散的な値に対する結果がレイリー数とは異なる独自のパラメータにより示されている. 本研究では連続的な水平方向波数に対する結果をレイリー数により示す. (ii), (iii) は本研究で初めて取り扱われる項目である. 本研究ではさらに上下境界が滑り条件 (自由境界) の場合についても上記3点を調べ, 境界の種類の影響を考察する.

以下, 2 節で問題設定, 3 節で基礎方程式と境界

条件, 4 節で数値計算法を説明し, 5 節で結果の考察をおこなう. 上記項目の(i), (ii), (iii)はそれぞれ 5.1, 5.2, 5.3 節で取り扱われる. 最後に 6 節で結言を述べる.

2. 問 題

一様な重力加速度 g の働く系において, 上下を無限に広い 2 平行壁に挟まれた剛体球分子の理想気体の運動を考える. 上下壁は互いに距離 L 離れており, 下壁の温度 T_0 は上壁のそれ T_1 よりも高く ($T_0 > T_1$), 領域内の気体の平均密度を ρ_0 とする. 気体の運動はボルツマン方程式に従うものとすれば, 本問題は, 系の希薄度を表すクヌーセン数 $\text{Kn} = l / L$ (l は密度 ρ_0 の静止平衡状態にある気体の平均自由行程)に加えて, 以下に定義される 2 つのパラメータ: レイリー数 Ra , 上下壁の温度比 $\hat{T}_1$, により特徴づけられる.

$$\text{Ra} = \frac{10\rho_0^2 R g L^3}{\mu(T_0) \lambda(T_0)} \frac{T_0(T_0 - T_1)}{(T_0 + T_1)^2}, \quad \hat{T}_1 = \frac{T_1}{T_0}. \quad (6)$$

ただし, $\mu(T)$ と $\lambda(T)$ はそれぞれ粘性係数, 熱伝導係数であり, 温度の関数として $\mu(T) = 0.7959 \rho_0 l \sqrt{RT}$, $\lambda(T) = 3.012 \rho_0 l R \sqrt{RT}$ により与えられる^{⑥⑧}. 本研究では, $\text{Kn} \rightarrow 0$ の連続体極限における気体を対象とし, その静止状態の線形安定性を調べる.

3. 基礎方程式と境界条件

1 節で述べた通り, ボルツマン方程式の系統的解析により, $\text{Kn} \rightarrow 0$ の連続体極限における気体の支配方程式は, SB 方程式系(1)-(5)となる. なお σ は $\sigma = 1.381 \rho_0^2 l^2 R^2$ である^{⑥⑧}.

以下の無次元変数を導入する:

$$(\hat{u}, \hat{w}) = \left(\frac{u}{\kappa/L}, \frac{w}{\kappa/L} \right), \quad (\hat{x}, \hat{z}) = \left(\frac{x}{L}, \frac{z}{L} \right), \quad (7)$$

$$\hat{t} = \frac{t}{L^2 / \kappa}, \quad \hat{T} = \frac{T}{T_0}, \quad \hat{p} = \frac{p}{\rho_0 R T_0}.$$

ここに $\kappa = 2\lambda(T_0) / 5\rho_0 R$ は熱拡散係数である. SB 方程式系(1)-(5)は, (2)と(3)の回転をとり, (5)により ρ を消去した後, 上記無次元変数(7)を用いると以下の形に表わされる.

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left(\frac{1}{\hat{T}} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\frac{\hat{u}}{\hat{T}} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\frac{\hat{w}}{\hat{T}} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}_0}{\hat{T}} \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \hat{x}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial \hat{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\frac{\hat{p}_0}{\hat{T}} \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} - \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left[\frac{\hat{p}_0}{\hat{T}} \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} - \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right) \right] = \text{Pr} \left[\frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial \hat{z}} \left[2\sqrt{\hat{T}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \right) \left[\sqrt{\hat{T}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right) \right] \right] - \text{Pr Ra} \frac{\hat{p}_0}{\hat{T}^2} \frac{(1+\hat{T}_1)^2}{4(1-\hat{T}_1)} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \frac{C_T}{\hat{p}_0} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{z}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \right) \hat{T}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}_0}{\hat{T}} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{z}} \right) - \frac{2}{5} \frac{d\hat{p}_0}{d\hat{t}} \\ = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\sqrt{\hat{T}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\sqrt{\hat{T}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{z}} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\hat{\xi} = \hat{T} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\frac{\hat{u}}{\hat{T}} \right) - \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\frac{\hat{w}}{\hat{T}} \right) \right]. \quad (11)$$

ここに, $\text{Pr} = 0.6607$ はプラントル数であり, 熱伝係数 C_T と無次元圧力 $\hat{p}$ (定数となる) はそれぞれ

$$C_T = \begin{cases} 0.9519 & (\text{SB系}), \\ 0 & (\text{NS系}), \end{cases} \quad (12)$$

$$\hat{p} = \hat{p}_0 \equiv \frac{\int dx dz}{\int (1/\hat{T}) dx dz}, \quad (13)$$

により与えられる. ただし(13)は領域内の気体の密度が不変であることから得られる式であり, 積分は全領域でおこなう. また $\hat{\xi}$ は修正渦度と呼ぶ.

境界条件は,

$$\begin{cases} \hat{u} = \hat{w} = 0, \hat{T} = 1 & \text{at } \hat{z} = 0, \\ \hat{u} = \hat{w} = 0, \hat{T} = \hat{T}_1 & \text{at } \hat{z} = 1, \end{cases} \quad (\text{固体境界}) \quad (14a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = \hat{w} = 0, \hat{T} = 1 & \text{at } \hat{z} = 0, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = \hat{w} = 0, \hat{T} = \hat{T}_1 & \text{at } \hat{z} = 1, \end{cases} \quad (\text{自由境界}) \quad (14b)$$

である. 自由境界(14b)では熱応力を含む全ての接線方向応力が境界上で零となる.

上記方程式系(8)-(11)は次の静止解をもつ:

$$\hat{u}_B = \hat{w}_B = \hat{\xi}_B = 0, \quad \hat{T}_B = [1 + (\hat{T}_1^{3/2} - 1)\hat{z}]^{2/3}. \quad (15)$$

この静止解(15)の線形安定性を調べるため, (8)-(11)の解を, (15)と微小攪乱との和により表す:

$$\begin{cases} \hat{u} = U(\hat{z}) \exp(\lambda \hat{t} + ik\hat{x}), \\ \hat{w} = iW(\hat{z}) \exp(\lambda \hat{t} + ik\hat{x}), \\ \hat{\xi} = \zeta(\hat{z}) \exp(\lambda \hat{t} + ik\hat{x}), \\ \hat{T} = \hat{T}_B(\hat{z}) + i\tau(\hat{z}) \exp(\lambda \hat{t} + ik\hat{x}). \end{cases} \quad (16)$$

ここに k は攪乱の水平方向波数を表す正定数, λ は攪乱の成長率を表す未知定数(本問題では実数), (U, W, τ, ζ) はいずれも $\hat{z}$ の未知関数である. (16)を(8)-(11)に代入し, (U, W, τ, ζ) に関して線形化すれば, (U, W, τ, ζ) に対する次の方程式系が得られる:

$$\begin{cases} L_1(U, W) = \lambda \tau, \\ L_2(U, W, \tau) = \lambda \zeta, \\ L_3(W, \tau) = \lambda \tau, \\ \zeta = \frac{dU}{d\hat{z}} - \frac{1}{\hat{T}_B} \frac{d\hat{T}_B}{d\hat{z}} U + kW. \end{cases} \quad (17)$$

境界条件は,

$$U = W = \tau = 0 \quad \text{at } \hat{z} = 0, 1 \quad (\text{固体境界}), \quad (18a)$$

$$\frac{dU}{d\hat{z}} = W = \tau = 0 \quad \text{at } \hat{z} = 0, 1 \quad (\text{自由境界}). \quad (18b)$$

ここで L_1, L_2, L_3 は以下の線形演算子である:

$$\begin{cases} L_1(U, W) = k\hat{T}_B U + \hat{T}_B \frac{dW}{d\hat{z}} - \frac{d\hat{T}_B}{d\hat{z}} W, \\ L_2(U, W, \tau) = \zeta_V + \zeta_R + \zeta_T, \\ L_3(W, \tau) = -\frac{d\hat{T}_B}{d\hat{z}} W + \frac{\hat{T}_B^{3/2}}{\hat{p}_0} \left(\frac{d^2 \tau}{d\hat{z}^2} + \frac{1}{\hat{T}_B} \frac{d\hat{T}_B}{d\hat{z}} \frac{d\tau}{d\hat{z}} + S\tau \right). \end{cases} \quad (19)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \zeta_V = \text{Pr} \frac{\hat{T}_B^{3/2}}{\hat{p}_0} \left[\frac{d^3 U}{d\hat{z}^3} + \frac{1}{\hat{T}_B} \frac{d\hat{T}_B}{d\hat{z}} \frac{d^2 U}{d\hat{z}^2} + S \frac{dU}{d\hat{z}} \right. \\ \left. - \frac{k^2}{\hat{T}_B} \frac{d\hat{T}_B}{d\hat{z}} U + k \frac{d^2 W}{d\hat{z}^2} - k(S + 2k^2)W \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\zeta_R = \text{Pr Ra} k \frac{(1+\hat{T}_1)^2}{4(1-\hat{T}_1)\hat{T}_B} \tau, \quad (21)$$

$$\zeta_T = \frac{C_T k \hat{T}_B}{\hat{p}_0^2} \left[\frac{d\hat{T}_B}{d\hat{z}} \left(\frac{d^2 \tau}{d\hat{z}^2} - k^2 \tau \right) - \frac{d^3 \hat{T}_B}{d\hat{z}^3} \tau \right], \quad (22)$$

$$S = -\frac{1}{4\hat{T}_B^2} \left(\frac{d\hat{T}_B}{d\hat{z}} \right)^2 + \frac{1}{2\hat{T}_B} \frac{d^2 \hat{T}_B}{d\hat{z}^2} - k^2. \quad (23)$$

Table 1 Convergence of computed eigenvalues λ as the number N of mesh points is increased (SB equations, no-slip boundary conditions): (a) $(\hat{T}_1, k) = (0.01, \pi)$, (b) $(\hat{T}_1, k) = (0.01, 2\pi)$. The computational parameter α in (24) is chosen as 0.01.

(a)			
N	λ (Ra=1870)	λ (Ra=2000)	λ (Ra=4000)
100	0.039944	0.456022	5.932396
200	0.039456	0.455600	5.932277
400	0.039305	0.455465	5.932220
800	0.039265	0.455430	5.932204

(b)			
N	λ (Ra=2560)	λ (Ra=3000)	λ (Ra=4000)
100	0.041162	1.845425	5.601503
200	0.038347	1.842959	5.599550
400	0.037608	1.842305	5.599020
800	0.037421	1.842138	5.598885

ここに、 ζ_v , ζ_R , ζ_T はそれぞれ粘性項、浮力項熱応力項(非 NS 項)の修正渦度生成への寄与を表わす。(17), (18)は λ を固有値とする固有値問題を構成しており、固有値 λ が正なる解をもつとき、(15)で表される静止解は水平方向波数 k の攪乱に対して不安定となる。本研究ではこの固有値問題を数値的に解く。数値計算手法は4節で述べる。なお、ブジネスク近似下($\hat{T}_1 \rightarrow 1$, $|\tau| \ll 1$)において、(17)はKoschmieder²⁾の式(2.10)に一致する。

4. 数値計算法

上記固有値問題(17), (18)を数値的に解くため、新たに次の変数 γ を導入する:

$$\hat{z} = \gamma + \frac{\alpha - 1}{2\pi} \sin 2\pi\gamma. \quad (24)$$

ただし α は1よりも小さい正定数であり、空間離散点を $\gamma_i = i/N$ ($i = 0, 1, \dots, N$)上に配分する。これにより、空間離散点を上下境界 $\hat{z} = 0, 1$ の近傍に集中させることができ、境界近傍の解の急な変化も精度良く捉える事ができる。

(U, W, τ, ζ) の $\hat{z}$ に関する微分は、以下の2次精度中心差分により評価する:

$$\left(\frac{df}{d\hat{z}} \right)_i = \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{2(d\hat{z}/d\gamma)_i} N, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 f}{d\hat{z}^2} \right)_i &= \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{(d\hat{z}/d\gamma)_i^2} N^2 \\ &+ \frac{f_{i-1} - f_{i+1}}{2(d\hat{z}/d\gamma)_i^3} \left(\frac{d^2 \hat{z}}{d\gamma^2} \right)_i N. \end{aligned} \quad (26)$$

ただし f は (U, W, τ, ζ) を表し、下添え字 i は空間

離散点 $\gamma = \gamma_i$ 上において評価することを意味する。結局、(17)の第1, 3式の差、第4式、境界条件(18)を用いて、 $0 \leq i \leq N$ に対する U_i と W_i および ζ_0 , ζ_N を、 $1 \leq i \leq N-1$ に対する τ_i と ζ_i により表わすことができる。その結果、(17)は次の $2N-2$ 個の代数方程式に帰着できる:

$$[Y] \begin{Bmatrix} \tau \\ \zeta \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \tau \\ \zeta \end{Bmatrix}. \quad (27)$$

ここに $[Y]$ は $(2N-2) \times (2N-2)$ の係数行列であり、 $\{\tau, \zeta\} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N-1}, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{N-1})$ は $2N-2$ 次のベクトルである。 $[Y]$ の固有値 λ は、QR法⁹⁾により数値的に求めることができる。

上記手法を用いて得られた数値結果の収束性を調べた。表1は空間離散点数 N に対する固有値 λ の計算結果である。この表より、 $k = \pi$ の場合は $N = 200$ 点で、 $k = 2\pi$ の場合は $N = 400$ 点で、 λ に関する $O(10^{-3})$ までの収束がほぼ実現されていることがわかる。数値結果の収束は k が大きいくほど遅い。本研究では $k \leq 2\pi$ の場合は $O(10^{-3})$ 、 $k > 2\pi$ の場合は $O(10^{-2})$ までの固有値 λ の収束が実現されるように α と N を選択し計算を行った。

5. 結果と考察

まずは攪乱による流れ(ペナル対流)のイメージを掴むために、3ケースの異なる水平方向波数 k

Fig. 1 Examples of induced flow velocities $(\hat{u}, \hat{w})$ for three different values of $k (= \pi/2, \pi, 2\pi)$ (SB equations, no-slip boundary conditions, $\hat{T}_1 = 0.1$, Ra = 4000). The arrows indicate the flow velocities at their starting points.

($=\pi/2, \pi$, and 2π)に対する流れ場の例を図 1 に示した(SB 方程式, 固体境界, $\hat{T}_1=0.1$, $Ra=4000$ の場合). 図 1 は $0 < \hat{x} < \pi/k$ の範囲で示したが, これを $-\infty < \hat{x} < \infty$ へ拡張するには次のようにすればよい. つまり $-\pi/k < \hat{x} < 0$ の部分が $0 < \hat{x} < \pi/k$ の部分の鏡像となるようにするのである. 同様に, 隣り合う流れ場はお互いに鏡像関係にあることを利用して水平方向に拡張していくのである⁽¹⁰⁾. 以下では, SB 方程式系と NS 方程式系の結果の差を考察する. 1 節で紹介した(i), (ii), (iii)の項目をそれぞれ 5.1 節, 5.2 節, 5.3 節において取り扱う.

5.1 臨界レイリー数 図 2 は固体境界(18a)を採用したときの $k-Ra$ 平面における安定限界曲線を, 3 種類の異なる温度比 $\hat{T}_1=0.01, 0.1, 0.5$ に対して示したものである. 実線が SB 方程式による結果, 点線が NS 方程式による結果である. 図 2 より, 任意の k に対して SB 方程式による曲線が NS 方程式による曲線よりも低い位置にあることが分かる. つまり SB 方程式の臨界レイリー数 Ra_c は, NS 方程式のそれよりも常に低い. その差をプロットしたものが図 2 の一点鎖線である. k が大きいほど, また $\hat{T}_1$ が小さいほどその差は広がっている.

続いて, 上記特徴が境界の種類に依存するか否かを調べるため, 自由境界(18b)を採用したときの結果を図 3 に示した. この図より, 滑りなし条件の場合と同様, 臨界レイリー数 Ra_c は SB 方程式の結果が NS 方程式の結果よりも常に低く, その差は k が大きいほど, また $\hat{T}_1$ が小さいほど広がっている. したがって SB 方程式に含まれる熱応力項は, 境界の種類に依らずレイリー・テイラー不安定性を増長する効果をもち, その影響は水平方向波数が大きいほど, また上下壁の温度比が小さいほど大きいと言える.

臨界レイリー数 Ra_c は, ある水平方向波数 k_{min} において最小値 $(Ra_c)_{min}$ をとる. それらを表 2, 3 にまとめた. 表 2 が固体境界, 表 3 が自由境界の場合の結果である. SB 方程式と NS 方程式の $(Ra_c)_{min}$ に関する差は, 温度比が小さいほど顕著となる. 例えば, 温度比が $\hat{T}_1=0.01$ のとき, その差は固体境界では 280, 自由境界では 314 である. しかしこの差は温度比が 1 に近づくにつれ, 急速に縮まる. 例えば $\hat{T}_1=0.5$ においては, その差は固体境界で 13, 自由境界で 10 である. ブジネスク近似の極限 $\hat{T}_1 \rightarrow 1$ において, その差は零となる.

5.2 攪乱の成長率 前節(5.1 節)では安定限界における結果を対象としたが, 本節では不安定領

Fig. 2 Marginal stability curves in the $k-Ra$ plane for the no-slip boundary conditions (18a): (a) $\hat{T}_1=0.01$, (b) $\hat{T}_1=0.1$, (c) $\hat{T}_1=0.5$. The solid line is the result for the SB equations and the dashed line is that for the NS equations. The cross represents a point of the minimum critical Rayleigh number $(Ra_c)_{min}$ for which specific values of $(k_{min}, (Ra_c)_{min})$ are shown in the figure. The dash-dot line represents a difference of the critical Rayleigh number for the SB equations and that for the NS equations.

Fig. 3 Marginal stability curves in the k - Ra plane for the free-slip boundary conditions (18b): (a) $\hat{T}_1 = 0.01$, (b) $\hat{T}_1 = 0.1$, (c) $\hat{T}_1 = 0.5$. For more legend see the caption of Fig. 2.

域における結果に着目する．とくに攪乱の成長率 λ について，SB 方程式と NS 方程式の結果の差を考察する．

Table 2 Minimum critical Rayleigh number $(Ra_c)_{\min}$ and the corresponding wavenumber $k_{\min}$ of a disturbance mode for the no-slip boundary conditions (18a).

No-slip	SB equations		NS equations	
$\hat{T}_1$	$k_{\min}$	$(Ra_c)_{\min}$	$k_{\min}$	$(Ra_c)_{\min}$
0.01	3.56	1822	3.41	2102
0.02	3.52	1759	3.40	1999
0.03	3.49	1724	3.38	1936
0.04	3.47	1701	3.36	1892
0.05	3.44	1686	3.35	1860
0.07	3.40	1668	3.32	1815
0.1	3.36	1656	3.29	1774
0.2	3.26	1658	3.22	1723
0.3	3.20	1671	3.18	1710
0.4	3.17	1683	3.15	1706.2
0.5	3.15	1693	3.14	1705.8
0.7	3.12	1703	3.12	1706.9
0.9	3.117	1707.3	3.116	1707.6
Boussinesq	3.11632	1707.76	3.11632	1707.76

Table 3 Minimum critical Rayleigh number $(Ra_c)_{\min}$ and the corresponding wavenumber $k_{\min}$ of a disturbance mode for the free-slip boundary conditions (18b).

Free-slip	SB equations		NS equations	
$\hat{T}_1$	$k_{\min}$	$(Ra_c)_{\min}$	$k_{\min}$	$(Ra_c)_{\min}$
0.01	2.74	494	2.46	808
0.02	2.66	518	2.45	770
0.03	2.61	532	2.43	746
0.04	2.58	543	2.42	729
0.05	2.55	551	2.41	716
0.07	2.50	565	2.39	699
0.1	2.45	580	2.36	683
0.2	2.35	610	2.30	663
0.3	2.30	628	2.27	658
0.4	2.27	639	2.25	656.8
0.5	2.25	647	2.24	656.7
0.7	2.23	654	2.23	657.2
0.9	2.222	657.2	2.222	657.5
Boussinesq	2.22144	657.51	2.22144	657.51

図 4 に，固体境界を採用したときの $Ra=4000$ における攪乱の成長率 λ を示した．実線が SB 方程式による結果，点線が NS 方程式による結果，一点鎖線が両者の差を表す．この図より，成長率 λ に関する SB 方程式と NS 方程式の結果の差は， k の増加とともに単調に増加することが分かる．なお図は示していないが，同様の傾向が自由境界を採用した時の結果からも得られた．温度比 $\hat{T}_1$ への依存性に関しては，SB 方程式と NS 方程式の結果の差は， $\hat{T}_1$ が小さいほど広がる．例えば $k = \pi$ に固定したときの成長率 λ の差は，温度比 $\hat{T}_1 = 0.01, 0.1, 0.5$ に対してそれぞれ 0.63, 0.33, 0.05 (固体境界の場合)，および，0.95, 0.43, 0.06 (自由境界の場合)であった．したがって，攪乱の成長率に関しても，5.1 節の臨

Fig. 4 Growth rate λ of a growing disturbance mode as a function of wavenumber k for $Ra = 4000$ when no-slip boundary conditions (18a) are applied: (a) $\hat{T}_1 = 0.01$, (b) $\hat{T}_1 = 0.1$. The solid line is the result for the SB equations, the dashed line is that for the NS equations, and the dash-dot line is a difference of these two results. The cross represents a point of the maximum growth rate for which specific values of (k, λ) are shown in the figure.

界レイリー数と同様、SB 方程式と NS 方程式の差は k が大きいほど、また $\hat{T}_1$ が小さいほど大きくなる。

5・3 攪乱の流速、温度分布 熱応力項の効果をより具体的に見るため、(22)で定義される $\zeta_T(\hat{z})$ の分布例を図 5 に示した(固体境界、 $Ra = 4000$ の場合)。 ζ_T は熱応力項の修正渦度 ζ 生成への寄与を表わす量である。この図 5 より、SB 方程式に対する ζ_T が比較的大きな値をとるのに対し、NS 方程式系に対する ζ_T は零である。その結果として修正渦度 ζ の分布にも大きな差違の生じることが期待される。そこで図 5 には、 $(W(\hat{z}))$ の最大値により正規化された $\zeta(\hat{z})$ の分布も合わせて示した。驚くこと

Fig. 5 Eigenfunctions $\zeta_T(\hat{z})$ and $\zeta(\hat{z})$ (see (22) and (16)) for three different values of $k (= \pi/2, \pi, 2\pi)$ when Ra is fixed at 4000 and no-slip boundary conditions (18a) are applied: (a) $\hat{T}_1 = 0.01$, (b) $\hat{T}_1 = 0.1$. All profiles are normalized by the maximum value of $W(\hat{z})$. The solid line is the result for the SB equations and the dashed line is that for the NS equations. Both results for ζ are almost identical.

に、SB 方程式と NS 方程式の ζ の分布に差違はほとんど見られない。これは ζ_T と ζ が互いに相似でないことを考慮すれば、意外な結果である。つまり、熱応力項による修正渦度 ζ の生成分 ζ_T が、NS 項からの寄与 ζ_v 、 ζ_R (式(20), (21)) の変化によってうまく ζ に相似な分布へと相殺されているのである。その結果、流速 (U, W) や温度 τ に関しても、図 6 に示すように SB 方程式と NS 方程式の分布は相似となる(図中、両者の結果、とくに $W(\hat{z})$ の分布はほぼ重なり合っている)。なお、この相似性は自由境界の場合にも全く同様に見られた。非 NS 項である熱応力項の寄与を表す ζ_T が有意の値をもつにも関わらず、その影響を受けるはずの流速、温度分布が相似形を保つのである。現在のところ、その物理的メカニズムはまだ不明である。

6. 結 言

ベナール問題における静止解の線形安定性を上下境界がともに固体境界もしくは自由境界の場合について、適切な支配方程式系である SB 方程式系を基に調べた。NS 方程式系による結果との比較により、境界の種類に依存しない以下の結論を得た。

- (1) 静止解が不安定となる臨界レイリー数 Ra_c は、SB 方程式系による結果が NS 方程式系による結果よりも常に低い。攪乱の成長率 λ は、SB 方程式系による結果が常に高い。つまり、SB 方程式系に含まれる熱応力項は、レイリー・テイラー不安定性を増長し、ベナール対流の成長を促進する効果がある。
- (2) NS 方程式系は、攪乱の成長率を常に実際よりも小さめに見積もる傾向がある。そのため、実際に発生するはずのベナール対流を見逃す可能性がある。
- (3) 臨界レイリー数 Ra_c と攪乱の成長率 λ に関する SB 方程式系と NS 方程式系による結果の差は、攪乱の水平方向波数が大きいほど、また上下壁の温度比 $\hat{T}_1$ が 1 から外れるほど、より顕著となる。
- (4) 攪乱の流速分布、温度分布は、SB 方程式による結果と NS 方程式による結果がほぼ完全に相似となる。

文 献

- (1) Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, (1961), Oxford University Press.
- (2) Koschmieder, E. L., *Bénard Cells and Taylor Vortices*, (1993), Cambridge University Press.
- (3) Fröhlich, J., Laure, P., and Peyret, R., Large departures from Boussinesq approximation in the Rayleigh-Bénard problem, *Physics of Fluids A* 4, (1992), pp. 1355-1372.
- (4) Manela, A. and Frankel, I., On the Rayleigh-Bénard problem in the continuum limit, *Physics of Fluids* Vol. 17, (2005), 036101.
- (5) Manela, A. and Frankel, I., On the Rayleigh-Bénard problem: dominant compressibility effects, *Journal of Fluid Mechanics* Vol. 565, (2006), pp. 461-475.
- (6) Sone, Y. and Doi, T., Bifurcation of and ghost effect on the temperature field in the Bénard problem of a gas in the continuum limit, *Phys. Fluids* Vol. 15, (2003), pp. 1405-1423.
- (7) Sone, Y., *Kinetic Theory and Fluid Dynamics*, (2002), Birkhäuser.
- (8) Sone, Y., *Molecular Gas Dynamics*, (2007), Birkhäuser.
- (9) Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*, (1965), Clarendon.
- (10) Sone, Y., Aoki, K., and Sugimoto, H., The Bénard problem for a rarefied gas: Formation of steady flow patterns and stability of array of rolls, *Physics of Fluids* Vol. 9, (1997), pp. 3898-3914.

Fig. 6 Eigenfunctions $U(\hat{z})$, $W(\hat{z})$, and $\tau(\hat{z})$ (see (16)) of growing disturbance modes for three different values of $k(=\pi/2, \pi, 2\pi)$ when $Ra = 4000$ and no-slip boundary conditions (18a) are applied: (a) $\hat{T}_1 = 0.01$, (b) $\hat{T}_1 = 0.1$. All profiles are normalized by the maximum value of $W(\hat{z})$. The solid line is the result for the SB equations and the dashed line is that for the NS equations. Both results (especially those for $W(\hat{z})$) are almost identical.