GERT ネットワークモデルを用いた プロジェクトの完了時間分布とコスト分布

山城光雄^{*1}, 鄭天民^{*2}

Completion Time and Cost Distributions of the Project Using GERT Network Model

Mitsuo YAMASHIRO^{*1} and Tianmin ZHENG

^{*1} Ashikaga Institute of Technology
Dept. of Systems and Information Engineering
Ohmae-cho 268-1, Ashikaga-shi, Tochigi, 326-8558 Japan

The GERT network model is composed of multi-parameter branches and nodes. The model can be analyzed using the Laplace transform. In this study, the example of the project in a GERT network model is shown. Branches of the network are described by three parameters (a probability, time and cost). Probability distributions of time and cost in an activity are assumed as the cases of constant and exponential distributions. The expected value, the variance and the probability distributions of completion time and cost for the project are obtained from the result of analysis and numeric computation using the software system.

Key Words : GERT, Network Model, Analysis, Probability Distribution

1. 結 言

PERT (Program Evaluation and Review Technique) は、大規模な建設工事、複雑な研究開発などプロジェクトの計画と管理に関連した技術として有効な方法である。PERT の拡張として考案された方法に GERT (Graphical Evaluation and Review Technique) があり、確率的な要素の入ったネットワーク・モデルが対象となる^{(1)~(3)}。プロジェクトという言葉は、通常、大規模なある種の事業という意味で使われている⁽³⁾。GERT は大規模な事業に限らず、中規模、小規模な事業、例えば工場における部品の機械加工や検査工程、電気機器や電子部品の製造などのオペレーションの領域に適用されている。プロジェクトが大規模なネットワークモデルで表わされる場合、一般に GERT を用いて解析的に解くことは極めて困難となる^{(4)~(5)}。また、アクティビティの所要時間および所要コストに各種確率分布を想定したネットワークになると、さらに式の展開や数値計算が困難になり、手計算では不可能と思われる。北岡ら⁽⁶⁾はグラフ理論の考え方を導入して、大規模な GERT ネットワークの解析可能な計算手順を示した。この研究では、プロジェクトが完了する所要時間の期待値を求め、分散および確率分布を求めている。同様な扱いをしているモデルに、Elmaghraby⁽⁶⁾の電気機器生産工程、Ahmad ら⁽⁷⁾の水処理プラント、Barjis ら⁽⁸⁾のビジネス・プロセスが挙げられる。また、Cates⁽⁹⁾は、確率分布を求める方法にモンテカルロ・シミュレーションがあることを示唆している。山城⁽¹⁰⁾は、GERT ネットワークモデルを解析する際に、アクティビティの所要時間および所要コストを一定値と仮定して、それらの z 変換⁽¹¹⁾を用いた。しかし、アクティビティの所要時間および所要コストの分布に連続の確率分布を仮定した場合、 z 変換から求めることは不可能である。

本研究は、GERT を用いてプロジェクトのネットワークモデルを解析するのに、電気機器を製造する生産工程⁽⁶⁾を例として取り上げる。この生産工程は 1 本のラインで 2 種類 (高品質 (Hi) と低品質 (Lo)) の機器が製造さ

* 原稿受付 2010 年 3 月 23 日

^{*1} 正員, 足利工業大学工学部 (〒326-8558 栃木県足利市大前町 268-1)

^{*2} 足利工業大学大学院

E-mail: yamasiro@ashitech.ac.jp

れ、つぎに機器は品質により異なる検査を必要とするので分岐する。機器は検査により合格すれば次工程に移るが、不合格の場合は欠陥箇所を修理して、同じ検査を受ける。最終の仕上げ工程を経て、製品は完成し、製品の流れは完了する。このような生産工程は、直列、分岐、ループおよびフィードバックを含むネットワークで表される確率モデルとして作成される。製品の流れに対して確率的な扱いをしているので GERT を使用した解析が有効となり、結果として製品が完成するまで所要時間（完了時間、リードタイム）および所要コスト（費用）の期待値と、それらのバラツキを表す分散および確率分布を求めることが要求される。これらは、生産工程の現状を定量的（期待値、分散）および定性的（分布の形状）に把握するとともに、ボトルネックの工程を改善する場合に、リードタイム短縮、コスト削減の工程管理を行う上で重要な評価値として考えられる。はじめに、電気機器生産工程の各アクティビティの所要時間または所要コストの分布は、一定値と指数分布の2通りの場合を仮定する。シグナルフローグラフのルールに基づき、アクティビティが生起する確率とアクティビティの所要時間とコストの積率母関数の積で表わされる関数を用いて、各ノードについてノード変数の関係式を導く。アクティビティの所要時間およびコストの積率母関数は、ラプラス変換を使用する。つぎに、開始と終了のノード間の等価伝達関数を導き、プロジェクトを完了するのに要する時間およびコストの期待値、分散、確率分布とそれらの形状を求める。アクティビティの確率分布を一定値と仮定した場合は級数展開⁽¹²⁾、指数分布を仮定した場合はラプラス逆変換を利用する。本研究で提案することは、これら一連の計算過程を、数値計算と共に式の展開を記号で計算できる数式処理ソフトウェアの一つである *Mathematica 7.0* (Wolfram Research) を活用することにある。

2. GERT ネットワークモデルと解析方法

2・1 シグナルフローグラフ

Elmaghraby の著書⁽³⁾をもとに、シグナルフローグラフについて説明する。シグナルフローグラフは、線形システムのモデル化と解析に使われ、グラフで表示される。シグナルフローグラフの基本要素は、始点 x_1 と終点 x_2 の二つのノード（節点）を結ぶ有向アーク（矢線）から構成されるフローグラフで、図1に示す。2・2節以降、ノード内の記号 x_1 と x_2 は簡略して添字の数字 1, 2 で表すことにする。また、ノード x_1 の値がそのアークを通過してノード x_2 に伝達され、次式が成立すると仮定する。

Fig.1 Basic element of flow graph

Fig.2 Node, Arc, Branch

$$x_2 = u_{12}x_1 \quad (1)$$

この係数 u_{12} を、そのアークの伝達関数と呼ぶ。一般に、1 本以上のアークがノードに入ったり、出たりする。シグナルフローグラフを解析するには、直列パス、並列パス、ループまたはフィードバックの三つのルールを基に代数的手順に従い、複雑なネットワークで表されたグラフを簡略していき、始点と終点の二つノードを結ぶアークの縮約グラフにする。このときの伝達関数を、与えられた問題のグラフに対する等価伝達関数と呼ぶ。この関数を求めるために、GERT モデルではネットワークを構成するノードに対して、 $x_1 \sim x_n$ の変数を導入する。

2・2 シグナルフローグラフと GERT

GERT とシグナルフローグラフの関係について述べる。GERT ネットワークモデルを構成する要素は、ノードとアークである。図2に示すように、基本要素は有向アークとその両端点、すなわち状態を表すノード 1 と 2 をもつブランチ（枝）である。有向アークは方向をもち、一つのアクティビティを示す。アクティビティは作業や仕事などを表し、ノードはアクティビティの開始または終了を指示する。すなわち、ノード 1 は開始、ノード 2 は終了を示す点で、ブランチは一つのノードから出て行き、一つのノードに終結していく方向をもっている。

Table 1 Symbols of logical node

Output Input	Deterministic	Probabilistic
“And”
Inclusive “OR”
Exclusive “OR”

一つのノードは生起する場合としない場合があり，論理的ノードと呼ぶ．1本のブランチには三つのパラメータが付く．ブランチを仮に a とすると，このときネットワークの部分となるブランチが生起する確率を p_a とする．ブランチ a が生起したとき，アクティビティが完了するのに必要な時間を t_a ，コスト（費用）を c_a とする．このアクティビティを図2においてアーク上の記号 a で示す．

ノードは状態を表し，入力側と出力側の組合せにより構成される．表1に示す6個の論理的ノードの記号が用いられ，入力側として論理積，内包的論理和，排他的論理和，出力側として決定的と確率的な場合が存在する．各ブランチの終点が次のブランチの始点と一致するブランチの列を路と呼ぶ．閉路とは一つの頂点と一つのブランチからできており，一つのブランチの頂点の始点と終点と同じであるとき閉路という．つぎに，アクティビティの所要時間の確率変数を t ，コストの確率変数を c とおき，それぞれの確率密度関数を $g(t)$ ， $h(c)$ とする．アクティビティの所要時間と所要コストは独立とする．ここで， $u(s, r)$ を，ブランチ上でアクティビティが生起する確率 p とブランチに付随する所要時間および所要コストの積率母関数の積で定義する．

$$u(s, r) = p M(s) M(r) \quad (2)$$

(2)式の積率母関数 $M(s)$ と $M(r)$ は，次式で表される⁽¹³⁾．

$$M(s) = E[e^{st}] = \begin{cases} \int_0^\infty e^{st} g(t) dt & (t: \text{連続確率変数}) \\ \sum_t e^{st} g(t) & (t: \text{離散確率変数}) \end{cases} \quad (3)$$

$$M(r) = E[e^{cr}] = \begin{cases} \int_0^\infty e^{cr} h(c) dc & (c: \text{連続確率変数}) \\ \sum_c e^{cr} h(c) & (c: \text{離散確率変数}) \end{cases} \quad (4)$$

(3)式と(4)式において s を $-s$ ， r を $-r$ と置き換えると， $M(-s)$ と $M(-r)$ はラプラス変換となる．再び，ラプラス変換を用いて(2)式の $u(s, r)$ を定義する．

$$\begin{aligned} u(s, r) &= p E[e^{-st}] E[e^{-rc}] \\ &= \begin{cases} p \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt \int_0^\infty e^{-rc} h(c) dc = p G(s) H(r) \\ p \sum_t e^{-st} g(t) \sum_c e^{-rc} h(c) = p G(s) H(r) \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

s と r は，時間 t の関数 $g(t)$ とコスト c の関数 $h(c)$ を変換した関数 $G(s)$ と関数 $H(r)$ の変数を示し，ラプラス変換の演算子と呼ばれる．時間の確率変数 t とコストの確率変数 c がそれぞれ一定値 t_0 と c_0 をとるとき， $G(s) = e^{-st_0}$ と $H(r) = e^{-rc_0}$ となる．

図2のアクティビティ a に対応させた確率 p_a と時間 t_a コスト c_a をもつブランチと，それを変換した(2)式の $u(s, r)$ をもつブランチを，それぞれ図3と図4に示す．

(5)式の $u(s, r)$ から五つの特性値を求めることができる．(5)式に $s = 0$ ， $r = 0$ を代入すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} u(s, r) \Big|_{s=0, r=0} &= u(0, 0) \\ &= p \end{aligned} \quad (6)$$

すなわち、図4の $u(s, r)$ から図3のノード1が生起してノード2に至る確率 p_a を求めることができる。
また、(5)式に $r=0$ を代入し、さらに s で微分して $s=0$ とおくと、次式を得る。

Fig.3 (p_a, t_a, c_a) on the branch

Fig.4 $u(s, r)$ on the branch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} [u(s, r) \Big|_{r=0}] \Big|_{s=0} &= pE[-te^{-st}] \Big|_{s=0} \\ &= -pE[t] \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式から、図4のノード1からノード2に至る時間の期待値(期待時間) $E[t]$ が得られる。

$$\begin{aligned} E[t] &= -\frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial s} [u(s, r) \Big|_{r=0}] \Big|_{s=0} \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{u(s, r)}{u(0, 0)} \Big|_{r=0} \right] \Big|_{s=0} \end{aligned} \quad (8)$$

同様に、図4のノード1からノード2に至るコストの期待値(期待コスト) $E[c]$ が得られる。

$$\begin{aligned} E[c] &= -\frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial r} [u(s, r) \Big|_{s=0}] \Big|_{r=0} \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{u(s, r)}{u(0, 0)} \Big|_{s=0} \right] \Big|_{r=0} \end{aligned} \quad (9)$$

次章では、 $E[t]$ を μ_1 、 $E[c]$ を μ_2 とする。

また、ノード1からノード2に至る時間の分散 $V[t]$ とコストの分散 $V[c]$ が次式で計算できる。

$$V[t] = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[\frac{u(s, r)}{u(0, 0)} \Big|_{r=0} \right] \Big|_{s=0} - E[t]^2 \quad (10)$$

$$V[c] = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\frac{u(s, r)}{u(0, 0)} \Big|_{s=0} \right] \Big|_{r=0} - E[c]^2 \quad (11)$$

次章では、分散 $V[t]$ と $V[c]$ をそれぞれ v_1 、 v_2 とする。

一般にGERT ネットワークモデルを解析する手順について述べる。はじめに、アクティビティの所要時間およびコストに確率分布を仮定する。 n 個のノードから構成するネットワークにおいて、ノード i について変数 $x_i (i=1, \dots, n)$ を定義する。シグナルフローグラフの考え方をもとに、ノード間の伝達関数 $u(s, r)$ を用いてノード2からノード n まで、変数 $x_i (i=2, \dots, n)$ について関係式を導く。 $x_2 \sim x_n$ を未知数とする $(n-1)$ 個の式を連立して解くことにより、 x_n の解を求める。 x_n の解が等価伝達関数 $f_n(s, r)$ と x_1 の積で与えられるとすると、 $x_n = f_n(s, r)x_1$ となる。 $x_1 = 1$ とおくことにより、 x_n は等価伝達関数 $f_n(s, r)$ と等しくなる。ノード1の変数の値を強制関数と呼ぶ。 $f_n(s, r)$ は時間とコストのラプラス変換で表されているので、(6)~(11)式を利用して、ノード1からノード n に到達する確率、完了時間と完了コストの期待値と分散が計算でき、さらに級数展開またはラプラス逆変換により完了時間およびコストの確率分布を求めることができる。

3. 数値計算例

本章は, Elmaghraby が扱った GERT ネットワークモデル⁽⁶⁾を用いて, 前章で述べた解析手順に従い, 進める. モデルは電気機器 (モーター, 変圧器, リレーなど) を製造する工場の生産工程を想定し, 製品の流れを図 5 に示す.

第一の例は, 各アクティビティの所要時間とコストを一定値と仮定し, パラメータの組 (アクティビティが実施される確率, 所要時間 [期間], 所要コスト [\$]) に数値を与えて表 2 に, それらの $u(s, r)$ 関数を表 3 に示す.

各ノードの変数を $x_1 \sim x_{11}$ として, アーク上の伝達関数を $u_a(s, r) \sim u_q(s, r)$ とする. $u_a(s, r) \sim u_q(s, r)$ は, s と r の関数である. 以後, $u_a(s, r) \sim u_q(s, r)$ の (s, r) は簡単化のために省略し, $u_a \sim u_q$ を図 6 に示す.

シグナルフローグラフ理論の考え方から, x_2 に関する式が得られる.

$$x_2 = u_a x_1 \quad (12)$$

同様に, $x_3 \sim x_{11}$ について次式が得られる.

$$x_3 = u_b x_2 \quad (13)$$

$$x_4 = u_c x_2 \quad (14)$$

$$x_5 = u_d x_3 + u_k x_7 \quad (15)$$

$$x_6 = u_h x_5 + u_l x_7 \quad (16)$$

$$x_7 = u_j x_6 \quad (17)$$

$$x_8 = u_g x_8 + u_o x_9 \quad (18)$$

$$x_9 = u_n x_8 \quad (19)$$

$$x_{10} = u_e x_3 + u_f x_4 + u_i x_5 + u_m u_8 \quad (20)$$

$$x_{11} = u_q x_{10} \quad (21)$$

Table 2 Parameter values for each activity of Fig.1

$a = (1, 10, 35), b = (0.8, 1, 5), c = (0.2, 1, 3), d = (0.15, 1, 1),$
$e = (0.85, 0.25, 0.1), f = (0.7, 0.25, 0.1), g = (0.3, 0.9, 1),$
$h = (0.05, 2, 2.5), i = (0.95, 0.25, 0.1), j = (1, 0.25, 0.1),$
$k = (0.8, 0.25, 0.1), l = (0.2, 2, 3), m = (0.8, 0.25, 0.1),$
$n = (0.2, 2, 3), o = (1, 1, 1), q = (1, 2, 3)$

Table 3 U function (constant)

$u_a = e^{-10s-35r}, u_b = 0.8 \cdot e^{-s-5r}, u_c = 0.2 \cdot e^{-s-3r}, u_d = 0.15 \cdot e^{-s-r},$
$u_e = 0.85 \cdot e^{-0.25s-0.1r}, u_f = 0.7 \cdot e^{-0.25s-0.1r}, u_g = 0.3 \cdot e^{-0.9s-r},$
$u_h = 0.05 \cdot e^{-2s-2.5r}, u_i = 0.95 \cdot e^{-0.25s-0.1r}, u_j = e^{-0.25s-0.1r},$
$u_k = 0.8 \cdot e^{-0.25s-0.1r}, u_l = 0.2 \cdot e^{-0.25s-0.1r}, u_m = 0.8 \cdot e^{-0.25s-0.1r},$
$u_n = 0.2 \cdot e^{-2s-2r}, u_o = e^{-s-r}, u_q = e^{-2s-3r}$

Fig.5 An example of production processes for GERT network model

Fig.6 Representation of u -functions in Fig.5

式(12)～式(21)を連立して $x_2 \sim x_{11}$ について解き、ノード1の変数の値を $x_1 = 1$ とおくと、 x_{11} は次式となる。

$$x_{11} = -u_a u_q (-u_b u_e - u_c u_f + \frac{u_c u_g u_m}{-1 + u_n u_o} + \frac{u_b u_d u_i (1 - u_j u_l)}{-1 + u_h u_j u_k + u_j u_l}) \quad (22)$$

式(22)から x_{11} は s と r の関数となるので、 $x_{11}(s, r)$ と書く。すなわち、ノード1とノード11間の等価伝達関数が求められたので、 $x_{11}(s, r)$ に表3で与えた u 関数を代入すると、次式を得る。

$$x_{11}(s, r) = e^{-3r-2s} (0.68e^{-40.1r-11.25s} + 0.14e^{-38.1r-11.25s} - \frac{0.048e^{-39.1r-12.15s}}{-1+0.2e^{-3r-3s}} - \frac{0.95e^{-0.1r-0.25s} (-0.024e^{-44.1r-14.25s} + 0.12e^{-41r-12s})}{-1+0.04e^{-2.7r-2.5s} + 0.2e^{-3.1r-2.25s}}) \quad (23)$$

式(23)に $s = 0$ と $r = 0$ を代入すると、ノード1からスタートしてノード11に到達する確率が得られる。

$$x_{11}(s, r) \Big|_{s=0, r=0} = 1 \quad (24)$$

さらに、ノード1からスタートしてノード11に到達するまでの期待完了時間 μ_1 と期待完了コスト μ_2 を求めると、次の値が得られる。

$$\mu_1 = -\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{x_{11}(s, r)}{x_{11}(0, 0)} \right] \bigg|_{r=0} \bigg|_{s=0} = 13.49 \text{ [期間]} \quad (25)$$

$$\mu_2 = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{x_{11}(s, r)}{x_{11}(0, 0)} \right] \bigg|_{s=0} \bigg|_{r=0} = 42.95 \text{ [\$]} \quad (26)$$

Elmaghraby⁽⁶⁾が計算した μ_1 と μ_2 の値は $\mu_1 = 13.51$ と $\mu_2 = 43$ で、式(25)と式(26)の値と一致した。また、完了時間の分散 ν_1 と完了コストの分散 ν_2 は、次の値となる。

$$\nu_1 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[\frac{x_{11}(s, r)}{x_{11}(0, 0)} \right] \bigg|_{r=0} \bigg|_{s=0} - \mu_1^2 = 0.5094 \quad (27)$$

$$\nu_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\frac{x_{11}(s, r)}{x_{11}(0, 0)} \right] \bigg|_{s=0} \bigg|_{r=0} - \mu_2^2 = 0.9762 \quad (28)$$

つぎに、ノード1からスタートしてノード11に到達するまでに完了する時間とコストの確率分布を、式(23)について級数展開から求める。

完了時間の確率分布は、式(23)の右辺に $r=0$ を代入し、各分数を級数10項まで展開して整理すると得られる⁽⁷⁾。

$$\begin{aligned} x_{11}(s, 0) = & 0.82e^{-13.25s} + 0.048e^{-14.15s} + 0.114e^{-14.25s} \\ & + 0.00456e^{-16.75s} + 0.0096e^{-17.15s} + 0.000912e^{-19s} \\ & + 0.0001824e^{-19.25s} + 0.00192e^{-20.15s} + 0.0001824e^{-21.25s} \\ & + 0.00007296e^{-21.5s} + 7.296 \times 10^{-6}e^{-21.75s} \\ & + 0.000384e^{-23.15s} + 0.00003648e^{-23.5s} \\ & + 0.000021888e^{-23.75s} + 4.3776 \times 10^{-6}e^{-24s} \\ & + 2.9184 \times 10^{-7}e^{-24.25s} + 7.296 \times 10^{-6}e^{-25.75s} \\ & + 5.8368 \times 10^{-6}e^{-26s} + 0.0000768e^{-26.15s} \\ & + 1.75104 \times 10^{-6}e^{-26.25s} + 2.33472 \times 10^{-7}e^{-26.5s} \\ & + 1.16736 \times 10^{-8}e^{-26.75s} + 1.4592 \times 10^{-6}e^{-28s} + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

式(29)から完了時間の確率分布が得られ、表4と図7に示す。同様に、コストの確率分布は式(23)に $s=0$ を代入し、各分数を級数10項まで展開して整理すると得られる。

$$\begin{aligned} x_{11}(0, r) = & 0.14e^{-41.1r} + 0.04e^{-42.1r} + 0.68e^{-43.1r} \\ & + 0.114e^{-44.1r} + 0.0096e^{-45.1r} + 0.00456e^{-46.8r} \\ & + 0.00192e^{-48.1r} + 0.00018e^{-49.5r} \\ & + 0.0009e^{-49.9r} + 0.000384e^{-51.1r} \\ & + 7.296 \times 10^{-6}e^{-52.2r} + 0.00007296e^{-52.6r} \\ & + 0.0001824e^{-53r} + 0.0000768e^{-54.1r} \\ & + 2.9184 \times 10^{-7}e^{-54.9r} + 4.3776 \times 10^{-6}e^{-55.3r} \\ & + 0.000021888e^{-55.7r} + 0.00003648e^{-56.1r} \\ & + 0.00001536e^{-57.1r} + 1.16736 \times 10^{-8}e^{-57.6r} \\ & + 2.33472 \times 10^{-7}e^{-58r} + 1.75104 \times 10^{-6}e^{-58.4r} \\ & + 5.8368 \times 10^{-6}e^{-58.8r} + 7.296 \times 10^{-6}e^{-59.2r} \end{aligned} \quad (30)$$

式(30)からコストの確率分布が得られ、表5と図8に示す。

第二の例は、各アクティビティの所要時間と所要コストが指数分布に従うと仮定する。すなわち、確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(x) = \mu \exp(-\mu x) \quad x \geq 0 \quad (31)$$

式(31)の μ は、正の数とする。パラメータの組（アクティビティが実施される確率、平均所要時間[期間]、平均所要コスト[\$]）は表2と同じ数値を使用し、 u 関数を表6に示す。

つぎに、式(22)に表6の u 関数を代入すると次式が得られる。

Table 4 Probability distribution of completion time

Completion time[period]	Probability
13.25	0.82
14.15	0.048
14.25	0.114
16.75	0.00456
17.15	0.0096
19.00	0.00091
19.25	0.00018
20.15	0.00192
21.25	0.00018
21.50	0.00007
21.75	0.00001
23.15	0.00038
23.50	0.00004
23.75	0.00002
25.75	0.00001
26.00	0.00001
26.15	0.00008
29.15	0.00002
計	0.99999

Table 5 Probability distribution of completion cost

Completion cost[\$]	Probability
41.1	0.14
42.1	0.048
43.1	0.68
44.1	0.114
45.1	0.0096
46.8	0.00456
48.1	0.00192
49.5	0.00018
49.9	0.00091
51.1	0.00038
52.2	0.00001
52.6	0.00007
53.0	0.00018
54.1	0.00008
55.7	0.00002
56.1	0.00004
57.1	0.00002
58.8	0.00001
59.2	0.00001
計	0.99999

Fig. 7 Probability distribution of completion time (Constant)

Fig. 8 Probability distribution of completion cost (Constant)

Table 6 U function (Exponential distribution)

$u_a = 1/((1+10s)(1+35r)), u_b = 0.8 \cdot 1/((1+s)(1+5r)),$
$u_c = 0.2 \cdot 1/((1+s)(1+3r)), u_d = 0.15 \cdot 1/((1+s)(1+r)),$
$u_e = 0.85 \cdot 1/((1+0.25s)(1+0.1r)),$
$u_f = 0.7 \cdot 1/((1+0.25s)(1+0.1r)),$
$u_g = 0.3 \cdot 1/((1+0.9s)(1+r)), u_h = 0.05 \cdot 1/((1+2s)(1+25r)),$
$u_i = 0.95 \cdot 1/((1+0.25s)(1+0.1r)), u_j = 1/((1+0.25s)(1+0.1r)),$
$u_k = 0.8 \cdot 1/((1+0.25s)(1+0.1r)),$
$u_l = 0.2 \cdot 1/((1+0.25s)(1+0.1r)),$
$u_m = 0.8 \cdot 1/((1+0.25s)(1+0.1r)), u_n = 0.2 \cdot 1/((1+2s)(1+2r)),$
$u_o = 1/((1+s)(1+r)), u_q = 1/((1+2s)(1+3r))$

$$x_{11}(s, r) = -\frac{1}{(1+3r)(1+2s)} \left[\begin{aligned} & \frac{0.14}{(1+0.1r)(1+3r)(1+35r)(1+0.25s)(1+s)(1+10s)} - \\ & \frac{0.68}{(1+0.1r)(1+5r)(1+35r)(1+0.25s)(1+s)(1+10s)} + \\ & \frac{0.048}{(1+0.1r)(1+r)(1+3r)(1+35r)(1+0.25s)(1+0.9s)(1+s)(1+10s)} + \\ & \left\{ -1 + \frac{0.2}{(1+r)(1+2r)(1+s)(1+2s)} \right\} \\ & 0.95 \left[\frac{0.12}{(1+r)(1+5r)(1+35r)(1+s)^2(1+10s)} - \right. \\ & \quad \left. \frac{0.024}{(1+0.1r)(1+r)(1+3r)(1+5r)(1+35r)(1+0.25s)(1+s)^2(1+2s)(1+10s)} \right] \\ & \frac{0.04}{(1+0.1r)(1+0.25s)} \left[-1 + \frac{0.04}{(1+0.1r)^2(1+2.5r)(1+0.25s)^2(1+2s)} + \frac{0.2}{(1+0.1r)(1+3r)(1+0.25s)(1+2s)} \right] \end{aligned} \right] \quad (32)$$

式(32)に $s=0$ と $r=0$ を代入すると、ノード 1 からスタートしてノード 11 に到達する確率が求められる。

$$x_{11}(s, r) \Big|_{s=0, r=0} = 1 \quad (33)$$

さらに、ノード 1 からスタートしてノード 11 に到達するまでの期待完了時間と期待完了コストを求めると、次の値が得られる。

$$\mu_1 = -\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{x_{11}(s, r)}{x_{11}(0, 0)} \right] \Big|_{r=0} \Big|_{s=0} = 13.49 \text{ [期間]} \quad (34)$$

$$\mu_2 = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{x_{11}(s, r)}{x_{11}(0, 0)} \right] \Big|_{s=0} \Big|_{r=0} = 42.95 \text{ [\$]} \quad (35)$$

また、完了時間の分散 v_1 とコストの分散 v_2 は、次の値となる。

$$v_1 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[\frac{x_{11}(s, r)}{x_{11}(0, 0)} \right] \Big|_{r=0} \Big|_{s=0} - \mu_1^2 = 105.85 \quad (36)$$

$$v_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\frac{x_{11}(s, r)}{x_{11}(0, 0)} \right] \Big|_{s=0} \Big|_{r=0} - \mu_2^2 = 1257.10 \quad (37)$$

Fig.9 Probability distribution of completion time (Exponential distribution)

Fig.10 Probability distribution of completion cost (Exponential distribution)

ノード1からスタートしてノード11に到達するまでに完了する時間とコストの確率分布をラプラス逆変換から求める。

完了時間の確率分布については式(32)の右辺に $r=0$ を代入し、ラプラス逆変換すると図9を得る。

完了コストの確率分布については式(32)の右辺に $s=0$ を代入し、ラプラス逆変換すると図10を得る。

式(12)～式(21)を連立して解くことから始めて、式(37)までの記号計算、数値計算および図9と図10の作成は、数式処理ソフトウェア *Mathematica 7.0* (Wolfram Research) を使用した。

4. 結 言

GERT ネットワークモデルとして作成されたプロジェクトの問題に対して、各アクティビティの所要時間とコストが一定または確率分布に従う場合、解析的に解き、計算から完了時間の期待値と分散、分布とそれらの形状を求める演算過程は、手計算では極めて困難になる。本研究では、プロジェクトとして小規模の電気機器生産工程を取り上げ、はじめに基本式をシグナルフロー理論から導き、つぎに連立方程式、式の代入、微分の演算処理を数式のまま記号計算を行い、モデルの評価値を順次計算するために、数式処理ソフトウェアの1つである *Mathematica* で実行することを提案した。また、電気機器生産工程を評価する際に、電気機器製品の完了時間と完了コストの期待値に加えて、それらのばらつきが重要と考えて分散を求めた。さらに、完了時間と完了コストの分布とそれらの形状を求めた。本研究では、GERT ネットワークモデルの問題の解析と数値計算に対して、数式処理ソフトウェアを活用することにより、式の演算過程の正確さと計算時間の短縮について、それらの有効性を、実用性の観点から確認した。他に、適用可能な数式処理ソフトウェアとして *Reduce*, *Maple*, *Derive* などが挙げられる。大規模な GERT ネットワークモデル問題に対しても、各ノードについて式を導き、本研究で提案した同様の手順を踏み、数式処理ソフトウェアを活用して解決できる見通しを可能にした。アクティビティの所要時間とコストが一定と各種確率分布が混在した GERT ネットワークモデルを解析的に解き、逆変換から完了時間および完了コストの分布とそれらの形状を求める問題については今後の検討課題とする。

文 献

- (1) Pritsker, A. A. B., GERT: Graphical Evaluation and Review Technique, Memorandum RM-4973 -NASA, The Rand Corporation (1966), pp.1-4.
- (2) 森村英典, 牧野都治, 真壁肇, 杉山高一, 統計・OR 活用事典, (1984), p.292, 東京書籍.
- (3) 加瀬滋男監訳 (Elmaghraby, S. E.), アクティビティネットワーク, (1979), pp.287-294, 日刊工業新聞社.
- (4) 山城光雄, “各種確率分布を用いた GERT によるネットワークモデルの解析”, 日本経営工学会論文誌, Vol.59, No.3, (2008), pp.260-268.
- (5) 北岡正敏, 西尾修, 徳丸英勝, “大規模 GERT ネットワークの計算に関するグラフ理論による考察”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.49, No.445(1983), pp.1614-1623.

- (6) Elmaghraby, S. E., Some Network Models in Management Science, Springer-Verlag(1970), pp.166-171.
 - (7) Ahmad, S. H. and Aldabbagh, M. H., Development of GERT Model for Precommissioning/commissioning of Water Treatment Plant, *International Journal of Systems Science*, Vol.27, No.1(1996), pp.11-15.
 - (8) Barjis, J., Business Processes Modeling and Analysis Using GERT Networks, *International Conference on Enterprise Information Systems*(1999), pp.748-758.
 - (9) Cates, G.R., Improving Project Management with Simulation and Completion Distribution Functions, A dissertation submitted for the Ph. D degree at the University of Central Florida(2004), p.28.
 - (10) 山城光雄, “GERT ネットワークモデルにおけるプロジェクトの所要時間分布とコスト分布”, 足利工業大学研究集録, Vol.43, (2009), pp.62-66.
 - (11) 柳井浩, Z 変換とその応用, (1988), pp.59-65, 日科技連.
 - (12) 一松信, 解析学序説, 上巻, (1968), p.216, 裳華房.
 - (13) 中村忠, 山本英二, 確率統計, (2002), p.79, サイエンス社.
-