中心距離誤差の運転性能に与える影響の低減を目的とした インボリュート・サイクロイド合成歯形平歯車の設計*

瀬山夏彦*¹, 永村和照*², 池条清隆*³

Design of Involute-Cycloid Composite Tooth Profile Spur Gear to Reduce the Influence of Center Distance Error on Driving Performance

Natsuhiko SEYAMA*¹, Kazuteru NAGAMURA and Kiyotaka IKEJO

*¹ Dept. of Mechanical System Engineering, Graduate School of Hiroshima University
Kagamiyama 1-4-1, Higashi-Hiroshima, Hiroshima, 739-8527, Japan

The involute-cycloid composite tooth profile gear developed by the authors has some advantages against typical involute gear in tooth bending strength, surface durability, and power transmission efficiency. However, it is expected that the involute-cycloid composite tooth profile gear is sensitive to center distance error since this tooth profile includes cycloid part. In this study, we calculated the tooth root stress and tooth contact stress of involute-cycloid composite tooth profile spur gears with changing center distance and some design parameters which define the tooth profile. Then we have searched design parameters which reduce the influence of center distance error.

Key Words : Machine Element, Gear, Design, Non-Involute Gear, Involute-Cycloid Composite Tooth Profile, Tooth Root Stress, Contact Stress

1. 緒 言

著者らは、従来のインボリュート歯形よりも強度の優れた歯形として、インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車を開発した。そして、このインボリュート・サイクロイド合成歯形歯車がインボリュート歯車よりも、歯元曲げ強度、歯面強度、伝達効率に優れていることを確認した⁽¹⁾⁻⁽³⁾。しかしインボリュート・サイクロイド合成歯形歯車は、サイクロイド歯形をその歯形曲線の一部に含んでいるため、組み立て時の誤差などによって中心距離に誤差が生じると、かみ合いの状態がそれによって大きく影響されると推測される。このことは、インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車を使用する際の障害になると考えられる。そこで本研究では、この影響を低減するための設計パラメータ選定方法を探ることを目的とした。インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車の歯形を決定するパラメータである、ピッチ点における圧力角、転がり円半径、歯たけを変化させ、それぞれの場合において、中心距離誤差がある場合の歯元応力波形を計算によって求め、中心距離誤差による歯元応力波形の変化が少ない設計パラメータの組み合わせを調査した。

2. インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車

図 1 にインボリュート・サイクロイド合成歯形歯車の歯形とそのラックを示す。インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車は、サイクロイド歯形をもとに開発されたものである。サイクロイド歯形は歯のかみ合いを凹面と凸面の接触とすることができ、また歯元が末広がり状の形状となることから歯元の歯厚を大きくできるため、インボリュート歯形と比べ曲げ強度・歯面強度の面で有利と考えられた。しかし、サイクロイド歯形は、ピッチ

* 原稿受付 2010 年 8 月 13 日

*¹ 正員, 広島大学大学院工学研究科 (〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1)

*² 正員, フェロー, 広島大学大学院工学研究院

*³ 正員, 広島大学大学院工学研究院

E-mail: natsu5summer@hiroshima-u.ac.jp

Fig. 1 Involute-cycloid composite tooth profile gear

点において歯面の曲率半径が理論上 0 となり、ピッチ点における歯面強度に難点がある。そこで、インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車は、ピッチ点付近をインボリュート曲線で置き換え、この短所の克服を狙ったものである。図 1(b)の基準ラックにおいて $\overline{PQR}$ は直線であり、 $\overline{P'QR'}$ はサイクロイド曲線を示す。二つの線は点 Q で滑らかに接続され、曲線 $\overline{PQR}$ がインボリュート・サイクロイド合成歯形の基準ラックとなる。直線 $\overline{PQR}$ の式は、 α_0 をピッチ点における圧力角とすると、以下で表される。

$$y = \frac{x}{\tan \alpha_0} \quad (1)$$

一方、サイクロイド曲線 $\overline{P'QR'}$ は、 a を転がり円半径、 θ を転がり円回転角とすると、以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x &= a(\theta - \sin \theta) + X_0 \\ y &= a(1 - \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、サイクロイド曲線の x 軸方向の移動量 X_0 と接合点 Q の y 座標 Y_0 は、直線とサイクロイド曲線が滑らかに接合する条件から、以下のように表される。

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= 2a \operatorname{inv} \alpha_0 \\ Y_0 &= a \{1 - \cos(2\alpha_0)\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

本研究のインボリュート・サイクロイド合成歯形歯車はホブ切りで製作できるため、専用のホブを必要とする以外はインボリュート歯車の製作工程と大きく変わることはないため、製作は困難ではない。

3. 計算方法

本研究では歯車のかみ合い状態を調べるために、歯車の静的歯元曲げ応力と接触応力を、かみ合い時の歯の荷重分担率を考慮して計算するプログラムを制作した。図 2 にこのプログラムを用いた計算の流れを示す。まず、歯車の諸元と中心距離誤差をデータとして入力し、そして、歯車の回転角から幾何学的に正しい歯車のかみ合い位置を求めた。次に、中心距離誤差の影響を検討するため、中心距離誤差により発生する歯車の回転角誤差を、歯車の幾何学的形状から理論的に解析する方法⁽⁴⁾を用いて計算した。続いて、歯を 5 つの台形に近似して歯のたわみを求め、先に求めた歯車の回転角誤差を考慮して荷重分担率を計算した。そして、歯形曲線の式から接触位置における相対曲率半径を求め、荷重分担率も考慮して Hertz の接触応力を求めた。また、圧縮側歯元の実応力計算式である会田・小田の式⁽⁵⁾と同様な式を使用して歯元曲げ応力を計算した。このように、歯元曲げ応力と接触応力は荷重分担率を使用して計算するため、中心距離誤差が歯元曲げ応力と歯面接触応力に与える影響を求めることができる。以上の計算を、注目する歯対のかみ合いが終わるまで歯車を少しずつ回転させながら繰り返し、

理論歯元応力波形と理論接触応力波形を得た。図3は、本計算の妥当性を確認するために行った、実験で測定された歯元応力と、この歯車対の諸元と歯形誤差、中心距離誤差を入力して計算した歯元応力の比較結果である。計算は静的なモデルにより行っているため実験結果のようなかみ合いによる振動はみられないが、それを除いては両者の結果は非常によく一致している。表1に本研究で計算した歯車対の諸元を示す。表1に示したように、計算は転がり円半径、ピッチ点における圧力角、歯たけを順次変化させて行った。これら3つのパラメータはインボリュート・サイクロイド合成歯形歯車の歯の形状を決定するため、本研究ではこれらのパラメータを変化させながら計算を行うこととした。また、中心距離が設計値($A=116.00\text{mm}$)の場合、設計値より小さい場合、設計値より大きい場合についても計算を行い、歯元応力および接触応力の波形の変化を調べた。こうして、中心距離を変化させても、歯元応力波形や接触応力波形の変化が少ない転がり円半径、ピッチ点における圧力角、歯たけの値の組み合わせを調べた。ところで、インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車では、転がり円半径 a を $a \leq m/4$ とする必要がある。これは歯元サイクロイド曲線の性質によるもので、 $a = m/4$ になると歯元サイクロイド部分が

Table 1 Gear specifications and conditions for calculation

Calculation condition	Calc.1	Calc.2	Calc.3
Tooth profile	Involute-cycloid composite		
Module m [mm]	4		
Number of teeth z_1/z_2	29/29		
Rolling circle radius a [mm]	variable	7.0	
Pressure angle* α_o [deg]	13	variable	13
Addendum h_a [mm]	$1.2m$		variable
Dedendum h_d [mm]	$1.4m$		$h_a+0.2m$
Face width b [mm]	10.0		
Center distance A [mm]	116.0		
Pitch circle diameter d [mm]	116.0		
Material (Driving/Driven)	Steel/Steel		
Load torque T [Nm]	40		

*Value at pitch point

Fig. 2 The flow of the calculation program

 Fig. 3 Example of calculation result (Load torque $T=40\text{Nm}$)

直線となる⁽⁶⁾。本研究では、想定する最小歯数を $z_{\min}=15$ としており、モジュール $m=4\text{mm}$ であるから、転がり円半径は $a<15\text{mm}$ である必要がある。

4. 計算結果と考察

4・1 転がり円半径と中心距離誤差が歯元応力波形に与える影響

図4は転がり円半径を変化させたとき、中心距離 $A=116.10\text{mm}$ (設計値よりも大きい)、 $A=116.00\text{mm}$ (設計値)、 $A=115.95\text{mm}$ (設計値よりも小さい) の場合の歯元曲げ応力波形である。このように、インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車は、中心距離が設計値よりも大きいとかみ合い率が急激に減少する。一方、中心距離が設計値よりも小さい場合には歯元応力波形が、かみ合い開始直後、ピッチ点付近、かみ合い終了直前の3つに分離し、また最大歯元曲げ応力も大きくなる。これは1つの歯に注目すると、かみ合いの途中で歯面が離れて歯元応力が0となり、その後再び歯面が接触して荷重を受け持っていることを示している。この状態を指して以下本論文では「不連続なかみ合い」と呼ぶこととする。不連続なかみ合いにおいて、歯面が離れている間の荷重伝達はこの歯の1ピッチ前、あるいは後ろの歯が担当しているため、歯車全体でみれば荷重の伝達が中断することはなく、歯車の運転は可能であるが、荷重を受け持つ歯が頻繁に変わることによって騒音や振動が大きくなり、また最大歯元応力も急増する。このように、中心距離誤差がもたらす歯元応力波形の変化は歯車の強度、静粛性にとって不利であり、中心距離に誤差がある場合においてもかみ合い率の低下や、不連続なかみ合いの発生が避けられることが望ましい。また図4をみると、転がり円半径が小さいほど、中心距離が設計値よりも大きい際のかみ合い率低下や、また設計値よりも中心距離が小さい場合のかみ合いの不連続が端的に現れていることがわかる。中心距離が設計値よりも大きく、転がり円半径 $a=10\text{mm}$ 以下の場合では、かみ合い率がほぼ1となって2対かみ合い部分がほとんどみられないのに対し、 $a=10\text{mm}$ よりも大きい場合は2対かみ合い部分が現れ、かみ合い率の低下がある程度軽減されている。また、中心距離が設計値よりも小さい場合、転がり円半径が小さいときには応力波形が3つに分離してかみ合いの不連続が起きるが、転がり円半径 $a=13\text{mm}$ とした場合では、歯元応力波形に谷はみられるものの、応力が0となる部分は存在せず、かみ合いの不連続を避けることができることがわかる。また、図5は中心距離(設計値 $A=116.0\text{mm}$)を変化させたときのかみ合い率の変化を表したものである。図5の各曲線の左

Fig. 4 Influence of center distance A and rolling circle radius a on tooth root stress (Load torque $T=40\text{Nm}$, calculation)

Fig. 5 Influence of center distance A and rolling circle radius a on contact ratio ε (Load torque $T=40\text{Nm}$, calculation)

端よりも左側（中心距離がより小さい）範囲では不連続なかみ合いが発生するため正常なかみ合いではなく、かみ合い率を示すことはできない。また図5をみると、転がり円半径が大きいほど不連続なかみ合いが発生する領域が設計値（ $A=116.0\text{mm}$ ）から離れていることがわかる。これは、転がり円半径を大きく取ったほうが歯元応力波形が中心距離誤差の影響を受けにくくなることを示している。また、どの中心距離であっても、転がり円半径が大きいほどかみ合い率が大きくなるため、中心距離が設計値よりも大きいときに発生するかみ合い率の低下をある程度緩和することができる。したがって、図4,5の結果を総合すると、中心距離誤差による歯元応力波形の変化の影響を避けるためには、大きな転がり円半径を用いることが望ましいといえる。ただし、歯元サイクロイド曲線の性質から、転がり円半径は $a < zm/4$ とする必要があるので、設計時に想定される最小歯数とモジュールによって、取りうる転がり円半径の大きさには上限がある。

4・2 圧力角と中心距離誤差が歯元応力波形に与える影響

図6は中心距離が設計値よりも大きい、設計値と等しい、設計値よりも小さい、の3つの場合について、ピッチ点における圧力角 α_0 を変化させたときの歯元曲げ応力の変化を示す。転がり円半径を変化させた図4の場合とは異なって、ピッチ点における圧力角を変化させても、歯元応力波形はほとんど変化しなかった。また図7は不連続なかみ合いが発生しない範囲での中心距離とかみ合い率の関係を示している。図5と同様に各曲線の左端のプロット点よりも中心距離が小さい場合、不連続なかみ合いが発生する。図7をみると、ピッチ点における圧力角 α_0 がいずれの場合でもかみ合い率と中心距離の関係はほぼ同じであり、圧力角 α_0 を変化させてもかみ合い率はほとんど変化しないことがわかる。インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車は前述のとおり、インボリュート歯形部分とサイクロイド歯形部分の2つの歯形からなっている。ピッチ点における圧力角は、このうちインボリュート歯形部分の形状を決定する。前節で変化させた転がり円半径がサイクロイド歯形部分の形状を決定することと考え合わせると、中心距離誤差による歯元応力波形への影響は、サイクロイド部分の形状を決定する設計パラメータに支配されていると考えられる。

4・3 歯たけと中心距離誤差が歯元応力波形に与える影響

前節までの考察によって、中心距離誤差による歯元応力波形への影響を低減するには、サイクロイド歯形部分

Fig. 6 Influence of center distance A and pressure angle α_0 at pitch point on tooth root stress (Load torque $T=40\text{Nm}$, calculation)

Fig. 7 Influence of center distance A and pressure angle α_0 at pitch point on contact ratio ϵ (Load torque $T=40\text{Nm}$, calculation)

を支配する設計パラメータに注意すればよいことがわかった。歯たけは歯全体の丈を決定すると同時にサイクロイド歯形部分の長さにも影響するため、歯元応力波形に何らかの影響があると予想される。図8は中心距離が設計値よりも大きい、設計値と等しい、設計値よりも小さい、の3つの場合について、歯たけを変化させたときの歯元応力の計算結果である。中心距離が設計値 ($A=116.00\text{mm}$) よりも大きい場合 ($A=116.10\text{mm}$)、予測に反して、歯たけによるかみ合い率への影響はまったくみられなかった。これは、かみ合いが歯たけの中央付近で起きているため、歯先と歯元の部分が延長、縮小されてもかみ合い率には影響しなかったためと考えられる。一方、中心距離が設計値よりも小さい場合 ($A=115.95\text{mm}$) は、歯たけによって応力波形が変化する様子がみられた。歯たけが低い場合、かみ合いの不連続は解消されないが、かみ合いが行われず、すなわち歯元応力が0となる部分の範囲は狭くなっている。これは、中心距離が設計値よりも大きい場合の結果と考え合わせると、サイクロイド歯形部分のうち、歯先および歯元付近の形状が中心距離誤差による歯元応力波形の変化に影響を及ぼすことを示唆していると考えられる。図9は、不連続なかみ合いが発生しないときの中心距離とかみ合い率の関係を、歯たけを変えて示したものである。図9をみると中心距離が設計値 ($A=116.0\text{mm}$) 近傍では、歯たけが大きいほどかみ合い率は大きくなるが、中心距離が設計値よりも大きい場合には、歯たけを変えてもかみ合い率にほとんど違いはみられない。このように歯たけの変化は、歯元応力波形に多少の影響を与えるが、図4,5に示した転がり円半径を変化させた場合のような歯元応力の大きな変化はみられなかった。

4.1~4.3節の考察より、中心距離誤差による歯元応力波形への影響を低減するには、転がり円半径を大きめにすることが望ましく、一方、ピッチ点における圧力角は、中心距離誤差の影響軽減にはまったく貢献しないといえる。また、歯たけも、中心距離が設計値より大きい場合、歯元応力波形の改善にはまったく寄与しない。

5. 転がり円半径の歯の強度に及ぼす影響

前章の結果から、中心距離誤差がもたらすインボリュート・サイクロイド合成歯形歯車の歯元応力波形への影響を低減するためには、転がり円半径を大きく設計することが望ましいことがわかった。しかし、転がり円半径を大きく設計することが歯の強度にどのように影響するのか確認しておく必要がある。そこで、中心距離が設計値と等しい場合 ($A=116.00\text{mm}$) について、歯元曲げ応力、歯面接触応力と転がり円半径の関係について調べた。図10は転がり円半径を変化させたときの最大歯元曲げ応力の計算結果である。この図のように、転がり円半径が

Fig. 8 Influence of center distance A and whole depth h on tooth root stress (Load torque $T=40\text{Nm}$, calculation)

Fig. 9 Influence of center distance A and whole depth h on contact ratio ε (Load torque $T=40\text{Nm}$, calculation)

極端に小さいと、最大曲げ応力は非常に大きくなる。図 11 に示す、転がり円半径を変化させたときの歯元曲げ応力波形の計算結果をみると、転がり円半径が極端に小さい場合、二対かみ合いから一対かみ合いへの移行時に大きな曲げ応力のピークが発生していることがわかる。また、かみ合い率も低下しており、小さな転がり円半径を選択することは中心距離誤差の影響を受けやすくなるだけでなく、歯の曲げ強度の面においても不利になることがわかる。一方、転がり円半径を大きくした場合、最大歯元曲げ応力は若干増えるものの、その変化は小さい。また、図 10 に示した最大歯元曲げ応力は、転がり円半径が極端に小さい場合を除いて、インボリュート歯車（かみ合い率が同じ場合）よりも小さく、インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車の曲げ強度は高い。図 12 は転がり円半径を変化させた場合の最大接触応力の変化を示しており、かみ合いにともなう接触応力の変化の波形を図 13 に示す。図 12 によれば最大接触応力は転がり円半径の影響をほとんど受けない。この理由は、図 13 に示すように、最大接触応力はピッチ点付近、すなわちインボリュート歯形部分のかみ合いで発生しており、サイクロイド部分の形状を決定する転がり円半径の大きさには影響されないためと考えられる。なお、図 12 に示した最大接触応力は標準的なインボリュート歯形歯車の値に比べて大きい。これは、インボリュート部分の基準圧力角 ($\alpha_0=13^\circ$) が標準インボリュート歯車のそれ ($\alpha_0=20^\circ$) と比べて小さいため、インボリュート部分の曲率半径が小さくなっていることが原因である。しかし、ピッチ点よりやや歯元側の、ピッチングがもっとも発生しやすい領域はサイクロイド歯形領域であり接触応力も低いため、インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車は、インボリュート歯車よりも耐ピッチング性能が優れている⁽²⁾。

Fig.10 Influence of rolling circle radius a on maximum tooth root stress (Load torque $T=40\text{Nm}$, calculation)

Fig.11 Influence of rolling circle radius a on tooth root stress wave form (Load torque $T=40\text{Nm}$, calculation)

Fig.12 Influence of rolling circle radius a on maximum tooth contact stress (Load torque $T=40\text{Nm}$, calculation)

Fig.13 Influence of rolling circle radius a on tooth contact stress wave form (Load torque $T=40\text{Nm}$, calculation)

Fig.14 Tooth form of involute-cycloid composite tooth profile gear

以上より、中心距離誤差の歯元応力波形への影響を低減するために転がり円半径を大きく設計することは、歯の曲げ強度、歯面強度に対して不利に働くことはないことがわかった。図 14(a)に、各設計パラメータに標準的な値を使用したインボリュート・サイクロイド歯形を示し、図 14(b)には $m=4\text{mm}$, $z=29$ の条件下で、3 章で述べた転がり円半径の上限値をとった場合の歯形を示す。図 14(b)の歯形では、歯元サイクロイド部分が直線となり、歯元の歯厚がやせているのがわかる。3 章で述べたとおり、最小歯数を $z_{\min}=15$ と想定すると、この場合転がり円半径は $a<15\text{mm}$ でなければならない。図 14(c)に、本研究で計算を行った中で、最も中心距離誤差の歯元応力波形への影響が少なかったインボリュート・サイクロイド合成歯形歯車の歯形を示す。図 14(c)の歯形の転がり円半径 $a=13\text{mm}$ は、上述の $a<15\text{mm}$ の条件を満足しており、また図 10, 12 をみると、最大歯元応力、最大接触応力が最小値とはいえないが、応力値に大きな差はないため強度上からも満足できる諸元といえる。図 14(c)の歯車諸元においてかみ合い率 $\varepsilon>1.1$ で、かつ不連続なかみ合いが起こらないことを中心距離誤差の許容条件とすると、中心距離 A の設計値が 116.00mm の場合、 $-0.05\sim+0.20\text{mm}$ の範囲 ($A=115.95\sim116.2\text{mm}$) で中心距離誤差を許容することができる。図 14(a)と(c)のそれぞれの歯形を比べると、図 14(c)の歯形は、転がり円半径を大きくしたことで歯先と歯元付近で歯形の曲率が緩やかになっていることがわかる。

6. 結 言

本研究では、インボリュート・サイクロイド合成歯形平歯車の実用性向上を目的として、かみ合い状態が中心距離誤差に影響されにくくなるような設計パラメータの選定方法を調べた。このため、インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車の歯元応力と接触応力を求めるプログラムを制作し、歯の形状に関わる 3 種類の設計パラメータと中心距離を変化させながら歯元応力と接触応力を計算し、中心距離誤差および設計パラメータが歯元応力波形に与える影響について考察した。本研究によって得られた結論を以下に示す。

- (1) インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車において、中心距離が設計値よりも大きい場合はかみ合い率が急激に低下し、中心距離が設計値よりも小さい場合はかみ合いに不連続が起こる。
- (2) 中心距離誤差に起因する歯元応力波形の変化を低減するには、 $a < zm/4$ の範囲で転がり円半径を大きくすることが効果的である。
- (3) ピッチ点における圧力角を変化させても、中心距離誤差に起因する歯元応力波形の変化を小さくすることはできない。
- (4) 歯たけの大きさは、中心距離が設計値よりも小さい場合には歯元応力波形にわずかに影響するが、中心距離が設計値よりも大きい場合はまったく影響しない。
- (5) 転がり円半径を大きく設計しても、歯の曲げ強度、歯面強度に対して悪影響を与えない。

文 献

- (1) Terauchi, Y., and Nagamura, K., Saijo, H., “On Design and Performance of Involute-cycloid Composite Tooth Profile Gear”, *Bull. JSME*, Vol.25, No.199 (1982), pp.118-126.
 - (2) 寺内喜男, 永村和照, 西條博光, “インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車の歯面強度について”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 47, No. 420 (1981), pp. 1082-1089.
 - (3) Ikejo, K., Nagamura, K., and Tutulan, F. G., “Friction Loss of Non-Involute Tooth Profile Gears”, *Proceedings of the ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (IDETC / CIE 2005)*, ASME (2005-9), ASME Paper No. DETC2005-84148, (CD-ROM).
 - (4) 永村和照, 池条清隆, 伊崎浩一, Tutulan, F. G., “インボリュート・サイクロイド合成歯形歯車の中心距離誤差と運転性能”, 日本機械学会第 3 回機素潤滑設計部門講演会講演論文集, No. 03-03 (2003-4), pp. 57-60.
 - (5) 会田俊夫, 小田哲, 田村喜昭, “歯車の曲げ疲れる強さに関する研究 (第 8 報, 歯の圧縮側応力計算式と運転時の歯元応力)”, 日本機械学会論文集, Vol.33, No.252 (1967), pp.1321-1330.
 - (6) 近畿歯車懇話会編, “<歯車の設計・製作①> 円筒歯車の設計”, 大河出版, (1974), p.47.
-