歯面膜要素による円錐ころ軸受の剛性評価*

中村守正*¹, 河木亮太*², 森脇一郎*¹Stiffness Evaluation of Tapered Roller Bearing
Using Tooth Flank Film ElementsMorimasa NAKAMURA*¹, Ryota KAWAKI and Ichiro MORIWAKI*¹ Kyoto Institute of Technology, Dept. of Mechanical System and Engineering
Goshokaido-cho, Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8585 Japan

In order to permit gear units to have higher performance; e.g., higher efficiency and lower driving noise level, an appropriate tooth contact pattern is required. The tooth contact pattern is affected by the stiffness of bearings, shafts and a gear case. Therefore, it is important in design process of gear units to evaluate the stiffness of these elements precisely. Stiffness of bearings is generally calculated using the method proposed by Harris. However, the stiffness of a tapered roller bearing subject to axial and radial load calculated by the method is different from the our measured one. Thus, the stiffness of tapered roller bearings under axial and radial load was analyzed and evaluated by using Tooth Flank Film Elements (TFFE) for the contact problem. As a result, the change in calculated stiffness by TFFE coincided with measured one especially in large displacement area. Furthermore, the appropriate bearing stiffness was obtained in consideration of the clearance between the inner and outer raceway and the deviation in the diameter of each tapered roller.

Key Words : Bearing, Tapered Roller Bearing, Bearing Stiffness, Hertzian Contact Theory

1. 緒 言

歯車装置には、軽量化、静粛性、動力伝達性といった性能の向上がより一層要求されている。これらの要求を満たすためには、歯車歯面の良好な歯当りが必要であり、歯面形状の最適化が重要である。ただし、歯車装置には歯車対の他に軸、軸受、ハウジングといった機械要素が存在し、それらの歯当たりへの影響は無視できない。各要素の剛性は歯車の組み付けに影響し、それによって発生する組み付け誤差は歯車対の歯当りに影響する。このため、歯面形状の最適化は歯車装置全体を考慮して行う必要がある。歯車装置を構成する要素のうち、軸受に着目すると、軸受剛性評価法については、Harris の剛性評価方法が一般的に用いられている⁽¹⁾。ただし、その方法を用いて深溝玉軸受の剛性評価を行うと、内部隙間によって軸受の剛性は大きく変化する。このことから、深溝玉軸受の剛性を精度良く評価するためには、Harris の剛性評価方法をそのまま用いるだけでは問題があるといえる。そのため、これまでに深溝玉軸受に対して剛性解析方法を検討し、ラジアル方向の内部隙間を考慮することによって精度よく剛性を評価できることを確認した⁽²⁾。

一方、円錐ころ軸受の剛性評価については、円錐どうしの接触問題を考える必要があるが、有限幅の線接触問題は、一般に解くことができない。このため、Harris の剛性評価方法には、Palmgren によるクラウニングの施された有限幅の円筒に関する実験式が適用されている⁽¹⁾。

本研究では、円錐ころ軸受のころと軌道輪の接触問題に対して、これまでに歯車歯面の剛性解析に対する有用性が確認されている歯面膜要素の概念⁽³⁾を適用した。そして、円錐どうしの接触における有限幅の線接触問題を解く必要がない円錐ころ軸受剛性の評価方法の有用性について、実験より得た軸受剛性と比較することで検討した。

* 原稿受付 2010 年 8 月 9 日

*¹ 正員, 京都工芸繊維大学工芸科学部
(〒606-8585 京都府京都市左京区松ヶ崎御所海道町)*² (株)ブリヂストン

E-mail: nakamura@mech.kit.ac.jp

2. 歯面膜要素

歯面膜要素は、歯車歯面の接触問題を有限要素解析するために考案した、厚みおよび質量のない仮要素である。歯面膜要素を、接触面、特に歯車においては歯面に適用する。歯面膜要素は五つの節点を持ち、そのうち四つは四辺形要素の頂点である。残りの一つの節点は四辺形要素の図心上に存在する。頂点である節点は、座標、曲率半径、歯面形状偏差、歯面修正量の情報を有する。要素図心上の節点は、四辺形頂点である節点を持つ情報に加えて、歯面法線ベクトルの情報を有している³⁾。この歯面膜要素を、図1に示すように円錐ころ軸受のころと軌道輪の接触問題に適用した。

Fig.1 Tapered roller with tooth flank film elements

Fig.2 Initial mismatch

初期不整量 δ は、図2に示すように各図心の法線ベクトル上の両接触面間の距離とする。各要素の図心における曲率半径、法線ベクトル、法線ベクトルが相手面と交差する点における曲率半径、また2点間の距離を求め、2物体が接触する場合、この2点間の距離をヘルツの弾性接触理論における中心の近寄り距離とし、接触圧力 $P_{\max}$ 、接触円半径 a を求める。この時、各要素に作用する分布荷重 $P_H(r)$ は式(1)で求められる。

$$\left(\frac{P_H(r)}{P_{\max}} \right)^2 + \left(\frac{r}{a} \right)^2 = 1 \quad (1)$$

ここで、 r は分割された歯面膜要素面内の図心からの距離である。また各要素に作用する荷重は、式(2)で表される。

$$P = \int_{r \leq r_e} P_H(r) dS \quad (2)$$

この時、式(2)の積分範囲 r_e は、式(3)に示す条件に基づいて決定できるものとする。

$$r_e = \begin{cases} a & \text{if } a \leq \sqrt{\frac{S_e}{\pi}} \\ \sqrt{\frac{S_e}{\pi}} & \text{if } a > \sqrt{\frac{S_e}{\pi}} \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 a はヘルツの弾性接触理論より求めた接触円半径、 S_e は分割された歯面膜要素の一要素分の面積である。

3. 解析方法

3・1 円錐ころと外輪，内輪

Fig.3 Inner, outer raceways, and tapered roller

図 3 (a), (b), (c)に、円錐ころ軸受の内輪，外輪，円錐ころの解析に用いた各部寸法をパラメータで示す。図 3 (a)に示す座標系において、内輪表面における任意の点の座標は、

$$\begin{aligned} x_i &= \left\{ \frac{(r_{i2} - r_{i1})t_i}{l_i} + r_{i1} \right\} \sin \phi_i \\ y_i &= t_i \\ z_i &= \left\{ \frac{(r_{i2} - r_{i1})t_i}{l_i} + r_{i1} \right\} \cos \phi_i \end{aligned} \quad (4)$$

で表せる。 t_i 、 ϕ_i はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{d_{i1}}{\tan \alpha_i} \leq t_i \leq \frac{d_{i2}}{\tan \alpha_i} \\ 0 \leq \phi_i \leq 2\pi \end{aligned} \quad (5)$$

で表され、 $d_{i1} = 2r_{i1}$, $d_{i2} = 2r_{i2}$ である。同様にして、外輪表面における任意の点の座標は、

$$\begin{aligned} x_o &= \left\{ \frac{(r_{o2} - r_{o1})t_o}{l_o} + r_{o1} \right\} \sin \phi_o \\ y_o &= t_o \\ z_o &= \left\{ \frac{(r_{o2} - r_{o1})t_o}{l_o} + r_{o1} \right\} \cos \phi_o \end{aligned} \quad (6)$$

で表せる. t_o , ϕ_o はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{d_{o1}}{\tan \alpha_o} \leq t_o \leq \frac{d_{o2}}{\tan \alpha_o} \\ 0 \leq \phi_o \leq 2\pi \end{aligned} \quad (7)$$

で表され, $d_{o1}=2r_{o1}$, $d_{o2}=2r_{o2}$ である.

また図 3(c) のような円錐ころの方程式は, n_j を円錐ころの個数とすると $\phi_j = 2\pi j / n_j$ であり, $j(j=1 \sim n_j)$ 番目のころの方程式は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \phi_j & 0 & \sin \phi_j \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_j & 0 & \cos \phi_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_f & -\sin \alpha_f \\ 0 & \sin \alpha_f & \cos \alpha_f \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_f & 0 & \sin \phi_f \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_f & 0 & \cos \phi_f \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ t_r \\ t_r \tan \alpha_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (d_{r1}/2 + d_{r2}/2)/2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

で表され, t_r , ϕ_r は

$$\begin{aligned} -\frac{l_r}{2} \leq t_r \leq \frac{l_r}{2} \\ 0 \leq \phi_r \leq 2\pi \end{aligned} \quad (9)$$

である.

3・2 剛性解析方法

無荷重の状態, 円錐ころと軌道輪間の内部隙間がゼロとなる位置を初期位置と定義した. 内輪が外輪に対してラジアル方向に δ_r , アキシアル方向に δ_a だけ相対的に変位したとき, 外輪・内輪ところとの初期不整量は, ころが外輪から受ける力と内輪から受ける力のつり合いによって決定されるものとする. 図 4 に, 外輪に対する内輪の相対変位を与えた時の模式図を示す.

円錐ころの歯面膜要素を適用した部分に対して, 式(1)~(3)に基づいて接触範囲を求め, 分割した各要素に作用する荷重の総和から接触面に作用する荷重を求める. このとき内輪ところおよび外輪ところの接触によって生じる力がつり合うように, 軸受の内輪変位に対して内輪ところおよび外輪ところの変位の配分比を決定する. なお, 解析においては, アキシアル荷重, ラジアル荷重条件下において, アキシアル方向, ラジアル方向への並進運動のみを行い, 内輪, ころ, 外輪が無負荷で互いに接していると仮定した. また, ころが内外輪と接触しても中心位置は変化しないものとした. さらに, アキシアル荷重に対しては, 単純なアキシアル荷重に対してはころ

Fig.4 Schematic diagram of tapered roller bearing subject to axial and radial load

が均等に荷重を支持すると仮定した。一方、ラジアル荷重に対しては、ころが隙間なく均等に配置しているものとした。

3・3 初期不整量

歯面膜要素を適用した円錐ころ表面における任意の点 R の座標を

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} X_R \\ Y_R \\ Z_R \end{pmatrix} \quad (10)$$

とする。点 R における法線は、

$$\begin{aligned} X_{nR} &= n_x t + X_R \\ Y_{nR} &= n_y t + Y_R \\ Z_{nR} &= n_z t + Z_R \end{aligned} \quad (11)$$

のように表せる。なお、 n_x, n_y, n_z はそれぞれ点 R における単位法線ベクトル $\mathbf{n}_r$ の x, y, z 成分であり、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_r &= \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi_r}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y_r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi_r} \right|} \end{aligned} \quad (12)$$

として表せる。

点 R における法線が内輪表面と交差する点を R' とし、その座標を

$$\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} X_{R'} \\ Y_{R'} \\ Z_{R'} \end{pmatrix} \quad (13)$$

で表す。点 R' は、内輪表面を表す式を用いると、

$$\begin{aligned} X_{R'} &= \left\{ \frac{(r_{i2} - r_{i1})t_i}{l_i} + r_{i1} \right\} \sin \phi_i \\ Y_{R'} &= t_i + \delta_{ai} \\ Z_{R'} &= \left\{ \frac{(r_{i2} - r_{i1})t_i}{l_i} + r_{i1} \right\} \cos \phi_i \end{aligned} \quad (14)$$

となり、これが点 R の座標と等しいことになる。したがって、初期不整量 δ_{ima} は

$$\delta_{ima} = \sqrt{(X_R - X_{R'})^2 + (Y_R - Y_{R'})^2 + (Z_R - Z_{R'})^2} \quad (15)$$

として表すことができる。この式から得られた初期不整量をヘルツの接触理論に導入し、法線方向の最大接触圧力を求め、歯面膜要素ごとに作用する荷重を求めることができる。

Table1 Bearing data

Number of rollers	N_r	16
Roller diameter(mm)	d_{r1}	7.342
	d_{r2}	8.106
Bearing outside diameter(mm)	d_{o1}	50.0
	d_{o2}	57.0
Bearing bore diameter(mm)	d_{i1}	36.629
	d_{i2}	40.477
Effective length of roller(mm)	l_e	10.136
Effective length of inner ring(mm)	l_i	11.014
Outer ring width(mm)	l_o	14.0
Bearing width(mm)	B	17.25
Cone angle(degree)	α_i	10.03
Cup angle(degree)	α_o	14.03

4. 解析結果

歯面膜要素を用いた解析方法によって、単純ラジアル荷重条件下および単純アキシャル荷重条件下での円錐ころ軸受の剛性評価を行った。円錐ころ軸受の内輪にかかる荷重と内輪の変位の関係を求めた。図5に、ラジアル方向変位なしでの単純アキシャル荷重とアキシャル変位の関係、図6にアキシャル方向変位なしでの単純ラジアル荷重条件の荷重とラジアル変位の関係を示す。

Fig.5 Relationship between axial displacement and axial load

Fig.6 Relationship between radial displacement and radial load

表 1 に、解析に用いた軸受諸元を示す。なお、軸受は 0 級のものをを用いた。図 5 において、歯面膜要素を用いた結果と Harris の手法を用いた結果を比較すると、Harris の手法による結果はアキシャル変位に対して荷重が線形的に増大しているのに対し、歯面膜要素による結果は非線形に増大していることがわかる。特にアキシャル変位が $20\mu\text{m}$ 以下の領域では、非線形な変化が認められる。

一方、図 6 のラジアル荷重、ラジアル変位の計算結果においても、アキシャル変位を与えた場合と同様に、Harris の手法を用いた結果はラジアル変位に対して荷重が線形的に増大しているのに対し、歯面膜要素による結果はわずかに非線形的に増大していることがわかる。

以上のことから、Harris の手法による剛性解析結果と歯面膜要素によるものが異なることがわかった。これらの結果の妥当性を確認するため、アキシャル、ラジアル荷重に対する軸受剛性を実験的に検証した。

5. 実験による解析結果の検証

5.1 アキシャル荷重負荷実験

円錐ころ軸受に対して、アキシャル方向に対する変位を与えるため、実験には図 7 に示すような、段付丸棒を圧縮用治具とし、円板型に穴あけ加工した平板を固定用治具として用いた。圧縮用治具上方から軸受にアキシャル荷重の負荷には、引張圧縮試験機 (AG50kNE, 島津製作所製) を用いて、変位制御にて行った。なお負荷時の軸受の変位を測定するため、図 8 に示すように電子マイクロメータ (K101B, ANRITSU 製) を用いて、変位が $10\mu\text{m}$ 増加するごとにマイクロメータの目盛りを読み取った。なお、電子マイクロメータは、軸受の周囲におよそ 120° 間隔の部位を測定できるように触針を設置した。実験には、解析と同じく表 1 と同じ諸元の円錐ころ軸受を用いた。

Fig.7 Schematic diagram of test rig

Fig.8 Test view

5.2 ラジアル荷重負荷実験

ラジアル荷重を軸受に負荷する実験については、図 9 に示すような治具を用いた。荷重負荷にはアキシャル荷重負荷実験と同様に引張圧縮試験機 (AG50kNE, 島津製作所製) を用いて変位制御にて行った。負荷時の軸受変位を測定するため、図 10 に示すように 2 台の電子マイクロメータを用いた。実験には解析と同じく表 1 と同じ諸元の円錐ころ軸受を用いた。

5.3 結果

図 11 に、実験により得たアキシャル荷重と変位の関係を示す。アキシャル変位約 $50\mu\text{m}$ 以下の領域では非線形的に変化し、それ以上では線形的に変化していることがわかる。また図 5 と比較すると、Harris の方法により求めた軸受剛性よりも、歯面膜要素を用いて求めた軸受剛性の挙動の方が、特にアキシャル変位 $20\mu\text{m}$ 以下の領域においては、実験により得た挙動と一致していることがわかる。

Fig.9 Schematic diagram of test rig

Fig.10 Test view

Fig.11 Relationship between axial displacement and axial load result from experiment

Fig.12 Relationship between radial displacement and radial load result from experiment

図 12 に、実験により得たラジアル荷重と変位の関係を示す。アキシアル荷重負荷時と同様に、ラジアル変位が $20\mu\text{m}$ 以下の領域では非線形的に変化し、それ以上では線形的に増大することがわかる。このような非線形な挙動は、図 6 と比較すると、Harris の方法、歯面膜要素どちらとも一致しない。

以上の結果から、荷重と変位の挙動要因について検討する。剛性解析の仮定として、無負荷の状態ですべてのころが内輪、及び外輪に隙間なく接するとしている。しかし、実際には隙間がなく接しているところと隙間を有し接していないところが混在するものと考えられる。そこで、ころの寸法の個体差の考慮について検討した。ころの個体差を考慮することで、低負荷領域における内輪の変位に対して接触状態にあるころの個数が変化し、低負荷領域における剛性が低く見積もられてしまうのではないかと考える。

ころと内輪，外輪を接触させる時，内輪，外輪の相対変位が単純であり，ころに均等に荷重が作用すると仮定したアキシアル荷重下において，ころの個体差を検討した．ころの個体差は，許容差を平均値から標準偏差の3倍 (3σ) として発生させた正規乱数をころに与え，それらをころの誤差として計算に用いた．なお計算は3回行い，得られた最大値，最小値をエラーバーで示し，その平均値をプロットで示した．表2に，計算に用いたころの誤差を示す．

Table2 Roller radius error

	Radius error 1 (μm)	Radius error 2 (μm)	Radius error 3 (μm)
1	3.32	5.21	2.91
2	2.44	3.49	2.90
3	3.25	4.66	2.65
4	3.96	2.76	3.16
5	2.10	2.78	3.79
6	3.64	3.85	4.93
7	4.40	4.62	2.58
8	1.26	2.17	2.93
9	2.53	3.60	3.23
10	3.20	2.61	4.00
11	2.21	1.16	3.51
12	4.58	4.69	4.17
13	4.89	4.26	3.13
14	4.16	4.34	0.54
15	4.33	0.83	3.24
16	2.36	2.31	2.09

5・4 アキシアル荷重に対するころの個体差の考慮

図13は，前述のころの個体差を考慮してアキシアル荷重下における軸受剛性解析を行った結果を示している．初期条件下において解析した結果よりも個体差を考慮した方が実験値に近い挙動を示すことがわかる．また，図13には，小野ら⁵⁾により提案された方法を用いて計算した結果も示した．小野らの方法を用いて計算すると，アキシアル変位が小さい領域では実験値によく合うが，変位が大きくなると実験値よりも低い結果となった．したがって，歯面膜要素に求めた挙動の方が，実験値によく合うといえる．

5・5 ラジアル荷重に対するころの個体差の考慮

図14に，ころの個体差を考慮した上でラジアル荷重下における軸受剛性解析を行った結果を示す．アキシアル荷重下における解析と同様に，ころの個体差を考慮した方が実験値に近い挙動を示すことがわかる．すなわち，ころの個体差を考慮しない場合よりも考慮した方が，実験値により一致するといえる．

Fig.13 Relationships between axial load and axial displacement

Fig.14 Relationships between radial load and radial displacement

6. 結 言

本論文では、歯面膜要素を用いて円すいころ軸受の剛性をアキシアル荷重下、ラジアル荷重下において解析的に求め、さらにそれぞれの荷重下における軸受変位を実験によっても求めた。そしてそれらの結果を比較し、歯面膜要素法の有用性を確認した。

- 1)円すいころ軸受の剛性解析に対して、一般に用いられている Harris の方法と、歯面膜要素を用いた結果を比較した。その結果、歯面膜要素を用いて計算すると、Harris の方法による計算結果とは挙動が異なった。
- 2)実験装置円すいころ軸受にアキシアルおよびラジアル荷重を作用させて軸受変位を測定し、理論値と比較した。その結果、測定値は理論値よりも剛性が低かった。
- 3)歯面膜要素にころの個体差を考慮して再計算を行うことで、円すいころ軸受の剛性をより精度よく評価できることがわかった。

文 献

- (1) Harris T. A., Kotzalas M. N., *Rolling Bearing Analysis fifth edition Advanced Concepts of Bearing Technology*, 2-8, pp.13-26.
- (2) Moriwaki I., Yatani K, Masaoka M, Nakamura M, *Proceedings of The 15th Asia Pacific Automotive Engineering Conference -APAC15*, Volume1, (2009), pp.1/6-6/6.
- (3) 森脇一郎, 矢谷和基, 軸受剛性評価に関する基礎的研究 (ラジアル荷重およびスラストを受ける深溝玉軸受), 日本機械学会機素潤滑設計部門講演会 MPT2004 シンポジウム<伝動装置>講演論文集, (2004-11), pp. 80-83.
- (4) Moriwaki I., Tani T., Miyata T., Ueda A., Yoshihara M., Evaluation of Tooth Contact Stress with Tooth Flank Film Elements (Comparison of Evaluation with Measurement), *Transaction of ASME – Journal of Mechanical Design* –, 116-3, (1994), p.672.
- (5)小野繁, 桜木正明, 円錐ころ軸受の軸方向剛性計算式について, 潤滑, 第 23 巻, 第 10 号 (1978), pp.744-748.