ディスクリプタ形式に基づくPID制御系設計*

井前 譲^{*1}, 吉村 幸一郎^{*2}, 翟 貴生^{*1}, 小林 友明^{*1}

PID Control Design via Descriptor Expression

Joe IMAE^{*1}, Koichiro YOSHIMURA, Guisheng ZHAI and Tomoaki KOBAYASHI^{*1} Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University,
1-1 Gakuen-cho, Naka-ku, Sakai-shi, Osaka, 599-8531 Japan

In this paper we revisit the PID control design in terms of descriptor expression. Based on the descriptor expression of the derivative action in the PID controller, we consider PID control design utilizing standard nonlinear optimal control problem. Therefore, although the resultant control problem includes mixed constraint conditions with states and inputs, the real time optimization tool (MPC, for instance) can be applicable as one of the most powerful methods for tuning of PID parameters. Finally, some simulations are given to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Key Words : PID Controller, Descriptor System, Real Time Optimization

1. 緒 言

PID制御系は、様々な産業分野において幅広く利用されており、その有効性はPID制御系のパラメータ調整の仕方に左右されるといわれる。したがって、その調整法に関し多くの研究が報告されている⁽¹⁾。PIDのパラメータ表を利用するもの⁽²⁾、パラメータ空間を構成するもの⁽³⁾、適応制御を利用するもの⁽⁴⁾、ニューロやGAなどソフトコンピューティングを利用するもの⁽⁵⁾、その他⁽⁶⁾がある。ところで、パラメータ調整とは広く見れば一種の最適化の考え方である。しかしながら、いずれの研究においても、一部の研究に評価指標の利用はみられるものの、最適制御の枠組みで議論されているものは極めて少ない。最適制御の数値解法の分野においては、豊富な研究成果が得られていることを考えるとき、その適用が望まれる。ところで、その適用を困難にしている大きな理由はPID制御器の微分機能に関し、ディスクリプタ表現はできるものの、状態方程式表現ができない点にある。最適制御の数値解法においては状態方程式が前提となっており、PID制御を直接には最適制御問題として扱うことはできない。ところが最近ディスクリプタ形式の最適制御問題を状態方程式の最適制御問題の枠組みで取り扱う考え方が提案され、数値例によりその考え方が有効であることが示されている^{(7),(8)}。したがってPID制御をディスクリプタ表現し、そのディスクリプタ形式を状態方程式として変換することで最適制御の枠組みが可能となる。

本稿では、パラメータ調整を非線形最適制御の枠組みでとらえることを試みる。その際、非線形制御系設計の分野で注目を集めているモデル予測制御 (MPC) に着目して、新たな観点からPIDパラメータの調整法を考える。すなわち、MPCを用いることによりある種の最適性を確保しつつ、PID制御系のパラメータ調整を時々刻々行う適応型設計法を提案する。

本稿の構成は以下の通りである。2章において、ディスクリプタ形式の問題を状態方程式の問題としてとらえる一般的な考え方を示し、微分機能に適用可能であることを示す。3章においては一般的な非線形システムに対してPID制御器を適用する。ペナルティ法を併用して、PID制御系を状態方程式に基づく非線形最適制御問題に変換する。この種の最適制御問題は入力と状態の混合拘束条件を含む形となる。ペナルティ関数法により混合拘束条件を含む問題を無拘束問題へと変換し、MPCを適用する。入力をPIDパラメータとすると、ある種の最適

* 原稿受付 2010 年 1 月 20 日

^{*1} 正員, 大阪府立大学大学院工学研究科 (〒599-8531 大阪府堺市中区学園町 1-1)^{*2} 大阪府立大学大学院工学研究科

E-mail: jimaie@me.osakafu-u.ac.jp

なPIDパラメータが時々刻々決定可能となる．4章では数値実験を行い，本手法の有効性を検証する．

2. ディスクリプタ表現

PID制御器は微分を含む．因果関係を前提とした状態方程式では微分動作の表現は不可能であり，ディスクリプタ形式により可能となる⁹⁾．ここでは文献(7)，(8)に従って，微分動作が状態方程式に基づく最適制御の枠組みで議論が可能であることを示す．

2・1 ディスクリプタ表現から状態方程式表現

文献(8)では，一般的な非線形ディスクリプタシステム

$$F(x(t), \dot{x}(t), u(t)) = 0, \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

のもと，評価関数

$$J(x, u) = G(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x, u) dt \quad (2)$$

を最小とする入力変数 $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ を求める数値解法が提案されている．なお， $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ はディスクリプタ変数とし， t_0, t_1 はそれぞれ初期時刻，終端時刻である．基本的な考え方は，新たな入力変数 $w(t) \in \mathfrak{R}^n$ を導入し，(1)式を状態方程式と混合拘束条件へ変換する．

$$\text{状態方程式：} \dot{x} = w(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3a, b)$$

$$\text{拘束条件：} F(x(t), w(t), u(t)) = 0 \quad (4)$$

これにより状態方程式に基づく最適制御問題の定式化が可能となる．なお，評価関数を

$$J(x, u) = G(x(t_1)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{L(x, u, w) + qF^T(x, u, w)F(x, u, w)\} dt \quad (5)$$

と拡大するならば拡大評価関数のもとでの無拘束問題となる．ただし， q はペナルティパラメータである．ところで， $x = [x_1^T, x_2^T]^T$ として(1)式が以下のような2つのグループ

$$f_1(x, \dot{x}_1, u) = 0, \quad \dot{x}_2 = f_2(x, u)$$

に分解することができるならば，(4)式の拘束条件をさらに簡素化できる．すなわち，

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= w, \quad \dot{x}_2 = f_2(x, u) \\ f_1(x, w, u) &= 0 \end{aligned}$$

とし，かつ $w \in \mathfrak{R}^r (r \leq n)$ とするとき，拘束条件 $f_1(x, w, u) = 0$ は r 個のスカラー関数からなる．このことは重要である．なぜなら最適制御問題を解く場合に拘束条件の数が少ないことが実用的な観点から望ましいからである．以下の議論ではこの考え方を採用する．

2・2 微分器の状態方程式表現

PID制御器の中の微分器をとりあげる（図1）．本節ではこの微分器を通してディスクリプタ表現が状態方程式へと変換され，最適制御問題の枠組みでの議論が可能であることを示す．その微分操作は以下のディスクリプタ表現で記述される⁹⁾．

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \quad (6a)$$

Fig. 1 Derivative part

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (6b)$$

前節に従い仮想入力 $w(t)$ を導入することで、状態方程式と拘束条件が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$x_2(t) - u(t) = 0 \quad (8)$$

ちなみに(8)式により状態変数 x_2 が拘束されているために、インパルスモードが生じる結果となっている。最適制御問題の枠組みで議論が可能であることを確認するため、便宜上、ペナルティ関数を挿入した拡大評価関数を以下のように設定し、初期状態を $[x_1 \ x_2]^T = [1 \ 1]^T$ として簡単な計算を試みる。なおペナルティパラメータは試行錯誤で選んだ。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^5 \{x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t) + w^2(t) + 25(x_2(t) - u(t))\}^2 dt \quad (9)$$

拘束条件(7)をみたましながら状態と入力の自乗を最小とする最適制御問題となる。すなわち、状態および入力が零に収束することを期待した拡大評価関数である。図2に状態と入力の時間履歴、図3に等式拘束(8)の左辺の値の時間履歴を示す。図2より出力 $y(=x_1)$ を零に収束させる応答が得られ、状態 x_2 および入力 u, w も同様に零に収束していることがわかる。また、図3から等式拘束は評価区間にわたって十分零に近い値に抑えられており、

Fig. 2 States and inputs

Fig. 3 Constraint

全区間において等式拘束が満足されていることがわかる．ここで， y は u の微分に対応している．以上により，状態方程式に基づく最適制御問題の枠組みで微分動作が対処可能であることが確認できる．なお，オフライン最適制御の計算には文献(10)の数値解法アルゴリズムを用いた．

3. PID 制御から最適制御へ

制御対象として一般的な非線形システム

$$\dot{z} = f(z, u), \quad z \in R^n, u \in R^1 \quad (10a)$$

$$y = h(z), \quad y \in R^1 \quad (10b)$$

をとりあげる．ここに状態を z とし，入力 u ，出力 y はスカラーとする．

3・1 状態方程式と拘束条件

本稿で用いるPID制御器は図4の点線ブロックで表されるとする． u は G への操作入力， y は G の出力， r は y の目標値， e は偏差であり， s は微分オペレータを表す． K_P は比例動作， K_I は積分動作， K_D は微分動作に関するパラメータとして，PID制御器の各ブロックの状態変数を $x_i \in R^1 (i=1,2,3,4)$ とする．2章の議論に従い各動作を状態方程式および拘束条件で記述すると以下ようになる．

微分動作：

$$\dot{x}_1 = w \quad (11)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \quad (12)$$

$$x_2 - K_D(r - h(z)) = 0 \quad (13)$$

積分動作：

$$\dot{x}_3 = K_I(r - h(z)) \quad (14)$$

Fig. 4 PID controller

比例動作：

$$x_4 = K_p(r - h(z)) \quad (15)$$

さらに、現実的な観点からPIDパラメータと仮想入力 u の範囲に以下の制約を設ける．

$$\begin{aligned} |K_p| &< K_{p\lim} \\ |K_I| &< K_{I\lim} \\ |K_D| &< K_{D\lim} \\ |w| &< w_{\lim} \end{aligned} \quad (16)$$

3・2 最適制御問題の定式化

図4において入力 u は

$$u = x_1 + x_3 + x_4 \quad (17)$$

で表されるため(15)，(17)式より(10a)式は，

$$\dot{z} = f(z, x_1 + x_3 + K_p(r - h(z))) \quad (10a)'$$

となる．したがって，PIDパラメータ K_p ， K_I ， K_D をそれぞれ適切に調整する問題は，(10a)'，(11)，(12)，(14)式の状態方程式と(13)式の拘束条件のもと，偏差 $e(=r-y)$ を零にすばやく近づけるための適切なPIDパラメータを決定する問題となる．このとき，最適制御の枠組みでとらえるため，PIDパラメータ K_p ， K_I ， K_D を新たに入力としてとらえ，以下の評価関数を設定する．

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} q(r - h(z))^2 dt \quad (18)$$

ここで， q はペナルティパラメータである．

これによりPID制御問題(10)，(18)は，以下の非線形最適制御問題に変換される．すなわち，(10a)'，(11)，(12)，(14)式の状態方程式と(13)，(16)式の拘束条件のもとに評価関数(18)を最小とする制御入力を求める非線形最適制御問題となる．ここに，制御入力はPIDパラメータである．

PIDパラメータの決定を最適制御問題の枠組みでとらえることにより，その決定に関し最適制御の分野で得られた種々の手法を利用することができる．時々刻々と適応的にパラメータを調整することを目的として，ここでは実時間制御の手法として評価の高いモデル予測制御(MPC)を採用する．MPCは時々刻々制御入力を最適に再設計する手法であり，この手法の採用により適応的にPIDパラメータを時々刻々求めることが可能となる．なお，本稿ではMPCとして連続時間型のMPC⁽¹¹⁾を採用した．

さらに(13)，(16)式の拘束条件を扱う際には，ペナルティ関数法を利用し，評価関数(18)を次式のように拡張する．

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} q_1(r - h(z))^2 + q_2(x_2 - K_D(r - h(z)))^2 \\ & + \frac{r_{u1}}{K_{p\lim}^2 - K_p^2} + \frac{r_{u2}}{K_{I\lim}^2 - K_I^2} + \frac{r_{u3}}{K_{D\lim}^2 - K_D^2} + \frac{r_{u4}}{w_{\lim}^2 - w^2} dt \end{aligned} \quad (19)$$

なお， q_i ($i=1,2$)は外点ペナルティパラメータ， r_{ui} ($i=1\sim 4$)は内点ペナルティパラメータである． q_2 は等式拘束(13)を満足させるための外点ペナルティパラメータであり大きな値とすることが望ましい． r_i ($i=1,2,3,4$)は不等式拘束(16)を満足させるための内点ペナルティパラメータであり，小さな値とするのが望ましい．ところで，

PID パラメータに関し、内点ペナルティ関数を用いたのは、許容範囲に確実に制限するためである。また入力に制限がある場合も、内点ペナルティ法により対応可能である。

4. 数値実験

数値実験により提案手法の検証を行う。すなわち、MPC に基づく PID 制御器の設計が実用的な意味で可能であることを示す。本稿では、文献(12), (13)で取り上げられている、ベンチマークプラント3題および、非線形の例題として Van der Pol 問題に対して数値実験を行った。

$$\text{遅れ系: } G_1(s) = \frac{1}{(s+1)^n}, n=1,2,3,4$$

$$\text{非最小位相系: } G_2(s) = \frac{1-\alpha s}{(s+1)^3}, \alpha=0.1,0.2,0.5,1.0$$

$$\text{不安定極の系: } G_3(s) = \frac{1}{s^2-1}$$

$$\text{Van der Pol 問題: } \begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1-x_2^2)x_1 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned}$$

これらすべての例題において本稿の有効性を確認した。ここでは、非最小位相系と Van der Pol 問題に焦点を絞り、数値実験結果からその有効性を示す。ここで、制御区間 $[t_0 \ t_1]$ において $t_0 = 0$, $t_1 = 5.0$ としてその刻み数を200とする。すなわちサンプリング時間は25[ms]である。なお、文献(11)の連続時間型 MPC の適用に際して最適入力の再計算の時間は100[ms]とした。また、ペナルティパラメータは試行錯誤により $q_1 = 1.0$, $q_2 = 10.0$, $r_{ii} = 1.0 (i=1,2,3,4)$ とした。PID パラメータと仮想入力の限界値は $K_{Plim} = K_{Lim} = K_{Dlim} = 5.0$, $w_{lim} = 5.0$ と定めた。文献(12), (13)においてPID パラメータの範囲は示されていない。そのため、文献(12)で与えられたPID パラメータの具体的な数値例を参考に現実的な範囲を設定している。

4・1 数値実験1

非最小位相系のプラント

$$G_2(s) = \frac{1-s}{(s+1)^3}$$

に関して本手法を適用した(図5~8)。このとき既存手法(12)との比較を行った。なお、既存手法のPID パラメータは一定である。図5、図6はそれぞれ、出力 y および入力 u 時間履歴を示す。既存手法と比べて入力値は大きく変化するものの、PID パラメータは限界値の範囲内であり、評価関数(18)を考えると優れたステップ応答の実現に成功している。図7はPID パラメータの時間履歴を表している。既存手法では、一定のパラメータで制御しているのに対して、本手法では与えられた制限の範囲を十分に活かし、最適なパラメータを時々刻々きめ細やかに調整していることがわかる。このことが優れたステップ応答が得られる理由であると考えられる。また図8は等式拘束(13)の左辺の値の時間履歴である。この図から等式拘束が十分に零近傍で推移していることがわかる。

Fig. 5 Output

Fig. 6 Input

Fig. 7 PID parameters

Fig. 8 Constraint

Fig. 9 Output

Fig. 10 Input

(a)

(b)

(c)

Fig. 11 PID parameters

Fig. 12 Constraint

次に目標値の変化が連続的に与えられる場合の追従性を検証する．目標値をまず $r=1$ (ステップ応答) にし，15 秒後に目標値を $r=0$ に変化させた場合の数値実験を行った．

図 9～図 11 はそれぞれ出力 y ，入力 u ，PID パラメータの時間履歴を示す．これらの図から，途中で目標値が変化しても，非最小位相系に特有の逆振れ現象が見られるものの (図 9)，適応的に PID パラメータを素早く調整することで，目標値の変化に追従していることがわかる．また図 11 では PID パラメータが目標値変化に対し，

制限の範囲を十分に活かしながら適応的に調整されている様子がわかる. 図 12 は等式拘束(13)の時間履歴である. これも良好な結果を示している.

4・2 数値実験 2

PID 制御は一般的に非線形制御には不向きと考えられているが, PID パラメータの適応的調整機能をもつ本手法を用いれば, 非線形にも対応できることを示す. 例題として以下の Van der Pol 問題をとりあげた. これは自励振動をあらわす方程式として知られている.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (1 - x_2^2)x_1 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ y &= x_2\end{aligned}$$

なお, 初期値は $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 1.0$ とした. PID 制御器の制御目的は対象プラントの自励振動の抑制である. すなわち, $y = x_2 = 0$ とすることである. これに対し本手法を適用する. 図 13~図 15 はそれぞれ状態変数 x_1, x_2 , 入

Fig. 13 States

Fig. 14 Input

Fig. 15 PID parameters

Fig. 16 Constraint

力 u ，PIDパラメータの時間履歴を表す。

図13から自励振動の発生が抑えられていることがわかる。また，図15からPIDパラメータが制限の範囲を十分に活用し振動抑制を実現している。なお，図16に拘束条件(13)を示す。良好な結果を示している。

5. 結 言

本稿では微分器のディスクリプタ表現を利用して，PID制御系を連続型MPCが適用可能な形へと変換した。さらに，PIDパラメータを入力変数としてある種の最適入力値を時々刻々算出した。このような新たな視点から適応的パラメータ調整法を提案した。また，いくつかの例題を通して数値実験を行い，本手法の有効性を数値的に検証した。なお，本手法はPIDパラメータを入力変数とするため負のパラメータも許容する形となっている。

文 献

- (1) 須田信英，PID制御，(2000)，朝倉書店
- (2) O'Dwyer, A., *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*, (2009), Imperial College Press
- (3) 佐伯正美，木村純壮，倉田洋行，泰地茂明，“ H^∞ 制御問題に対するPID制御器のパラメータ空間設計法”，システム制御情報学会論文誌，Vol.11，No.1，(1998)，pp.35-40.
- (4) Chang, Wei-Der et al., “A Self-Tuning PID Control for a Class of Nonlinear Systems based on the Lyapunov Approach”, *Journal of Process Control*, Vol.12 (2003), pp.233-242.
- (5) 山本透，満倉靖恵，兼田雅弘，“遺伝的アルゴリズムを用いたPID制御器の一設計”，計測自動制御学会論文集，Vol.35，No.4，(1999)，pp.531-537.
- (6) Na, M., “Auto-Tuned PID Controller Using a Model Predictive Control Method for the Steam Generator Water Level”, *IEEE Transactions on Nuclear science*, Vol.48, No.5, (2001), pp.1664-1671.
- (7) Imae, J., Yoshimura, K., Zhai, G., and Kobayashi, T., “Real-time Optimisation for Parallel-parking Control of Four-wheeled Vehicles”, *International Journal Modelling, Identification and Control*, Vol. 6, No. 3, (2009), pp255-262.
- (8) Imae, J., Yoshimura, K., Zhai, G., and Kobayashi, T., “Numerical Approach for Nonlinear Descriptor Systems with Variable Rank of Jacobians”, *Proceedings of the 53rd Annual Conference of Systems, Control and Information Engineers*, (2009), pp423-424.
- (9) 片山徹，線形システムの最適制御—ディスクリプタシステム入門，(1999)，近代科学社
- (10) Imae, J., and Torisu, R., “A Riccati-equation based Algorithm for Nonlinear Optimal Control Problems”, *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, (1998), pp.4422-4427.
- (11) 小林友明，孫野道征，井前讓，吉水一能，翟貴生，“アルゴリズムックコントローラによる非線形システムの実時間最適制御”，日本機械学会論文集C編，Vol.71，No.705，(2005)，pp1544-1550.
- (12) Li, Y. et al., “PID Control System Analysis and Design”, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol.26, No.1 (2006), pp. 32-41.
- (13) Åström, K.J. and Hägglund, T., “Benchmark Systems for PID Control”, *Proceedings of International Federation of Automatic Control, workshop, Terrassa, Spain*, (2000), pp. 165-166.