タイヤコーナリングフォースの非線形特性を考慮した 二輪自動車に対する前輪操舵アシスト制御*

村上 晋太郎^{*1}, 朱 紹鵬^{*2}, 西村 秀和^{*1}

Front-Steering Assist Control for a Motorcycle Considering Nonlinearity of Its Tire Cornering Force

Shintaroh MURAKAMI, Shaopeng ZHU and Hidekazu NISHIMURA^{*1}

^{*1} Keio Univ. Graduate School of System Design and Management
Hiyoshi 4-1-1, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8526 Japan

This paper describes a front-steering assist control system design for a motorcycle taking into account of nonlinearity of tire cornering forces. Utilizing hyperbolic tangent functions to approximate Magic Formula tire forces, the rider-motorcycle system model can be linearized around an equilibrium point of steady-state circular turning. From the view points of eigenvalues and frequency responses, the linearized model is analyzed and a reduced-order model is obtained to design the control system by using H_∞ control theory. By carrying out the steady-state circular turning simulation in the low road friction condition, it is demonstrated that the control system can stabilize a motorcycle when receiving a sudden disturbance from the front wheel.

Key Words : Vehicle Dynamics, Multibody Dynamics, Stability, Modeling, Motion Control, Tire Cornering Force

1. 緒 言

二輪自動車を操縦するライダーは、自身の姿勢制御や操舵を適切に行うことによって、二輪自動車のロール角、ヨー角のバランスをとることで安定に走行させている。特に摩擦係数の低い路面や外乱の影響を受けやすい悪路では、ライダーの熟練した運転技術やある程度の運動能力を必要とする。このため、熟練度の低いライダーや高齢ライダーの安全性を確保するには、何らかの走行安定化制御を施す必要があると考えられる。

直進定常状態での走行安定化に関しては、前輪操舵アシスト機構による走行安定化制御が、鎌田らによって提案されている^{(1), (2)}。そこでは市販の機構解析ソフトウェア上で非線形力学モデルを構築するとともに、実車に対して直進定常走行状態でシステム同定を行ない、同定モデルに基づく二輪自動車の前輪操舵アシスト制御による走行安定化の有効性を実車で示している。朱らはマルチボディダイナミクス理論を用いて二輪自動車のモデリングを行い、直進状態のみならず定常旋回中における前輪操舵アシスト制御の有効性をシミュレーションにより検討した^{(3)~(6)}。そこでは、タイヤ断面形状およびタイヤ変形を考慮するとともに、ライダー上体のリーン運動とハンドル操舵による相互作用を考慮したライダー-二輪自動車システムを構築した上で、制御系設計を行っている。

しかしながら、文献(3)~(6)では、タイヤコーナリングフォースが線形特性を持つものと仮定し、これをキャンバ角およびスリップ角の 1 次関数で表わしている。実際のタイヤコーナリングフォースは非線形特性を持つため、タイヤのキャンバ角やスリップ角が大きな状況下での解析および制御系設計は、妥当とは言えないと考えられる。

二輪自動車のタイヤモデルとしては、実車で測定結果に基づくマジックフォーミュラ^{(7), (8)}が、市販の解析ソフトウェアなど多くの解析モデルに用いられている。マジックフォーミュラは、キャンバ角およびスリップ角の

* 原稿受付 2010 年 12 月 13 日

^{*1} 正員, 慶應義塾大学大学院 システムデザイン・マネジメント研究科 (〒223-8526 神奈川県横浜市港北区日吉 4-1-1)

^{*2} 正員, 慶應義塾大学 総合医科学研究センター

E-mail: h.nishimura@sdm.keio.ac.jp

逆正接関数を変数としてそれぞれ別の逆正接関数の中に含んでいる．このため，そのままでは解析と制御系設計を行うために必要となる線形化が非常に困難となる．文献(9), (10)では，四輪自動車のタイヤ力特性の記述に，マジックフォーミュラをスリップ角の逆正接関数として簡易化した式を用いているものの，線形化は行っていない．また，二輪自動車ではタイヤキャンバ角が四輪自動車に比べて大きくなるため，これを考慮する必要がある．

このような観点から，本論文ではタイヤコーナリングフォースの非線形特性を考慮したライダー - 二輪自動車系に対して，前輪操舵アシスト制御系を設計する．マジックフォーミュラの有するタイヤコーナリングフォースの非線形特性を，双曲線正接関数を用いて近似し，非線形力学モデルを構築する．定常円旋回状態を平衡点としてそのまわりで線形化した力学モデルに周波数応答解析と固有値解析を施し，低次元化モデルを導出した上で， H_∞ 制御を用いて前輪操舵アシスト制御系の設計を行う．そして低摩擦路面上でのシミュレーションを行い，車輪のスリップ角が大きくなりやすい場合に，タイヤコーナリングフォースの非線形特性を考慮した上で設計した制御系が優れた制御性能を有することを示す．

2. ライダー - 二輪自動車系の力学モデル

2・1 力学モデル

図1にライダー - 二輪自動車系の力学モデル^{(3)~(6)}を示す．二輪自動車は，後輪フレーム（ライダーの下体，リアフォーク，タンク，エンジンを含む），前輪フレーム（ハンドル，フロントステア，フロントフォークを含む），後輪，前輪の4剛体で構成される．ライダーの上体は，回転ばね K_{wx} およびダンパ C_{wx} で後輪フレームと結合され⁽⁷⁾ リーン角まわりの受動的な運動を行うものとし，質量，ロール軸とヨー軸まわりの慣性モーメントが考慮されている．また，ハンドル軸中心から長さ 0.3 m のハンドルバーへ，ばね K_{wz} およびダンパ C_{wz} を介して結合している^{(6), (11)}．表1に二輪自動車の諸元を示す⁽¹²⁾．

図1では，慣性座標系の原点を O とし，後輪フレームの重心 A の地面への垂直投影点にとる．5つの剛体の重心を各々， W ：ライダーの上体の重心， A ：後輪フレームの重心， U ：前輪フレームの重心， C ：後輪の重心， D ：前輪の重心として，各剛体の座標系をそれぞれの基準座標系にとる．各剛体の質量は各々， m_W ：ライダーの上体の質量， m_A ：後輪フレームの質量， m_U ：前輪フレームの質量， m_C ：後輪の質量， m_D ：前輪の質量で表わす．また，記号 R は車輪の半径で， R_r ：後輪半径， R_f ：前輪半径である．記号 τ はトルクを表わし， τ_{fr} ：ライダーからの操舵トルク， τ_{fc} ：前輪操舵アシスト機構が生じる操舵制御トルク， τ_r ：後輪駆動トルクとする．

後輪フレームの重心位置 $\mathbf{R}_{OA}$ ，後輪フレームのオイラー角 Θ_{OA} ，前輪操舵角 δ ，ライダーの上体のリーン角 θ_{wx} ，後輪回転角 θ_r ，前輪回転角 θ_f を用いて，一般化座標 $\mathbf{Q}$ を次のように定義する．

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{R}_{OA}^T \quad \Theta_{OA}^T \quad \delta \quad \theta_{wx} \quad \theta_r \quad \theta_f]^T \quad (1)$$

ただし，上付きの添え字 T は転置を表わす． C_{OA} を後輪フレームの座標系 A から慣性座標系 O への回転行列とするとき， $\mathbf{R}_{OA} = C_{OA} \mathbf{V}'_{OA}$ の関係を有する $\mathbf{V}'_{OA}$ を用いて一般化速度 $\mathbf{S}$ を

$$\mathbf{S} = [\mathbf{V}'_{OA}^T \quad \Theta_{OA}^T \quad \dot{\delta} \quad \dot{\theta}_{wx} \quad \dot{\theta}_r \quad \dot{\theta}_f]^T \quad (2)$$

と定義する．上付のダッシュがない場合には慣性座標系で表わされたことを，ダッシュがある場合は各剛体の基準座標系によって表わされたことを意味する．一般化座標 $\mathbf{Q}$ と一般化速度 $\mathbf{S}$ の間には

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{S}} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} C_{OA} & \mathbf{O}_{3 \times 7} \\ \mathbf{O}_{7 \times 3} & \mathbf{I}_{7 \times 7} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S} \quad (3)$$

の関係が成り立つ．非線形運動方程式は，ライダー - 二輪自動車系の質量行列 $\mathbf{m}$ ，および力行列 $\mathbf{f}$ を用いて，以下のとおり表わされる^{(3)~(6), (13)}．

$$\mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{f} \quad (4)$$

タイヤ力等，各剛体に加わる外力とトルクは，力行列 $\mathbf{f}$ に含まれる．

Fig. 1 Dynamical model of rider-motorcycle system

Table 1 Specification of rider-motorcycle system

Mass	m_A	m_U	m_W	m_C	m_D	Spring stiffness of rider's upper torso	
[kg]	164.43	15.50	50.00	19.20	10.90	K_{wx}	K_{wz}
Inertia	I'_{OAxx}	I'_{OUxx}	I'_{OWxx}	I'_{OCxx}	I'_{ODxx}	350	172.2
						[Nm/rad]	[N/m]
						Damping coefficient of rider's upper torso	
Length	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	C_{wx}	C_{wz}
						20	26.4
						[Nms/rad]	[Ns/m]
[m]	0.545	0.523	0.359	0.707	0.307		

状態量 $\mathbf{x}$ を一般化座標 $\mathbf{Q}$ および一般化速度 $\mathbf{S}$ で、入力 $\mathbf{u}$ を前輪操舵トルク τ_f と後輪駆動トルク τ_r で、それぞれ

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_{fr} + \tau_{fc} \end{bmatrix} \quad (5)$$

と定義するとき、式(3),(4)より、次の非線形状態方程式を得ることができる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{E} \quad (6)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{10 \times 10} & \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{S}} \\ \mathbf{O}_{10 \times 10} & \mathbf{m}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{S}} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{10 \times 2} \\ \mathbf{m}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{10 \times 1} \\ \mathbf{m}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{f}} \end{bmatrix}$$

2・2 タイヤ力特性

$\mathbf{e}_y$ を y 軸方向の単位ベクトル、 $\mathbf{e}_z$ を z 軸方向の単位ベクトルとすると、式(4)の力行列 $\mathbf{f}$ に含まれる後輪 C と前輪 D に加わる外力とトルクは、次のように表される⁽³⁾。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}'_{OC} &= \mathbf{C}_{OC}^T \cdot \mathbf{F}_{OC} = -\mathbf{C}_{OC}^T \cdot (m_C \cdot g \cdot \mathbf{e}_z - \mathbf{f}_{CP}) \\
 \mathbf{F}'_{OD} &= \mathbf{C}_{OD}^T \cdot \mathbf{F}_{OD} = -\mathbf{C}_{OD}^T \cdot (m_D \cdot g \cdot \mathbf{e}_z - \mathbf{f}_{DP}) \\
 \mathbf{N}'_{OC} &= \tau_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{C}_{OC}^T \cdot \mathbf{e}_z + \tilde{\mathbf{R}}_{CP} \cdot \mathbf{C}_{OC}^T \cdot \mathbf{f}_{CP} + \tau_r \cdot \mathbf{e}_y \\
 \mathbf{N}'_{OD} &= \tau_{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{C}_{OD}^T \cdot \mathbf{e}_z + \tilde{\mathbf{R}}_{DP} \cdot \mathbf{C}_{OD}^T \cdot \mathbf{f}_{DP}
 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 g は重力定数、 $\tau_{\mathcal{F}}$ は後輪のセルフアライニングトルク、 τ_r は前輪のセルフアライニングトルクである。 $\mathbf{R}_{CP}, \mathbf{R}_{DP}$ は、それぞれ後輪と前輪の重心 C, D の座標系で表わした接地点 P_r, P_f の位置である。上に記号 $\sim$ のついた行列は、ベクトルの外積演算子を示す。また、 $\mathbf{f}_{CP}, \mathbf{f}_{DP}$ は、それぞれ P_r と P_f に加わる外力で、式(8) のように示される。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{CP} &= F_{Cx} \cdot D_{OCxx} + F_{Cy} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_z \cdot D_{OCxx} + F_{Cz} \cdot \mathbf{e}_z \\
 \mathbf{f}_{DP} &= F_{Dx} \cdot D_{ODxx} + F_{Dy} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_z \cdot D_{ODxx} + F_{Dz} \cdot \mathbf{e}_z
 \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 D_{OCxx} と D_{ODxx} は、後輪と前輪の基準座標系における x 軸方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_x$ を、慣性座標系 O へそれぞれ座標変換したもので、

$$D_{O^*xx} = \frac{-\tilde{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{C}_{O^*} \cdot \mathbf{e}_y}{|\tilde{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{C}_{O^*} \cdot \mathbf{e}_y|} \quad (9)$$

である。ここで下付き添え字 $*$ は C または D を表わす。式(8)において、 F_{*x} は D_{O^*xx} 方向に加わるタイヤ前後力である。また F_{*y} は、慣性座標系 O の x - y 平面上において、 D_{O^*xx} と垂直な方向に加わるタイヤ横力である。 F_{*z} は鉛直方向に加わるタイヤの垂直荷重である。タイヤコーナリングフォースは、進行方向 $\mathbf{V}_{OA} / |\mathbf{V}_{OA}|$ を x 軸とする座標系で F_{*x} と F_{*y} の合力を表わしたときの、 y 軸方向の力である。

本論文では、タイヤ力の非線形特性を考慮するため、二輪自動車のマジックフォーミュラ^{(7),(8)}の有する非線形特性を双曲線正接関数を利用して近似する。この近似を行うため、スリップ率 ε_* によるタイヤ前後力の非線形特性⁽¹²⁾、およびスリップ角 β_* とキャンバ角 θ_{*x} によるタイヤ横力の非線形特性⁽¹²⁾をそれぞれ、タイヤ前後力については ε_* 、タイヤ横力については β_* および θ_{*x} を変数とする双曲線正接関数で表わす。このときのタイヤの前後力 F_{*x} および横力 F_{*y} を式(10)～(13)に示す。本論文ではこのタイヤ力を HT タイヤ力と呼ぶ。

$$F_{*x}(\varepsilon_*) = F_{*x\max} \cdot \frac{\tanh(c_{x1} \cdot \varepsilon_*)}{c_{x1} \cdot c_{x2}} \quad (10)$$

$$F_{*y}(\varepsilon_*, \beta_*, \theta_{*x}) = F_{*y\max} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{F_{*x}}{F_{*x\max}} \right)^2} \quad (11)$$

$$F_{*x\max} = \mu_R \cdot F_{*z} \quad (12)$$

$$F_{*y\max} = \mu_R \cdot \left[\left(c_{C1} \frac{F_{*z}}{g} + c_{C2} \right) \cdot \frac{\tanh(c_{S1} \cdot \beta_*)}{c_{S1} \cdot c_{S2}} + \left(c_{C3} \frac{F_{*z}}{g} + c_{C4} \right) \cdot \frac{\tanh(c_{S3} \cdot \theta_{*x})}{c_{S3} \cdot c_{S4}} \right] \quad (13)$$

ここで、 $F_{*x\max}, F_{*y\max}$ はそれぞれ、路面摩擦係数 μ_R を係数に持つ F_{*x}, F_{*y} の最大値である。スリップ率 ε_* は、それぞれの車輪の座標系でみた車輪接地点が回転する速度 $\dot{\theta}_{\#} R_{\#}$ と、一般化座標 $\mathbf{Q}$ と一般化速度 $\mathbf{S}$ で表わした車輪重心の並進速度 $\mathbf{V}_{O^*}$ より、

$$\varepsilon_* = \frac{\dot{\theta}_{\#} R_{\#} - (\mathbf{V}'_{O^*})_x}{\max[\dot{\theta}_{\#} R_{\#}, (\mathbf{V}'_{O^*})_x]} \quad (14)$$

で定義される⁽¹⁴⁾。ただし、下付き添え字 $\#$ は f または r を表わし、それぞれ下付き添え字 D, C と共に用いる。また、前輪のキャンバ角 θ_{Dx} は、

$$\theta_{Dx} = \arctan \left[\frac{(\tilde{\mathbf{e}}_z \cdot D_{OCxx})^T \cdot (\tilde{D}_{OCxx} \cdot C_{OA} \cdot \mathbf{e}_z)}{\mathbf{e}_z^T \cdot (\tilde{D}_{OCxx} \cdot C_{OA} \cdot \mathbf{e}_z)} \right] \quad (15)$$

である。後輪のキャンバ角 θ_{Cx} は車体のロール角 θ_x に等しい。スリップ角 β_* は、前後輪の接地点 $P_{\#}$ の速度 $\mathbf{V}_{OP\#}$ を用い、次式で表わすことができる。

$$\beta_* = \arctan \left[-\frac{(\tilde{\mathbf{e}}_z \cdot D_{O^*xx})^T \cdot \mathbf{V}_{OP\#}}{D_{O^*xx}^T \cdot \mathbf{V}_{OP\#}} \right] \quad (16)$$

式(10), (13)において, c_{x1} , c_{x2} , $c_{C1} \sim c_{C4}$ および $c_{S1} \sim c_{S4}$ は、近似のために導入したフィッティングパラメータである。ただし, $c_{C1} \sim c_{C4}$ については文献(12)を参考に各々の値を定めた。 c_{x1} , c_{S1} および c_{S3} で双曲線正接関数の最大値を, c_{x2} , c_{S2} および c_{S4} で傾きを決めている。

文献(8)では、3 種類のタイヤサイズについてそのマジックフォーミュラのパラメータが示されている。その中から、表 1 に示した二輪自動車の諸元に適したタイヤサイズ 120/70, 160/70 を選定し、それぞれ前・後輪用タイヤに設定した。以後、このタイヤ力を MF タイヤ力と呼ぶ。路面摩擦係数 μ_R はタイヤ力の式全体に乘じられる比例係数であるため、 $\mu_R=1$ としてフィッティングパラメータを定めておくことで、異なる路面摩擦係数の場合に対しても対応することができる。シミュレーション上必要な各タイヤの垂直荷重 F_{z2} は 1500 N 前後であるため、垂直荷重を 1500 N として MF タイヤを算出した。設定した各フィッティングパラメータの値を表 2 に示す。

Table 2 Fitting parameters of rear tire and front tire

	c_{C1}	c_{C2}	c_{C3}	c_{C4}	c_{x1}	c_{x2}	c_{S1}	c_{S2}	c_{S3}	c_{S4}
Rear Tire (160/70)	60.6	4435	14.6	73.0	25	0.04	16.0	0.63	1.0	1.6
Front Tire (120/70)	89.3	3481	14.0	-275.1	25	0.04	16.0	0.63	1.0	1.6

Fig. 2 Characteristics of rear tire force

図 2 に、表 2 のフィッティングパラメータを用いた HT タイヤ力、MF タイヤ力、および線形性を持つと仮定して文献(3)~(6)で用いられたタイヤ力（以下、LC タイヤ力）の後輪に関する特性をそれぞれ、実線、破線、一点鎖線で示す。図 2 (a)は、式(10)に示したスリップ率に対するタイヤの前後力 F_{Cx} である。図 2 (b)~(e)は、式(10)において $F_{Cx}=0$ としたときのタイヤ横力 F_{Cy} である。図 2 (b), (c)はスリップ角に対するタイヤ横力、図 2 (d), (e)はロール角に対するタイヤの横力である。

図 2 (a)に示す MF タイヤ力の前後力はスリップ率が ± 0.1 付近で最大・最小値をとり急峻に変化するが、HT タイヤ力にはこの変化はない。しかしながら、2・3 節のシミュレーション結果で示すとおり、シミュレーション上必要とされるタイヤ前後力は小さく、本論文で扱う条件での制御系設計には、この誤差による影響は少ないものと考えている。

図 2 (b), (e)において、スリップ角約 1~3 度、かつロール角約 13~15 度付近で、LC タイヤ力は MF タイヤ力に近い値を持っている。これより、LC タイヤ力は、この条件の定常円旋回時において適切な値をとることがわかる。HT タイヤ力は、図 2 (d), (e)に示すように、スリップ角-2 度から 2 度の間で、ロール角によらず MF タイヤ力と一致する。図 2 (b)より、HT と MF タイヤ力の横力は正の領域で一致しており、スリップ角約 3 度以上で、共に垂直荷重 1500 N よりも大きな値をとる。ただし、図 2 (c)に示すとおり、ロール角 30 度の場合には、スリップ角約 3 度以上で HT タイヤ力が MF タイヤ力よりも 300 N 程度大きな値をとる。表 2 に示すパラメータ c_{S1} , c_{S3} を調整することでこの条件下での精度を向上させることができるが、広い範囲のロール角変化に対応させることは難しい。

2・3 定常円旋回時のコーナリング特性

前節で用いた HT, MF および LC の 3 つのタイヤ力を、それぞれ非線形状態方程式(6)に適用して、タイヤ力の違いによる定常円旋回時のコーナリング特性を比較する。図 3 のようにライダーから一定の前輪操舵トルク τ_{fr} を与え、目標後輪回転角速度 $\dot{\theta}_r$ に追従するように PI 制御して後輪駆動トルク τ_r を与えることで、定常円旋回運動を得る。PI 制御には、比例ゲイン係数 $k_p=2$ 、および積分ゲイン係数 $k_i=1$ を用いた。目標後輪回転角速度 $\dot{\theta}_r$ を車速が 40 km/h となるように設定し、前輪操舵トルク $\tau_{fr}=-6.5$ Nm とするとき、路面摩擦係数 0.8 における定常円旋回中のロール角は 19.7 度、路面摩擦係数 0.55 でのロール角は 20.6 度となる。

定常円旋回中に前輪のみが路上の突起物を乗り越えるような場合を想定し、前輪操舵トルクへパルス幅 0.4 s、振幅 10 Nm の三角波状インパルス外乱⁽¹⁵⁾を加えるシミュレーションを行う。外乱が加わった後にも、ライダーは一定の前輪操舵トルクを与え続けるものとする。図 4, 図 5(a), (b), (c) それぞれに、路面摩擦係数 0.8, 0.55 とした場合のロール角の応答波形と前輪および後輪の摩擦円を示す。図 4, 図 5 (b), (c)中のタイヤ横力は右向きであるため負の値をとる。

図 4 (a)に示すように路面摩擦係数 0.8 の場合、ロール角応答にタイヤ力の差による違いはほとんどない。図 4 (b), (c) に示す前輪および後輪の摩擦円では、HT および MF タイヤ力はほぼ同じ軌跡を描くが、LC タイヤ力は前後方向成分が小さく、特に後輪ではその差が顕著である。ただし、この条件下では前後方向成分はもともと小さいため、ロール角などの二輪自動車の挙動にはタイヤ力の違いによる大きな差は現れない。

Fig. 3 Closed-loop control system for steady-state circular turning

 Fig. 4 Cornering characteristics in steady-state circular turning ($\mu_R = 0.80$)

 Fig. 5 Cornering characteristics in steady-state circular turning ($\mu_R = 0.55$)

次に、路面摩擦係数 0.55 のシミュレーション条件では、図 5 (a)での HT と MF タイヤ力を用いた結果はほぼ一致し、7 s 程度でロール角応答が収束している。一方 LC タイヤ力を用いた場合、3 s 程度で収束している。図 2(c)に示したように LC タイヤのタイヤ横力が HT および MF タイヤ力よりも大きいので、LC タイヤの収束が早くなったと考えられる。図 5 (b), (c)中の HT と MF タイヤ力の摩擦円は、概ね同じ軌跡となり、路面摩擦係数 μ_R の設定値 0.55 を超えている。これは図 2(b), (c)で示したように、スリップ角約 3 度以上では HT と MF タイヤ力のタイヤ横力の大きさが、垂直荷重の大きさを上回るためである。なお、路面摩擦係数が 0.55 未満のシミュレーションでは、HT および MF タイヤ力を用いた場合、外乱入力後共に横転してしまう。

図 4, 5 (b), (c)の摩擦円の前方向成分は小さく、このタイヤ前後力の換算値は、最大でも ± 100 N 程度で、図 2 (a)に示した MF タイヤの前後力の最大・最小値に比べて十分に小さい。すなわち、スリップ率としてはゼロ近傍を維持していると考えられる。HT タイヤ力は、スリップ率 0.1 付近で MF タイヤ力が最大・最小値をとる領域での誤差が大きい、本論文で行うシミュレーションや制御系設計には影響しない。

2・4 HT タイヤ力の線形化

下付きの添え字 0 を用いて示す平衡点、スリップ率 ε_{*0} 、キャンバ角 θ_{*0} およびスリップ角 β_{*0} のまわりで、HT タイヤ力を線形化する。微小変化分を Δ で表わすと、式(10)~(13)より線形化後の HT タイヤ力を次のように導出することができる。

$$F_{*x}(\varepsilon_{*0} + \Delta\varepsilon_*) \approx \mu_R \left[\frac{\tanh(c_{x1} \cdot \varepsilon_{*0})}{c_{x1} \cdot c_{x2}} + \frac{\Delta\varepsilon_*}{c_{x2} \cdot \cosh^2(c_{x1} \cdot \varepsilon_{*0})} \right] \cdot F_{*z} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} F_{*y}(\varepsilon_{*0} + \Delta\varepsilon_*, \beta_{*0} + \Delta\beta_*, \theta_{*x0} + \Delta\theta_{*x}) \\ \approx \mu_R \left(c_{C1} \frac{F_{*z}}{g} + c_{C2} \right) \cdot \left[\frac{\tanh(c_{S1} \cdot \beta_{*0})}{c_{S1} \cdot c_{S2}} + \frac{\Delta\beta_*}{c_{S2} \cdot \cosh^2(c_{S1} \cdot \beta_{*0})} \right] \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{\tanh(c_{x1} \cdot \varepsilon_{*0})}{c_{x1} \cdot c_{x2}} \right]^2} \\ + \mu_R \left(c_{C3} \frac{F_{*z}}{g} + c_{C4} \right) \cdot \left[\frac{\tanh(c_{S3} \cdot \theta_{*x0})}{c_{S3} \cdot c_{S4}} + \frac{\Delta\theta_{*x}}{c_{S4} \cdot \cosh^2(c_{S3} \cdot \theta_{*x0})} \right] \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{\tanh(c_{x1} \cdot \varepsilon_{*0})}{c_{x1} \cdot c_{x2}} \right]^2} \\ - \mu_R \left(c_{C1} \frac{F_{*z}}{g} + c_{C2} \right) \cdot \frac{\tanh(c_{S1} \cdot \beta_{*0})}{c_{S1} \cdot c_{S2}} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_*}{c_{x2} \cdot \cosh^2(c_{x1} \cdot \varepsilon_{*0}) \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{\tanh(c_{x1} \cdot \varepsilon_{*0})}{c_{x1} \cdot c_{x2}} \right]^2}} \\ - \mu_R \left(c_{C3} \frac{F_{*z}}{g} + c_{C4} \right) \cdot \frac{\tanh(c_{S3} \cdot \theta_{*x0})}{c_{S3} \cdot c_{S4}} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_*}{c_{x2} \cdot \cosh^2(c_{x1} \cdot \varepsilon_{*0}) \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{\tanh(c_{x1} \cdot \varepsilon_{*0})}{c_{x1} \cdot c_{x2}} \right]^2}} \end{aligned} \quad (18)$$

スリップ率, 前輪キャンバ角およびスリップ角の微小変化分 $\Delta\varepsilon_*$, $\Delta\theta_{*x}$, $\Delta\beta_*$ は, それぞれ式(14)~(16)より求めることができる. HT タイヤ力の微小変化分 ΔF_{*x} , ΔF_{*y} は, 式(17), (18)より定数項を除くことで得られる.

3. 制御系設計

3・1 線形化状態空間モデルによる固有値解析と周波数応答解析

前輪操舵アシスト制御系設計のための線形化状態空間モデルを導出する. 2・2 節で導出したライダー - 二輪自動車系の非線形力学モデルを用い, 2・3 節の定常円旋回中シミュレーション結果より一般化座標の平衡点 $\mathbf{Q}_0$, および一般化速度の平衡点 $\mathbf{S}_0$ を数値的に求める. 次にその平衡点まわりでの線形化を行う^{(4), (6)}. 2・4 節で導出した線形化後の HT タイヤ力式(17), (18)は, 力行列 $\mathbf{f}$ を介して線形化状態空間モデルに含まれる. したがって HT タイヤ力を含む線形化状態空間モデルは, 路面摩擦係数に対する依存性を持つ. 2・3 節では路面摩擦係数 0.8 と 0.55 についてシミュレーションを行ったが, ここでは路面摩擦係数 0.55 の場合について解析を行う.

平衡点 $\mathbf{Q}_0$ および $\mathbf{S}_0$ 近傍での一般化座標 $\mathbf{Q}$ と一般化速度 $\mathbf{S}$ は, それぞれの微小変化分 $\Delta\mathbf{Q}$ と $\Delta\mathbf{S}$ を用い, 次のように表される.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \Delta\mathbf{Q}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \Delta\mathbf{S} \quad (19)$$

式(3)を線形化したときの微小変化分は,

$$\Delta\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{Q}} \left(\frac{\partial\dot{\mathbf{Q}}}{\partial\mathbf{S}} \mathbf{S}_0 \right) \Big|_0 \Delta\mathbf{Q} + \frac{\partial\dot{\mathbf{Q}}}{\partial\mathbf{S}} \Big|_0 \Delta\mathbf{S} \quad (20)$$

となる. 質量行列 $\mathbf{m}$, および力行列 $\mathbf{f}$ は平衡点まわりで $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m}$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \Delta\mathbf{f}$ と表わせる. これらを用い, 非線形運動方程式(4)を次のように線形化できる.

$$\mathbf{m}_0 \cdot \Delta\dot{\mathbf{S}} = \Delta\mathbf{f} \quad (21)$$

$$\Delta\mathbf{f} = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{Q}} \Big|_0 \Delta\mathbf{Q} + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{S}} \Big|_0 \Delta\mathbf{S} + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}} \Big|_0 \Delta\mathbf{u}$$

また, 状態量の微小変化分 $\Delta\mathbf{x}$ と入力微小変化分 $\Delta\mathbf{u}$ を,

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{Q} \\ \Delta \mathbf{S} \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta \tau_r \\ \Delta \tau_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \tau_r \\ \Delta \tau_{fr} + \Delta \tau_{fc} \end{bmatrix} \quad (22)$$

と定義すると、式(19)~(22)を用いることで、線形化状態空間モデルを以下のように導くことができる。

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_l \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}_l \Delta \mathbf{u} \quad (23)$$

$$\mathbf{A}_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{S}} \mathbf{S}_0 \right) \bigg|_0 & \frac{\partial \dot{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{S}} \bigg|_0 \\ (\mathbf{m}_0)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{Q}} \bigg|_0 & (\mathbf{m}_0)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{S}} \bigg|_0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{10 \times 2} \\ (\mathbf{m}_0)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_0 \end{bmatrix}$$

次に、線形化モデル式(23)に対してモード分離を行い、システム行列 $\mathbf{A}_l$ を対角正準形に変換し、それぞれのモード毎の周波数応答解析を行い、その寄与度を明確にする^{(4), (6)}。直進走行時の二輪自動車単体には、キャブサイズモード、ウィーブモード、ウォブルモードの3つのモードを持つことが知られている⁽¹⁶⁾。キャブサイズモードは、固有値が実数の非振動的なロール運動である。ウィーブモードは複素固有値に対応し、固有振動数が車速によって1 Hz から4 Hz まで変化する、車体のヨー運動とロール運動および横滑りが連成した振動モードである。ウォブルモードも振動モードであり、主に操舵系に発生する。ウォブルモードの固有振動数は車速によって6 Hz から10 Hz まで変化する、車速の上昇によって不安定化する。また、ライダー上体のロール軸まわりの運動を考慮したことで、ライダー上体の振動モードが固有振動数1 Hz 付近に表れている⁽⁴⁾。

Fig. 6 Frequency responses of linearized model

Fig. 7 Frequency responses of linearized full-order model and reduced-order model

車速 40 km/h, 前輪操舵トルク $\tau_f = -6.5$ Nm の定常円旋回中における平衡点周りで線形化されたモデルについて, 5 つの 0 固有値を除くモード分離後の各モードの周波数応答を図 6 に示す. 図 6 (a) は操舵トルク $\Delta\tau_f$ からロール角 $\Delta\theta_x$ までの非振動モードの周波数応答, 図 6 (b) は操舵トルク $\Delta\tau_f$ から操舵角 $\Delta\delta$ までの非振動モードの周波数応答である. 図 6 (c) は操舵トルクからロール角までの振動モードの周波数応答を示し, 図 6 (d) は操舵トルクから操舵角までの振動モードの周波数応答を示している.

図 6 (a), (b) から, 大きなゲインを持つ実固有値 α_1, α_2 は, 非振動的なロール運動であるキャプサイズモードと考えられる. 操舵トルクからロール角までの周波数応答のゲインが, 操舵トルクから操舵角までのゲインより小さくなっていることより, 非振動モード α_1 は操舵角への寄与が大きい. 非振動モード α_2 は, 逆に操舵トルクからロール角までのゲインが操舵トルクから操舵角までのゲインより大きくなっていることより, ロール角への寄与が大きい. 非振動モード α_3 の周波数応答のゲインは, α_1, α_2 に比べ非常に小さい.

振動モード β_1 は, 図 6 (c), (d) において共に周波数応答のゲインが高く, 固有振動数が 1 Hz 付近であることより, ウィーブモードと考えられる. 振動モード β_2 に関して, 図 6 (d) の操舵トルクから操舵角までの周波数応答のゲインが大きく, 図 6 (c) の操舵トルクからロール角までのゲインは小さい. 振動モード β_2 は, その固有振動数が約 4 Hz と低めであるが, ウォブルモードであると考えられる. 振動モード β_3 の固有振動数は約 0.7 Hz で, 操舵トルクからロール角までおよび操舵角までの周波数応答のゲインのピーク値は共に大きい. 図 6 (d) では, 低周波数領域での操舵トルクから操舵角までの周波数応答のゲインが小さいことより, 振動モード β_3 は, ライダ上体の振動モードと考えられる. 図 6 (c), (d) の振動モード β_4 の周波数応答のゲインは共に小さく, ロール角や操舵角への寄与を無視する事ができる. 振動モード β_5 は, 図 6 (d) に示されるとおり, 操舵トルクから操舵角までの周波数応答のゲインが約 4 Hz で高くなっている. このため, 振動モード β_5 は操舵角へ寄与する. 振動モード β_6 は, 図 6 (c), (d) 共に低周波数領域でのゲインが高く, ロール角と操舵角のどちらへも寄与する.

以上の固有値解析と周波数応答解析の結果より, ロール角と操舵角への寄与が共に小さい非振動モード α_3 と振動モード β_4 を削除することで, 12 次の低次元化モデルを得る. 得られた低次元化モデルの実固有値 α_1, α_2 と複素固有値 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5$ および β_6 は, 次のとおりである.

$$\alpha_1 = -0.0233, \alpha_2 = -17.5, \beta_1 = 0.737 \pm j7.06, \beta_2 = -10.2 \pm j25.9, \beta_3 = -0.224 \pm j4.19, \beta_5 = -4.45 \pm j30.0, \beta_6 = -2.34 \pm j3.23.$$

得られた 12 次の低次元化モデルとフルオーダーモデルについて, 操舵トルク $\Delta\tau_f$ からロール角 $\Delta\theta_x$ までのゲイン線図を図 7 (a) に示す. また, 操舵トルク $\Delta\tau_f$ から操舵角 $\Delta\delta$ までのゲイン線図を図 7 (b) に示す. 図 7 (a), (b) より, 12 次の低次元化モデルは 10 Hz 付近までフルオーダーモデルとの高い整合性があることがわかる.

3・2 前輪操舵アシスト制御系設計

前節で得た 12 次の低次元化モデルに H_∞ 制御理論を適用し, 前輪操舵アシスト制御系を設計する. 図 8 に, H_∞ 制御系を設計するための一般化プラントを示す. 設計する制御系は操舵トルク $\Delta\tau_k$ を出力とし, ロールレート $\dot{\Delta\theta}_x$ をフィードバック入力とする. w_1 はステアリング軸まわりから入力されるトルク外乱, w_2 は観測ノイズを仮定し

たものである．観測ノイズ w_2 にかかる重み W_N は，0.1 に設定した． z_1, z_2 はそれぞれ，ロールレート $\dot{\Delta\theta}_x$ ，操舵トルク $\Delta\tau_{fc}$ に周波数重み関数 W_S, W_T をかけた評価量である．周波数重み関数 W_S, W_T をそれぞれ式(24), (25)に示す．

$$W_S = \frac{g_s \cdot \omega_s^2}{s^2 + 2\zeta_s \omega_s s + \omega_s^2}, \quad (24)$$

$$g_s = 6.72, \zeta_s = 1, \omega_s = 2\pi \times 1.5$$

$$W_T = \frac{g_t \cdot (s^2 + 2\zeta_{nt} \omega_{nt} s + \omega_{nt}^2)}{s^2 + 2\zeta_{dt} \omega_{dt} s + \omega_{dt}^2}, \quad (25)$$

$$g_t = 0.01, \zeta_{nt} = 1, \omega_{nt} = 2\pi \times 6.5,$$

$$\zeta_{dt} = 0.8, \omega_{dt} = 2\pi \times 200$$

ウィーブモードの固有振動数 1 Hz 程度までを制御帯域とするため，式(24)の周波数重み関数 W_S は極 ω_s を 1.5 Hz とするローパス型に設定した．また，図 7 に示した制御対象の周波数応答のゲイン線図のとおり 10 Hz 以上では低次元化モデルとフルオーダーモデルとの間にモデル化誤差が生じる．モデル化誤差のある帯域では操舵トルク $\Delta\tau_{fc}$ の大きさを抑制したいため，式(25)の周波数重み関数 W_T は，零点 ω_{nt} を 6.5 Hz とするハイパス型に設定した．また，制御器の実装を行う際は離散化を施すので，そのサンプリング時間を考慮し，式(25)の極 ω_{dt} を 200 Hz に設定した．式(24), (25)それぞれのゲイン g_s, g_t は，次章に示すシミュレーションを数回繰り返して適度な操舵トルクが得られるように調整し， $g_s=6.72, g_t=0.01$ に決定した．図 9 に周波数重み関数 W_S, W_T のゲイン線図を示す．図 10 には設計した H_∞ 制御器のゲイン線図を示す． W_S, W_T がそれぞれ 2 次の重み関数であるため，制御器の次数は 16 次となる．

Fig. 8 Generalized plant

 Fig. 9 Frequency-dependent weighting function of H_∞ controller

 Fig. 10 Gain diagram of H_∞ controller

4. 前輪操舵アシスト制御の検証

定常円旋回時におけるシミュレーションにより、3章で設計した前輪操舵アシスト制御の検証を行う。制御系設計時にタイヤ力特性として HT タイヤ力を用いて設計した制御器（以下、制御器 HT）と LC タイヤ力を仮定して設計した制御器（以下、制御器 LC）それぞれを用い、制御系設計の際に用いるタイヤ力特性の違いによる制御性能を比較する。制御器 HT は路面摩擦係数 0.55 として設計したが、LC タイヤの横力は路面摩擦係数の大きさに依存しないため、制御器 LC の設計には反映されない。シミュレーションを行う際の前輪操舵トルクへパルス幅 0.4 s、振幅 10 Nm の三角波状インパルス外乱を加えた。ここでも、ライダーは外乱が加わる前後で一定の前輪操舵トルクを与え続けるものとした。

図 11 に、路面摩擦係数を 0.8 としたときのシミュレーション結果を示す。図 11 (a)は、後輪フレームの重心位置の x - y 平面上での軌跡である。図 11 (b)は制御入力、(c)はロール角応答、(d)は操舵角応答、(e)は前輪のスリップ角応答、(f)は前輪の摩擦円である。図中の実線は制御器 HT による制御時、一点鎖線は制御器 LC による制御時、破線は非制御時の結果を表わす。

図 11 (b), (c)より、制御器 HT は最大値約 -7.5 Nm の制御入力によって、ロール角応答の振動幅を非制御時に比べ 58 %、制御器 LC に比べ 28 %抑制している。図 11 (d)より、操舵角応答の振動幅は非制御時に比べ 39 %抑制している。また、図 11 (e)から、制御器 LC による前輪のスリップ角応答の振動幅の低減は小さいが、制御器 HT は、非制御時に比べ 42 %低減していることがわかる。図 11 (f)より、前輪操舵アシスト制御によってスリップ角応答の振動幅が低減された結果、摩擦力の限界に対するタイヤ横力の余裕度が高められていることがわかる。

次に、図 12 に、路面摩擦係数を 0.55 としたシミュレーション結果を示す。図 12 (a)はロール角応答、図 12 (b)は前輪のスリップ角、図 12 (c)は前輪の摩擦円である。図 12 (a)より、制御器 HT はロール角応答の振動幅を、非制御時に比べ 60 %、制御器 LC に比べ 30 %抑制している。また、制御器 LC はロール角応答の振動を収束させる

Fig. 11 Simulation results of the front-steering assist control (velocity: 40 km/h, $\tau_f = -6.5$ Nm, $\mu_R = 0.8$)

Fig. 12 Simulation results of the front-steering assist control (velocity: 40 km/h, $\tau_{fr} = -6.5$ Nm, $\mu_R = 0.55$)

までに 4 s 以上を要するが、制御器 HT は 2 s 程度で収束させることができている。図 12 (b)より、制御器 HT はスリップ角の最大値を 3 度未満に低減し、スリップ角応答の振幅を制御器 LC に比べ 38 % 低減している。図 12(c)より、制御器 HT によってタイヤ横力の余裕度が高められていることがわかる。

図 11, 図 12 より、定常円旋回中の操舵軸周りのインパルス外乱に対し、前輪操舵アシスト制御の効果を確認することができた。線形性を仮定した LC タイヤ力を用いた制御器 LC でも、ある程度の制御効果は期待できるが、更に、制御系設計時にタイヤ力の非線形特性を考慮することで制御性能が向上し、特に制御器 HT ではタイヤ横力の余裕度も高められることが確認できた。

5. 結 言

本論文では、タイヤコーナリングフォースの非線形特性を考慮したライダー - 二輪自動車系に対して、前輪操舵アシスト制御系の設計を行った。まず、マジックフォーミュラの有するタイヤ力の非線形特性を双曲線正接関数を用いて近似することにより、ライダー - 二輪自動車系の非線形力学モデルを構築した。次に定常円旋回時の状態を平衡点としてそのまわりでの線形化を行い周波数応答解析と固有値解析を施し、低次元化モデルを導出した上で、 H_∞ 制御を用いて前輪操舵アシスト制御系を設計した。ライダーが一定の前輪操舵トルクを与え続けるものとして、摩擦係数の低い路面での車速 40 km/h、ロール角約 20 度における定常円旋回中に操舵軸まわりへインパルス外乱を与えるシミュレーションを行った結果、以下の結論を得た。

(1) 10 Nm を下回る制御トルク入力によって、非制御時に 27 度に達するロール角応答を振幅で 60 % 抑制できることを示し、前輪操舵アシスト制御が有効に機能することを確認した。

(2) タイヤ力として線形性を仮定した従来の制御器を用いた場合にも、摩擦力の限界に対するタイヤ横力の余裕度が高められるものの、本論文で設計した制御器を用いることで、更にロール角応答を振幅で約 30 % 抑制し、スリップ角応答の振幅で約 40 % 低減することを示した。

本論文では、突発的な外乱が印加されてもライダーは一定の前輪操舵トルクを与え続けると仮定したが、今後は、ライダーがこれに反応し補償操縦を行う動作モデルを検討するとともに、これを用いて、提案する前輪操舵アシスト制御系の評価を行いたい。

謝 辞

研究成果の一部は文部科学省グローバル COE プログラム「環境共生・安全システムデザインの先導拠点」によるものであることを記し、謝意を表す。

文 献

- (1) 鎌田豊, 西村秀和, “計算機支援機構解析による二輪車のモデル同定と前輪操舵制御”, 日本機械学会論文集, C 編, Vol. 69, No. 681 (2003), pp. 1309-1316.
- (2) 鎌田豊, 西村秀和, 飯田英邦, “二輪車のシステム同定と前輪操舵制御”, 日本機械学会論文集, C 編, Vol. 69, No. 688 (2003), pp. 3191-3197.
- (3) 朱紹鵬, 西村秀和, 岩松俊介, 田島洋, “マルチボディダイナミクス理論による二輪自動車の運動解析”, 日本機械学会論文集, C 編, Vol. 73, No. 728 (2007), pp. 1067-1074.
- (4) 朱紹鵬, 西村秀和, “二輪自動車の姿勢安定化制御システム (低速定常円旋回時の前輪操舵アシスト制御)”, 日本機械学会論文集, C 編, Vol. 75, No. 753 (2009), pp. 1336-1345.
- (5) Zhu, S., Nishimura, H., Iwamatsu, S. and Tajima, H., “Dynamical Analysis of Motorcycle by Multibody Dynamics Approach”, *Journal of System Design and Dynamics, Special Issue on Nonlinear Dynamics in Mechanical Systems*, Vol.2, No. 3 (2008), pp. 703-714.
- (6) 朱紹鵬, 西村秀和, “ライドによる最適な操縦と危険回避のためのアシスト制御”, 日本機械学会, Dynamics and Design Conference 2009 (2009), 642.pdf.
- (7) Pacejka, H. B., *Tyre and Vehicle Dynamics* (2002), Butterworth Heinemann, Oxford.
- (8) Sharp, R.S., Evangelou, S. and Limebeer, D.J.N., “Advances in the Modeling of Motorcycle Dynamics”, *Multibody System Dynamics*, Vol. 12 (2004), pp. 251-283.
- (9) 宮坂匠悟, 深尾隆則, 足立紀彦, “アクティブステアリングのためのハイブリッド制御系設計法”, 日本機械学会, Dynamics & Design Conference 2004 (2004), 224.pdf.
- (10) 永井正夫, 山中幸子, 斉藤安弘, 平野豊, “後輪操舵と制駆動力配分の統合制御の研究”, 自動車技術会学術講演会前刷集 972 (1997), pp. 29-32.
- (11) 景山一郎, 向後明彦, “二輪車のハンドル系における人間の要素”, 日本機械学会論文集, C 編, Vol. 50, No. 458, (1984), pp. 2037-2045.
- (12) 二輪車の運動特性専門委員会編, 二輪車の運動特性とそれを取りまく環境, 技術報告シリーズ 25 (1997), 自動車技術会.
- (13) 田島洋, マルチボディダイナミクスの基礎-3 次元運動方程式の立て方, (2006), 東京電機大学出版局.
- (14) Hori, Y., “Future Vehicle Driven by Electricity and Control -Research on 4 Wheel Motored “UOT March II””, *Proceedings of AMC* (2002), pp. 1-14.
- (15) 二輪自動車-操だ過渡応答試験方法, JASO T012 (2005), 自動車技術会.
- (16) Sharp, R.S., “The Stability and Control of Motorcycles”, *Journal Mechanical Engineering Science*, Vol. 13, No. 5 (1971), pp. 316-329.