一振動子に結合された二体衝突振動系の内部共振によるエネルギー移動に起因した周期的な Graze 現象*

高田 宗一朗^{*1}, 小竹 茂夫^{*2}, 鈴木 泰之^{*2}

Periodic Graze Phenomena Caused by Energy Transfer between Two Globally Coupled Vibro-Impact Oscillators

Soichiro TAKATA^{*1}, Shigeo KOTAKE and Yasuyuki SUZUKI

^{*1}NEC Corporation Central Research Laboratories,
1753 Shimonumabe Nakaharaku, Kawasaki-shi, Kanagawa, 211-8666 Japan

We study grazing impact of some specific globally coupled multi-vibro-impact oscillators which is inherent Grover wave algorithm. Periodic energy transfer is caused from an internal resonance between a globally coupled small impact oscillator and a small non-impact one. Decrease of kinetic energy from the small impact oscillator by the energy transfer can cause periodic grazing impacts of the oscillator near zero velocity. We derived the condition of perfect zero-velocity graze impact from the wave algorithm. Trace of impact map in Bloch sphere shows figure-of-eight orbit, which corresponds to the shift of two different impact modes at the graze impact. In addition, we found the case of clearance vibration under low velocity. The clearance vibration is achieved by controlling external impact.

Key Words : Coupled Vibration, Nonlinear Vibration, Method of Vibration Analysis, Wave Algorithm

1. 結 言

プレス加工機⁽¹⁾や原子炉炉心の燃料棒群⁽²⁾など実用的な機械現象に現れる衝突振動は、強い非線形性を持ちながらも、衝突から次の衝突までは線形な時間発展を有する区分線形システムとして取り扱われることから、非線形システムを厳密に扱えるモデルとして研究されてきた。

一方、速度0付近の衝突である Graze 衝突は Grazing 分岐と呼ばれる分岐現象が発生することが知られている^{(3),(4)}。Grazing 分岐を解析する写像としては、Nordmark が提案した Nordmark map^{(3),(4)}が有名であり、その後 Lamba, Chin らにより精力的に研究が行われ、周期倍分岐やカオスの存在などが明らかになっている^{(5),(6)}。衝突減衰器⁽⁷⁾を利用する場合、Graze 衝突の発生に伴う系の振動形態の質的な変化により、十分な制振効果が得られない可能性があり、これらの現象をより定量的に理解する必要がある。

しかしこれまでの Graze 衝突に関する研究では、一自由度強制振動系を対象にしたものが多く、大域的に結合した多自由度系を対象にしたものが少なかった。また Graze 衝突が発生する原因や分岐の特徴を明らかにする解析的な研究はあまりされてこなかった。

我々はこれまで、一つの大振動子に二つの小振動子が並列に結合された三自由度系における平衡位置での衝突振動問題を Grover 波動アルゴリズム^{(8),(9)}の観点から研究をおこなってきた⁽¹⁰⁾。それにより小振動子間に周期的な運動エネルギー移動による概周期振動が発生することを確認した。小振動子間の周期的な運動エネルギー移動は、一方の小振動子の運動エネルギーを 0 に近づけることから、同じ波動アルゴリズムにより、Graze 衝突が引き起こされる可能性がある。

本報では、前報⁽¹⁰⁾で扱った三体衝突振動系のモデルを、衝突位置を任意とする場合に拡張することにより、Graze

* 原稿受付 2010 年 11 月 11 日

^{*1} 正員, 日本電気(株)中央研究所 システム実装研究所 (〒211-8666 神奈川県川崎市中原区下沼部 1753)

^{*2} 正員, 三重大学大学院 工学研究科 (〒514-8507 三重県津市栗真町屋町 1577)

E-mail: s-takata@ce.jp.nec.com

衝突が発生する原因について、波動アルゴリズムの観点から解析的な議論をおこない、衝突速度が完全に 0 となる完全 Graze 衝突が発生する条件を導出する。さらに Bloch map 上の軌道から二種類の衝突モードが存在することを示し、Graze 衝突前後で衝突モードの切替えが発生することを明らかにする。最後に外部制御によるがた振動の制御の可能性について言及する。

2. 主な記号・単位

E	: 大振動子の全エネルギー [J]
ε_1	: 衝突小振動子の全エネルギー [J]
ε_2	: 非衝突小振動子の全エネルギー [J]
K	: 大振動子のばね定数 [N/m]
k_1	: 衝突小振動子のばね定数 [N/m]
k_2	: 非衝突小振動子のばね定数 [N/m]
M	: 大振動子の質量 [kg]
m_1	: 衝突小振動子の質量 [kg]
m_2	: 非衝突小振動子の質量 [kg]
t	: 時間 [s]
Δt	: 衝突周期 [s]
X	: 大振動子の位置 [m]
x_1	: 衝突小振動子の位置 [m]
x_2	: 非衝突小振動子の位置 [m]
V	: 大振動子の速度 [m/s]
v_1	: 衝突小振動子の速度 [m/s]
v_2	: 非衝突小振動子の速度 [m/s]

3. 一振動子に結合された二体衝突振動系

3・1 三体衝突振動モデル

図 1 に本研究において対象とする三体衝突振動系のモデルを示す。本モデルでは質量 M 、ばね定数 K を持つ大振動子に対し、質量 m_1 、ばね定数 k_1 を持つ衝突小振動子と質量 m_2 、ばね定数 k_2 を持つ非衝突小振動子が並列に結合している。各振動子の平衡位置からの変位を位置とし、大振動子の位置を X 、衝突小振動子の位置を x_1 、非衝突小振動子の位置を x_2 とする。また小振動子全体の質量中心の位置を $\bar{x} = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2)$ として定義する。衝突小振動子には、ある衝突周期 Δt で外部の壁から衝突を与える。これは外部から制御された機構によって出し入れが可能な衝突壁が存在するものとし、一般的に衝突振動において議論される固定壁とは異なるが、衝突時刻と衝突位置は解析的に決まるため、外部からの制御が可能となる。この時の衝突条件は完全弾性衝突とし、衝突位置に関しては後述する条件によって決まる。

代表時間は $T_r = \sqrt{m_1 / k_1}$ 、代表長さは単位長さとし、 m_1 を代表質量とすることにより、無次元化した各振動子の運動方程式が次式で与えられる。

$$\begin{cases} M^* \ddot{X}^* = -\{K^* + \gamma + 1\}X^* + x_1^* + \sqrt{\gamma}x_2^* \\ \ddot{x}_1^* = -x_1^* + X^* \\ \ddot{x}_2^* = -x_2^* + \sqrt{\gamma}X^* \end{cases} \quad (1)$$

ここで $\cdot = d/dt^*$ は無次元化時間による微分である。また本モデルにおいては衝突小振動子と非衝突小振動子は同じ固有振動数を持つとし、ばね定数比および質量比の間に $k_2 = \gamma k_1$ 、 $m_2 = \gamma m_1$ の関係があるとした。また無次

元化後の大振動子のばね定数と質量は, $K^* = K/k_1$, $M^* = M/m_1$ である. さらに無次元化した運動方程式に対し, $[x_1^*, \sqrt{\gamma}x_2^*] \rightarrow [x_1^*, x_2^*]$ とする座標変換を施した. 以上の系において, 固有角振動数は

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{K^* + \gamma + 1}{M^*} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{K^* + \gamma + 1}{M^*} \right)^2 - \frac{K^*}{M^*}}$$

$$\omega_t^2 = 1 \quad (2)$$

となる.

Fig. 1 Multi-vibro-impact system with two identical small oscillators coupled to one large oscillator

3・2 Grover 量子アルゴリズムと波動アルゴリズムの関係

Grover アルゴリズムとは, 複数のファイルの中から任意のファイルを選び出す検索アルゴリズムであり, 量子コンピュータを走る量子ビットの計算手順である量子アルゴリズムとして提案された. いま N 個のファイルを波動関数の状態 $|i\rangle$, ($i=1 \sim N$) によって対応させ, 初期値の状態 $|s\rangle$ を N によって規格化された以下の重ね合わせによって表現する.

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |i\rangle \quad (3)$$

いま検索対象のファイルの波動関数を $|\tau\rangle$, それ以外のファイルの波動関数を $|\hat{\tau}\rangle$ とすると, 初期状態は

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} |\tau\rangle + \sqrt{\frac{N-1}{N}} |\hat{\tau}\rangle \quad (4)$$

となる. 次に $|\tau\rangle$ の状態のみ位相を ϕ ずらす演算子 U_t と, $|s\rangle$ の状態のみ位相を θ ずらす変換を任意の直交変換 P とその逆変換 P^{-1} で挟んだ演算子 U_s を定義する⁽¹⁾.

$$U_t = I - (1 - e^{j\phi}) |\tau\rangle\langle\tau| \quad (5)$$

$$U_s = P^{-1} \{ I - (1 - e^{j\theta}) |s\rangle\langle s| \} P \quad (6)$$

ここで記号 $\langle \bullet | \bullet \rangle$ は $|\bullet\rangle$ の複素共役転置である。Grover 量子アルゴリズムは、式(4)で表される $|\tau\rangle$ と $|\hat{\tau}\rangle$ の重ね合わせ状態に演算子 U_l と U_s を交互に掛け合わせることで表現される。 ϕ と θ が π の場合には、 U_l は検索ファイルの位相を π ずらし、 U_s はファイルの平均値に対する π 反転となることから、検索ファイルの波動関数の振幅が増加し、非検索ファイルの波動関数の振幅は減少する。よって適切な回数の演算操作後に検索ファイルのみが観測可能となる。

一方、Grover アルゴリズムは、古典的な波動現象であっても同様に成り立つ。本研究における三体振動系に現れる Grover アルゴリズムは、最初 Patel⁽⁸⁾によって報告された。大振動子に対して並列に取り付けられた小振動子の重心位置の速度は、衝突小振動子と非衝突小振動子の重ね合わせとして表される。

$$\bar{v} \approx \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}} v_1^* + \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}} v_2^* \quad (7)$$

また小振動子の周期時間による系の時間発展は、全小振動子の速度平均に対する π 反転である時間発展演算子 (U_s) として働き、弾性衝突は、衝突小振動子のみ位相を π ずらす衝突演算子 (U_l) として働くことから、Grover アルゴリズムにより衝突小振動子の速度が増加し、非衝突小振動子の速度が減少する運動エネルギーの移動が生じる。一般に波動アルゴリズムは、量子ビット間のエンタングルメントの重ね合わせからなる一量子状態を用いて表される。そのため、観測における波束の収縮等、量子的な性質を持つ。一方、波動アルゴリズムは、多数のコヒーレントな状態の集合である古典的な波を扱い、古典的な力学⁽¹²⁾、振動⁽¹³⁾や波動現象⁽¹⁴⁾に適用することができる。本論文で取り上げる振動現象が、エンタングルや波束の収縮といった量子的な性質を持たないことから、本研究における Grover アルゴリズムを波動アルゴリズムと呼び区別する。

4. 状態遷移行列と波動アルゴリズム

我々は前報⁽¹⁰⁾の概周期振動についての解析から、図1の衝突小振動子と非衝突小振動子間に Grover 波動アルゴリズムが成り立つ条件として、系の持つ固有振動数の比が有理数 $\omega_+ = e/f$, $\omega_- = g/f$ によって表される内部共振を有すること、無次元衝突周期 Δt^* との間に $(e-g)\Delta t^* = 2\pi fq$ (q は任意の自然数) の関係が成り立つ必要があることを示した。その際、衝突および時間発展演算子を複素状態遷移行列⁽¹⁰⁾によって表し、Grover アルゴリズムの形式と一致するように各行列要素の条件を定めた。また $\Delta t^* = 2\pi$ の離散力学系においては、行列要素が実数となることが分かった⁽¹⁰⁾。本論文では、解析を $\Delta t^* = 2\pi$ の離散力学系に限定することにより、衝突および時間発展演算子を実状態遷移行列とし、速度および位置を実状態ベクトルとすることにより、より実際の物理量に近い形で Graze 衝突現象の解析を試みる⁽¹⁵⁾。

位置状態ベクトル $[X^*, x_1^*, x_2^*]$ もしくは速度状態ベクトル $[V^*, v_1^*, v_2^*]$ に作用する時間発展による状態遷移行列 (時間発展演算子) は以下に示す実数行列となる⁽¹¹⁾。

$$U_s = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma-1}{\gamma+1} & -\frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} & \frac{1-\gamma}{\gamma+1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

この条件下では、離散時間において、二小振動子系間の相互作用が大振動子の状態から切り離され、振動が単純化される。

また衝突による状態遷移行列（衝突演算子）は速度状態ベクトルのみに作用する演算子として次式のように表される。

$$U_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

以上の演算子によって、状態ベクトル^t $[X^*, x_1^*, x_2^*, V^*, v_1^*, v_2^*]$ に作用する衝突振動演算子が得られる。

$$U = \begin{bmatrix} U_s & 0 \\ 0 & U_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & U_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_s & 0 \\ 0 & U_s U_t \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで E は単位行列である。衝突振動演算子は今回のモデルにおける毎衝突時の離散力学系を記述する状態遷移行列であり、演算子の並びには位置に関する規則性と、速度に関する規則性が内在している。速度状態ベクトルに対して作用する $U_s U_t$ は、反転操作 U_t と平均に対する反転操作 U_s によって構成されることから、これらの操作は Patel⁽⁸⁾が示すように Grover アルゴリズムを実現し、小振動子全体の運動エネルギーを特定の小振動子に集めることができる。

式(8)のサブシステムから、 n 回目の衝突時の速度を与える漸化式は以下のように導かれる。

$$V^*[n] = (-1)^n V^*[0] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} v_1^*[n] &= (-1)^n \cdot \cos[n \cdot \tan^{-1}[2\sqrt{\gamma}/\gamma - 1]] v_1^*[0] \\ &\quad + (-1)^n \cdot \sin[n \cdot \tan^{-1}[2\sqrt{\gamma}/\gamma - 1]] v_2^*[0] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} v_2^*[n] &= -(-1)^n \cdot \sin[n \cdot \tan^{-1}[2\sqrt{\gamma}/\gamma - 1]] v_1^*[0] \\ &\quad + (-1)^n \cdot \cos[n \cdot \tan^{-1}[2\sqrt{\gamma}/\gamma - 1]] v_2^*[0] \end{aligned} \quad (13)$$

Grover アルゴリズムによる小振動子間の運動エネルギー移動を確認するため、初期条件 $v_1^*[0]=1$ 、 $v_2^*[0]=1/\sqrt{\gamma}$ の条件下における各小振動子の衝突時の速度の時間変化を図2に示す。図中●は衝突小振動子の速度 v_1^* 、□は非衝突小振動子の速度 v_2^* である。図2より衝突時の衝突小振動子と非衝突小振動子の速度は、同振動数で位相が π ずれた周期的な変化を示すことがわかる。また式(11)～(13)より、これらの速度は、衝突位置に依存しない。衝突小振動子の速度が最大となる時点において、非衝突小振動子の速度は最小になり、その逆も成り立つ。これらの特徴的な現象は、前報⁽¹⁰⁾において議論をおこなった概周期振動であり、二小振動子間で運動エネルギーが周期的に交換される。

一方、位置状態ベクトルは時間発展演算子 U_s のみに支配されることから、各小振動子の衝突位置は時間発展によって小振動子間の重心位置に対して対称な点を行き来する。式(9)のサブシステムから n 回目の衝突時の位置を与える漸化式は以下のように表される。

$$X^*[n] = (-1)^n X^*[0] \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
x_1^*[n] &= \{((-1)^n + \gamma)/(1 + \gamma)\} \cdot x_1^*[0] \\
&\quad + \{((-1)^n - 1)\sqrt{\gamma}/(1 + \gamma)\} \cdot x_2^*[0] \\
&= x_1^*[0] + \{(-1)^n - 1\} \cdot \bar{x}^*[0]
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
x_2^*[n] &= \{\sqrt{\gamma} \cdot (-1 + (-1)^n)/(1 + \gamma)\} \cdot x_1^*[0] \\
&\quad + \{(1 + \gamma \cdot (-1)^n)/(1 + \gamma)\} \cdot x_2^*[0] \\
&= x_2^*[0] + \{(-1)^n - 1\}\sqrt{\gamma} \cdot \bar{x}^*[0]
\end{aligned} \tag{16}$$

ここで、無次元化された小振動子間の重心位置は $\bar{x}^* = (x_1^* + \sqrt{\gamma}x_2^*)/(\gamma + 1)$ と表される。式(15), (16)より各小振動子の衝突時の位置は一点、または二点に限られることがわかる。なお、前述した各固有振動数の比が内部共振条件を有すること、ならびに $(e - g)\Delta t^* = 2\pi f q$ の条件が成り立つ場合において⁽¹⁰⁾、 $\Delta t^* = 2\pi$ の離散時間における二小振動子間の相互作用は大振動子と切り離された二体問題となることにより、二小振動子の初期位置が衝突位置と等しくなる。

Fig.2 Dependence of discrete velocity at the impact moment to the number of operation

5. Impact map の定義

前報⁽¹⁰⁾でも示したように二小振動子の離散力学系における相互関係を視覚的に表すツールとして、Impact Map である Bloch 球表示 (Bloch Map : BM) を導入する。Bloch 球の北極は衝突小振動子に運動エネルギーが集中した状態 $|\tau\rangle$ を意味し、南極は非衝突小振動子に運動エネルギーが集中した状態 $|\hat{\tau}\rangle$ を意味する。また各小振動子が質量に比例した運動エネルギーを持つ状態を $|s\rangle$ とする。式(17)~(21)に示す各小振動子の位相平面の位相 ϕ_i の差を経度 ϕ 、各位相平面の振幅 R_i の比から北極よりとった緯度 2θ から、Bloch 球表示を定義することにより、各時刻での二小振動子からなる状態ベクトルを点 (x, y, z) により表現する。

$$\phi_i = \tan^{-1}[v_i^* / x_i^*] \tag{17}$$

$$R_i = \sqrt{x_i^{*2} + v_i^{*2}} \tag{18}$$

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 \tag{19}$$

$$\theta = \tan^{-1}[R_2 / R_1] \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
x &= \cos(\phi) \sin(2\theta) \\
y &= \sin(\phi) \sin(2\theta) \\
z &= \cos(2\theta)
\end{aligned} \tag{21}$$

6. Impact map 上の軌道

6・1 衝突位置が平衡位置である場合

固有角振動数 $\omega_+ = 2.5$, $\omega_- = 0.5$, 質量比 $\gamma = 99$, 衝突周期 $\Delta t = 2\pi$, 初期条件 $X(0) = 0$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $V(0) = 1$, $v_1(0) = 1$, $v_2(0) = 1$ の下で計算した各振動子の位置の時間変化を図 3 に示す. 図中の上段に大振動子の位置 X , 中段に衝突小振動子の位置 x_1 , 下段に非衝突小振動子の位置 x_2 を示す. 図 3 より, 衝突小振動子の位置に緩やかな振幅の変調が観察される.

小振動子の衝突瞬間における離散的な状態ベクトルを抽出した Impact Map を図 4 の BM に示す. 衝突瞬間の各状態は, $|\tau\rangle$ と $|\hat{\tau}\rangle$ を結ぶ大円を一定角度で回転することから, 衝突小振動子と非衝突小振動子間に運動エネルギーが移動する周期的な概周期振動⁽¹⁰⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾であることがわかる. ここで運動エネルギーが完全に移動するためには, 質量比 γ は正の実数で $\gamma \geq 4$ または $0 \leq \gamma \leq 0.25$ であれば任意に選ぶことができる⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾.

Fig.3 Energy transfer between small oscillators impacting at balanced position

Fig.4 Bloch Map notation of the system with impacting at balanced position

6・2 衝突位置が平衡位置からずれた場合

二小振動子の衝突位置を平衡位置から同じだけずらした場合 ($x_1(0) = x_2(0) \neq 0$) について考える. 代表例として, 角振動数 $\omega_+ = 2.5$, $\omega_- = 0.5$, 質量比 $\gamma = 99$, 衝突周期 $\Delta t = 2\pi$, 初期条件が $X(0) = 1$, $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 5$,

$V(0)=1$, $v_1(0)=1$, $v_2(0)=1$ の下で計算した各振動子の位置の時間変化を図 5 に示す. 図中の上段に大振動子の位置 X , 中段に衝突小振動子の位置 x_1 , 下段に非衝突小振動子の位置 x_2 を示す.

図 5 の衝突小振動子の位置 x_1 の波形において時刻 t が 0s から 100s の間では小さい概周期振動の波形が, また 100s から 200s の間では大きな概周期振動の波形が観察され, それ以降は両者が繰り返し交互に発生した. この時, 非衝突小振動子の位置 x_2 は概周期振動によって緩やかな振幅の変調を伴うが, 概周期波形の振幅の大小は見られなかった. 以後, 衝突小振動子の位置の振幅が小さい概周期振動波形をタイプ I, 大きな概周期振動波形をタイプ II として区別する. 図 6 に角振動数 $\omega_+ = 2.5$, $\omega_- = 0.5$, 質量比 $\gamma = 99$, 衝突周期 $\Delta t = 2\pi$, 初期条件が $X(0)=1$, $x_1(0)=0.8$, $x_2(0)=0.8$, $V(0)=1$, $v_1(0)=1$, $v_2(0)=1$ の下で計算した衝突瞬間の各小振動子の状態ベクトルを BM 上に示す. その結果, BM における状態ベクトルの軌跡は八の字型の軌道を示した. 図 6 の各点を追って解析したところ, 概周期振動波形タイプ I の概周期振動は図中 A で示す軌道に対応し, この振動の間, 二小振動子間の位相差は $-\pi$ から 0 の間で推移した. 衝突小振動子の運動エネルギーが最大となる状態は A 軌道の頂点に対応し, その後, 状態ベクトルは八の字軌道の交点に向かった.

軌道の交点付近に戻った状態ベクトルは, その後, 図中 B で示す軌道に移動した. B 軌道は振幅がより大きなタイプ II の概周期振動に対応する. この領域では二小振動子間の位相差は 0 から π の間で推移した. 軌道 B を通った後に, 状態ベクトルは八の字軌道の交点付近に戻り, 再び軌道 A に戻った. Bloch 球の定義より軌道 A と軌道 B の交点付近の状態ベクトルにおいては, 衝突小振動子の速度が 0 に近づく Graze 衝突が発生していることがわかる.

Fig.5 Positional change of the system with arbitrary impacting position

Fig.6 Figure of eight orbit at the Bloch Map of the system with arbitrary impacting position

7. 2つのタイプの概周期振動に現れる衝突モードの特徴

7・1 数値計算による特徴抽出

タイプⅠとタイプⅡの概周期振動における衝突モードの特徴を理解するために、二小振動子の初期状態の運動エネルギーが位置エネルギーに比べて十分に小さい場合について計算を行う。この場合、概周期振動による運動エネルギーの移動が振動全体に与える影響を小さくでき、波形から衝突時の特徴を明らかにすることができる。例として、角振動数 $\omega_+ = 2.5$, $\omega_- = 0.5$, 質量比 $\gamma = 99$, 衝突周期 $\Delta t = 2\pi$, 初期条件 $X(0) = 1$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $V(0) = 1$, $v_1(0) = 0.1$, $v_2(0) = 0.1$ の条件の下における各振動子の位置の時間変化を図7に示す。図中、上段に大振動子の位置 X , 中段に衝突小振動子の位置 x_1 , 下段に非衝突小振動子の位置 x_2 を示す。

図7よりタイプⅠの領域では衝突小振動子が両衝突位置の内部で衝突を繰り返すがた振動が観察された。一方、タイプⅡでは、衝突小振動子が両側の衝突位置を一旦通り過ぎて、外側から衝突する特異な振動形態を示した。タイプⅠとタイプⅡの衝突の様子を位相平面上により表現した(図8)。時間発展により状態ベクトルは時計回りに回転することを考慮すると、タイプⅠでは常に位相が進む衝突が現れ、タイプⅡでは位相が遅れる衝突が現れることが予想される。

Fig.7 Positional change of the system with arbitrary impacting position; in case of low velocity

Fig.8 Phase map of two type impact mode

7・2 Graze 衝突前後の衝突モードの変化

以下では、Graze 衝突前後の衝突モードについて、解析的な考察をおこなう。衝突位置が平衡位置からずれた場合、2つの衝突位置とその中間位置 $x_{ic} = x_1^*[0] - \bar{x}^*$ との間の変位は、式(15)より、以下のように表わされる。

$$x_1^*[n] - x_{ic} = x_1^*[n] - (x_1^*[0] - \bar{x}) = (-1)^n \cdot \bar{x} \quad (22)$$

一方、衝突小振動子の速度は、式(12)より、以下のように表わされる。

$$v_1^*[n] = (-1)^n \cdot (\cos[n \cdot X] v_1^*[0] + \sin[n \cdot X] v_2^*[0]) \quad (23)$$

ここで、 $X = \tan^{-1}[2\sqrt{\gamma/\gamma-1}]$ である。いまこれらの積により、以下の関数 $\eta[n]$ を定義する。

$$\eta[n] = \bar{x} \cdot (\cos[n \cdot X] v_1^*[0] + \sin[n \cdot X] v_2^*[0]) \quad (24)$$

タイプ I とタイプ II の振動モードの違いは衝突時の位相変化の違いであることから、タイプ I においては $\eta[n]$ が正、タイプ II においては $\eta[n]$ が負となる。よって、Graze 衝突前後の衝突モードの変化については、 $\eta[n]$ の符号の変化を調べればよい。

いま Graze 衝突を $n=0$ における起点とすると、 $v_1^*[0] \approx 0$ となることから、以下のように近似される。

$$\eta[n] \approx \bar{x} \cdot v_2^*[0] \cdot \sin[n \cdot X] \quad (25)$$

$2m\pi < nX < (2m+1)\pi$ においては (m は整数)、 $\sin[n \cdot X] > 0$ となることから、 $\eta[n]$ の符号は $\bar{x} \cdot v_2^*[0]$ の符号に等

しくなる。他方、 $(2m-1)\pi < nX < 2m\pi$ においては、 $\sin[n \cdot X] < 0$ となることから、 $\eta[n]$ の符号は $\bar{x} \cdot v_2^*[0]$ の符

号と反対になる。 nX が π の整数倍になる付近では、Graze 衝突が発生することから、Graze 衝突を基準として衝突モードが変化し、各 Graze 衝突間では衝突モードが保たれることがわかる。各タイプの衝突状態の模式図を図 1 と対応させて図 9 に示す。

Fig.9 Two type impact mode of the multi-vibro-impact system

8. 周期的な完全 Graze 衝突の発生条件

8・1 完全な Graze 衝突が発生する条件

6章で述べたように、今回の系においては、衝突小振動子と非衝突小振動子の間に周期的な運動エネルギーの交換が発生する。小振動子全体の運動エネルギーの大部分が非衝突小振動子に集中している状態においては衝突小振動子の速度が0付近となるため Graze 衝突が発生する。しかし、一般には衝突時の速度は小さくなるものの完全に0となるわけではない。そこで、この章では衝突小振動子の衝突における速度が厳密に0となる完全な Graze 衝突が発生する条件を導出する。

式(12), (13)の漸化式から、演算子を j 回 (j は整数) 作用させた際に衝突小振動子の速度が0となる場合において、衝突小振動子と非衝突小振動子の初期速度の間に次の関係が成り立つ。

$$v_1^*(0) = -v_2^*(0) \cdot \tan[j \cdot \tan^{-1}[\frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1}]] \quad (26)$$

次に、初期条件が式(26)を満たす場合において、完全 Graze 衝突が発生するかについて、数値計算により確認をおこなう。計算条件は角振動数 $\omega_+ = 2.5, \omega_- = 0.5$, 質量比 $\gamma = 15$, 衝突周期 $\Delta t = 2\pi$, 初期条件 $X(0) = 1, x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, V(0) = 1, v_1(0) = -16.46, v_2(0) = 2.06, j = 3$ である。衝突小振動子の Graze 衝突付近での時間変化 (0s~50s) を図10に示す。この図から、25.1sにおいて速度が0の完全な Graze 衝突が発生していることが確認できる。完全な Graze 衝突前後の区間解の波形が示す特徴として、変曲点型の波形を有することが挙げられる。この変曲点型の波形は6章でも示した通り, Graze 衝突による衝突のモードの切り替えを表すものと考えられる。

Fig.10 Positional change of the system with arbitrary impacting position; in case of perfect graze impact

8・2 周期的な完全 Graze 衝突の発生条件

前節で求めた式(26)の条件に加え、系の振動が再帰性を持つ条件を付与することにより、完全 Graze 衝突が周期的に発生する条件を求めることができる。式(12), (13)よりで表されるように速度状態ベクトルに掛る衝突振動演算子 $U_s U_i$ の小振動子間のサブシステムである状態遷移行列要素は回転行列として働く。式(12), (13)より演算子が一回作用したときの回転角は $\tan^{-1}[2\sqrt{\gamma}/\gamma-1]$ であることから、 N_1 回作用した時にちょうど Bloch 球を N_2 回転する条件として (N_1, N_2 は正整数), 以下の関係式が成り立つ。

$$\tan[\frac{\pi N_2}{N_1}] = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \quad (27)$$

式(27)より、系の振動が再帰性を持つための質量比の持つ条件は式(28)によって表される。ここで符号が正の場合は $\gamma > 1$ に、負の場合は $0 < \gamma < 1$ に対応する。

$$\gamma = \frac{(1 \pm \cos[\frac{\pi N_2}{N_1}])^2}{\sin^2[\frac{\pi N_2}{N_1}]} \quad (28)$$

式(27)と式(28)の条件より、完全 Graze 衝突が周期的に発生する条件は式(29)を満たす整数 N_1 , N_2 , j が存在する場合に限られる。

$$v_1^*(0) = -v_2^*(0) \cdot \tan[\frac{\pi N_2 j}{N_1}] \quad (29)$$

9. 衝突モードの制御による連続ながた振動の発生

一般に、がた振動に代表される固定された壁に対する衝突振動においては、衝突によって跳ぶ位相が正である場合に限られ、位相が遅れる衝突であるタイプ II 型衝突は発生しない。そこで、タイプ I 型の衝突振動が続く条件を導出することで、がた振動を波動アルゴリズムにより理解できる可能性がある。近年注目されている NES (Nonlinear Energy Sink) ^{(18),(19)}においても、がた振動を含む区分線形要素が用いられていることから、がた振動における運動エネルギー伝達機構の解明も期待される。以下では、衝突を制御することにより、タイプ I 型の衝突のみを発生させるアルゴリズムを導出する。

前述したように、図 4 の Bloch 球に現れる二つの擬小円からなる八の字軌道は、各擬小円軌道がそれぞれの衝突モードを表し、その交点は速度 0 である Graze 衝突点を表す。そのため、タイプ I 型のみ衝突を実現するには、状態ベクトルは一つの擬小円上にのみ軌道を描けば良いことになる。そこで、タイプ I 型の軌道からタイプ II 型の軌道に遷移する点 (Graze 衝突点) において、二小振動子間の位相差を変調させる操作を加えることでタイプ I 型の軌道のみ保持できると考えられることから、Graze 衝突の瞬間において非衝突小振動子に完全弾性衝突を加えてみる。一方の衝突小振動子の衝突瞬間に他方の小振動子に衝突を加えることは、一般には実現が困難な操作と考えられるが、今回の系においては、完全 Graze 衝突が $2\pi N_1$ ごとに発生することが知られており、またその際の各小振動子の位置も式(15), (16)によって定まるため、これを実現する制御を実現する可能性は大きいと考えられる。

ここで衝突小振動子に衝突させる演算子を U_{i1} , 非衝突小振動子に衝突させる演算子を U_{i2} とすると各状態遷移行列は次式で表される。

$$U_{i1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$U_{i2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

以上の演算子を用いると、衝突小振動子に加えて、Graze 衝突の瞬間においてのみ非衝突小振動子にも完全弾性衝突を与える波動アルゴリズムは次のように表される。ここで j は Graze 衝突に達するまでに要する衝突振動演算子の作用回数である。

$$\vec{v}' = \cdots (U_s U_n)(U_s U_{i2})(U_s U_n)' \vec{v}[0] \quad (32)$$

式(32)を満たす場合において数値計算をおこない各振動子の挙動を確認する．角振動数 $\omega_+ = 2.5, \omega_- = 0.5$ ，質量比 $\gamma = 99$ ，衝突周期 $\Delta t = 2\pi$ ，初期条件 $X(0)=1, x_1(0)=10, x_2(0)=10, V(0)=1, v_1(0)=1, v_2(0)=1$ の条件における各振動子の位置の時間変化を図 11 に示す．図中，上段に大振動子の位置 X ，中段に衝突小振動子の位置 x_1 ，下段に非衝突小振動子の位置 x_2 を示す．さらに衝突小振動子の位置と速度の時間変化を位相平面に示す（図 12）．

Fig.11 Positional change of the system with arbitrary impacting position in controlling to keep Type I impact

Fig.12 Phase diagram of impact small oscillation controlling to keep Type I impact

図 11, 12 から衝突小振動子は位置 x_1 が -10 から 10 の領域で繰り返し常に位相が進む衝突であるタイプ I 衝突が発生していることがわかる．また衝突小振動子の運動の軌跡が，-10 と 10 の衝突位置を越えていないことから，これは一般的な固定壁に見られるがた振動⁽¹⁷⁾に等しいと考えられる．しかしながら，本論文ではタイプ I 型の衝突が発生する条件を導出したのみであり，運動の軌跡が固定壁の位置を超えない厳密ながた振動の発生条件を導出するには至っていない．がた振動は機械工学上，重要な議論であるため，衝突モードの制御という立場からみたがた振動の発生条件については稿を改めて議論する．

次に衝突瞬間の小振動子の状態ベクトルの軌跡を図 13 の BM に示す．図 12 は図 6 の二つの擬小円からなる八の字軌道とは異なり，一つの擬小円軌道からなる状態に帰着している様子がわかる．また，BM 上の z 成分が周期的に変化していることから，タイプ I 型のみ軌道においても小振動子間の運動エネルギーの移動現象である概周期振動が発生していることがわかる．

以上の考察から，本波動アルゴリズムは，がた振動を含む区分線形要素を用いた制振機構⁽⁷⁾や Nonlinear Energy Sink^{(16),(17)}，振動エネルギーハーベスト装置といった機器への設計指針に役立つものと期待される．

Fig.13 Quasi small circle orbit in Bloch map only with Type I impact mode

10. 結 言

本研究では内部共振を有する一大振動子に結合された衝突小振動子と非衝突小振動子からなる系における Graze 衝突現象を Grover 波動アルゴリズムの観点から解析した。その結果、以下の結論を得た。

- (1) 今回考察した衝突振動系において、小振動子間の相互作用が大振動子から切り離される場合、衝突位置に依らず、小振動子間に周期的な運動エネルギーの移動が発生する。
- (2) 衝突モードには、衝突によって位相が進むタイプ I 型衝突と位相が遅れるタイプ II 型衝突が存在することが示唆された。
- (3) 衝突瞬間の小振動子の状態ベクトルを抽出し Bloch map 上に描いたところ、平衡位置以外で衝突する場合においては、軌道は二つの擬小円からなる八の字軌道を描き、各擬小円はタイプ I 型衝突とタイプ II 型衝突に対応した。
- (4) Graze 衝突の前後でタイプ I 型衝突とタイプ II 型衝突のモードの切り替えが発生した。
- (5) Graze 衝突は、小振動子間の運動エネルギーの移動により、衝突小振動子の運動エネルギーが 0 に近づく際に発生する。
- (6) 離散速度の漸化式から、完全に速度が 0 となる衝突である完全 Graze 衝突の発生条件を導出し、さらにこれが周期的に現れる条件を導出した。
- (7) Graze 衝突の瞬間において非衝突小振動子に衝突を加えることにより、タイプ I 型衝突のみの衝突を発生させるように系を制御できる可能性が示唆された。

謝 辞

本論文をまとめるにあたり、三重大学大学院工学研究科の芹澤洋介君と同大工学部の八木一憲君に式的確認をしていただいた。ここに感謝の意を表する。

文 献

- (1) 小泉邦雄, 横山泰男, “衝突振動をするハンマ (第 2 報): 最適設計法”, 精密機械, Vol. 49, No.11 (1983), pp. 1517-1521.
- (2) 堀内敏彦, 中川正紀, 笠井洋昭, “一次元配列の棒群の衝突振動解析”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 59, No.559 (1993), pp. 650-657.
- (3) Nodmark, A. B., “Non-Periodic Motion Caused by Grazing Incidence in an Impact Oscillator”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 145, No. 2(1991), pp. 279-297.

- (4) Nodmark, A. B., “Effects due to Low Velocity Impact in Mechanical Oscillators” , *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 2, No. 3(1992), pp. 597-605.
- (5) Lamba, H. and Budd, C., “Scaling of Lyapunov Exponents at Nonsmooth Bifurcations” , *Physical Review E*, Vol. 50, No. 50(1994), pp. 84-90.
- (6) Chin, W., Ott, E., Nusse, H.E., and Grebogi, C., “Grazing Bifurcation in Impact Oscillators” , *Physical Review E*, Vol. 50, No. 6(1994), pp. 4427-4444.
- (7) 小竹茂夫, “特定の振動子へのエネルギー移動を応用した原子力燃料棒の制振法—衝突減衰器による制振法—”, 日本機械学会 *Dynamics and Design Conference 2010 CD-ROM 論文集*, (2010), 424.
- (8) Patel, A. D., “Wave Algorithm: Optimal Database Search: Wave and Catalysis” , *International Journal of Quantum Information*, Vol.4, (2006), pp.815-825.
- (9) Grover, L. K., “Quantum Computers can Search Arbitrarily Large Databases by a Single Query” , *Physical Review Letter*, 79(23) (1997), pp.4709-4712.
- (10) 高田宗一郎, 小竹茂夫, 鈴木泰之, “一振動子に結合された内部共振衝突振動系に現れる周期的な完全概周期振動の波動アルゴリズムによる解析 (釣合位置で完全弾性衝突する場合)”, 日本機械学会論文集 C 編, in printing.
- (11) Long, G. L., “Grover Algorithm with Zero Theoretical Failure Rate” , *Physical Review A*, Vol. 64, (2001), 022307, pp. 1-4.
- (12) Zhang, J. and Lu, Z., “Similarity between Grover’s Quantum Search Algorithm and Classical Two-Body Collisions” , *American Journal of Physics*, Vol. 71, pp. 83-86.
- (13) Grover, L. K., Sengupta, A.M., “Classical Analog of Quantum Search” , *Physical Review A*, Vol. 65, (2002), 032319, pp. 1-4.
- (14) Bhattacharya, N., van Linden van den Heuvell, H. B. and Spreeuw, R. J. C., “Implementation of Quantum Search Algorithm using Classical Fourier Optics” , *Physical Review Letter*, 88(13) (2002), 137901, pp.1-4.
- (15) 高田宗一郎, 小竹茂夫, 鈴木泰之, “一振動子に結合された内部共振衝突振動系のエネルギー移動に起因した周期的な Graze 現象”, 日本機械学会 *Dynamics and Design Conference 2010 CD-ROM 論文集*, (2010), 233.
- (16) Kotake, S., Uchida, H. and Suzuki, Y., “Mechanism and Efficiency of Power Generation from Accumulating Spread-Coherent Energy” , *Proceedings of the International Conference on Power Engineering-2009*, No.09-205, Vol. 1(2009), pp.183-187.
- (17) 内田秀範, 小竹茂夫, 鈴木泰之, “Grover アルゴリズムによる空間コヒーレントな波動エネルギーの集中”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 76, No. 761 (2010), pp. 85-94.
- (18) Vakakis, A. F., Gendelman, O. V., Bergman, L. A., MaFarland, D. M., Kerschen, G. and Lee, Y. S., *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*, (2008), Springer.
- (19) Nucera, F., Vakakis, A. F., McFarland, D. M., Bergman, L. A. and Kerschen. G., “Targeted Energy Transfers in Vibro-Impact Oscillators for Seismic Mitigation” , *Nonlinear Dynamics*, Vol. 50 (2007), pp. 651-677.