狭い領域内で軸流を受ける弾性梁の限界流速近傍に与える 流体粘性, 構造減衰の安定化または不安定化効果*

藤田 勝久^{*1}, 大熊 歩^{*2}

Stabilization or Destabilization Effect of Fluid Viscosity, Structural Damping on the Vicinity of Critical Velocity of Elastic Beam Subjected to Axial Flow Confined in Narrow Passage

Katsuhisa FUJITA^{*1} and Ayumi OHKUMA

^{*1} Mechanical and Physical Engineering, Graduate School of Engineering, Osaka City Univ., 3-3-138 Sugimoto-cho, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585 Japan

The evaluation methodologies for the flow-induced vibration instability of a long flexible beam due to an axial flow confined in a narrow passage have been reported. In this paper, by using this proposed analytical method, the parameter-studies are performed on the dynamic stability of an elastic beam subjected to axial flow confined a narrow passage. The effects of support conditions of structures, structural damping, and fluid characteristics on the dynamic stability are clarified for the safety of dynamic design in industries. Especially, paying an attention on the vicinity of critical velocity, the effects as for stabilization or destabilization effect on flutter and divergence phenomena is investigated by changing fluid viscosity and structural damping.

Key Words : Flow Induced Vibration, Coupled Vibration, Axial Flow, Elastic Beam, Flutter, Divergence, Stabilization

1. 結 言

産業界の機械, 構造物において, 流体と構造物との間の相互作用により破壊的な振動が励起され, 大事故につながるものが経験されてきた. 特に最近, 高効率化や経年劣化などの技術課題に対して, 流体関連振動は克服しなければならない重要課題の一つである. そのなかでも, 原子力プラントの原子炉の炉心構造物, トンネル内を高速で通過する列車, 配管内を移動する検査ロボットなどでは, 構造物と周りの狭い流路内の流体が相互作用を起こしやすく, 狭い領域内であるがゆえに, その連成振動挙動は複雑になる. このような機械構造物については従来から数多くの研究⁽¹⁾⁻⁽⁹⁾がなされており, 著者らも既に狭い流路内で軸流を受ける軸対象弾性梁の振動挙動の研究を行っている^{(8), (10)-(13)}.

本報では, Euler-Bernoulli 型の偏微分方程式で与えられる梁の振動方程式と Navier-Stokes 方程式に境界層近似を施した式とを連立させ, 梁-流体の連成振動方程式を導出する. この振動方程式をもとに, 上流側固定の片持ち梁, 下流側固定の片持ち梁, 両端単純支持梁の 3 つの支持条件について安定性解析を行う. これらについては, すでに根軌跡, および不安定に突入したときの振動モードの変化などについて報告したが⁽¹³⁾, 流体粘性や構造減衰が系の安定性に与える影響が微妙に異なることに関連して, 限界流速の近傍までに着目して, 流体粘性を変えたときや構造減衰を変えたときのフラッターおよびダイバージェンスの限界流速に与える安定化, および不安定化効果について検討する.

* 原稿受付 2010 年 11 月 5 日

^{*1} 正員, フェロー, 大阪市立大学大学院工学研究科 (〒558-8585 大阪府大阪市住吉区杉本 3-3-138)

^{*2} 大阪市立大学大学院工学研究科 (現 コマツ)

E-mail: fujita@mech.eng.osaka-cu.ac.jp

2. 理 論

図1に示されるような狭い流路内で軸流を受ける梁状構造物を考える．外側の円筒は剛体，内側の円形断面の梁状構造物は軸対称の弾性体とする．流体はこの二つの物体間の狭い流路を流れる．なお，外側の構造体を弾性，内側を剛体としての取り扱いも同様に解析できる．また， U , V , W は各々円周方向，軸方向，半径方向の流速を示す．

Fig.1 Analysis models

内側の梁状構造物は，旋回流などのない軸流を受けるとし，図1の上下方向に振動すると仮定する．また，本研究では流路幅は梁の半径に比べて十分小さいと仮定し，弾性梁は図1の右図のように外側の円筒と同心状に配置されているとする．ここで， H はすきま幅（ $\bar{H}$ は定常すきま幅）， ΔH_0 は梁の変位， R_{out} は円筒の内半径， R_{in} は梁の半径である．また， X は円周方向， Y は軸方向に対応する．

図1に示す狭い流路内を流れる流体については，非圧縮性流体の連続の式と Navier-Stokes 方程式を用い，さらにこれは流量で展開することができる．また，図1に示す流路内の構造物には Euler-Bernoulli 梁の振動方程式を用いることにする．具体的な理論の展開は，参考文献(11)によっているが，式誘導の要旨と結果の式を以下に述べる．

図1に示す狭い流路内を流れる流体については，半径方向すきま幅は円筒の周方向長さに対して十分小さい場合を考えているので，環状すきま部分を直交座標に展開出来るとする．円筒座標系 (θ, Y, r) のかわりに直交座標系 (X, Y, Z) を用いる ($X=\theta R$, $Z=r-R$)．このとき，連続の式と Navier-Stokes 方程式はそれぞれつぎのようになる．

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} + W \frac{\partial V}{\partial Z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで， U , V , W はそれぞれ X , Y , Z 方向の流速でもあり， W は他の2つに比べて十分小さいとみなしている． P は圧力， ν は動粘性係数， ρ は流体密度である．いま，周方向 (X)，軸方向 (Y) の流量を，

$$Q_X = \int_0^H U dZ \quad Q_Y = \int_0^H V dZ \quad (3)$$

と定義する．式(1),(2)をすきま方向 (Z 方向)に積分し，式(3)の関係を適用すると，流量，すきま幅および圧力の間につぎのような関係式が得られる．

$$\frac{\partial Q_X}{\partial X} + \frac{\partial Q_Y}{\partial Y} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} &= -\frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial Q_X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Q_X^2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{Q_X Q_Y}{H} \right) + \frac{12\nu Q_X}{H^2} \right\} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} &= -\frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial Q_Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{Q_X Q_Y}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{Q_Y^2}{H} \right) + \frac{12\nu Q_Y}{H^2} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

一方、弾性梁の運動方程式は、つぎのような Euler-Bernoulli 梁の振動方程式で示される。

$$\rho_s A \frac{\partial^2 \Delta H_0(Y, t)}{\partial t^2} + c_s \frac{\partial \Delta H_0(Y, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 \Delta H_0(Y, t)}{\partial Y^4} = \Delta f(Y, t) \quad (6)$$

ここで、 ρ_s は弾性梁の密度、 A は弾性梁の断面積、 c_s は減衰係数、 E は縦弾性係数、 I は断面次モーメント、 ΔH_0 は梁の変位、そして Δf は梁に作用する流体力である。

これらの式(4), (5), (6) と境界条件を使って流体-梁の連成振動方程式を導出することができる。ここで、式(4), (5)は非線形であるため、すきま、圧力および流量をつぎのように定常部分と非定常部分に分けて考える。

$$\begin{aligned} H &= \bar{H} + \Delta H(X, Y, t) & P &= \bar{P}(Y) + \Delta P(X, Y, t) \\ Q_X &= \Delta Q_X(X, Y, t) & Q_Y &= \bar{Q}_Y + \Delta Q_Y(X, Y, t) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、流体の周方向速度は軸方向速度に比べ十分小さいと考え、周方向定常流量は 0 とみなしている。この式(7)を用いて、式(4), (5)を摂動法により線形化し、流体の圧力を計算する。この圧力を梁の振動方程式の式(6)に加えると、次のような流体-梁の連成振動方程式を得る。

$$[M_s + M_a] \frac{d^2}{dt^2} \{W_n\} + [C_s + C_a] \frac{d}{dt} \{W_n\} + [K_s + K_a] \{W_n\} = \{0\} \quad (8)$$

ここで、 $\{W_n\}$ はモードベクトルを表し、 $[M]$, $[C]$, $[K]$ はそれぞれ質量、減衰、剛性マトリックスを示し、添え字の s は梁によるマトリックスを、 a は流体による付加マトリックスを表している。添え字 a の流体による付加マトリックスは流速に依存しており、流速に応じて値が変わる。よって、流速毎に式(8)を解けば、その流速に応じた複素固有値を求めることができ、系の安定性の判別ができる。具体的には、境界条件を満足する固有関数の重ね合わせで解を表現して、固有関数を連成させてその重み係数を求めて解く。このようにして、不安定振動(自励振動)の発生流速、振動モードなどが求めることができる。

3. 数値シミュレーションと考察

3・1 対象構造と諸元

前節で導出した理論に基づき、図 2 および表 1 に示するような上流側固定の片持ち梁、下流側固定の片持ち梁、両端単純支持梁の 3 つの支持条件についてシミュレーションを行う。CASE1 は上流側固定の片持ち梁、CASE2 は下流側固定の片持ち梁、CASE3 は両端単純支持梁を表している。

Fig.2 Calculation models

Table1 Specifications of numerical models

	CASE1	CASE2	CASE3
Support condition	Upstream cantilever	Downstream cantilever	Simple support
Length[m]	1	1	1
Diameter[m]	0.02	0.02	0.02
Gap width[m]	0.003~0.007	0.003~0.007	0.003~0.007

3・2 複素固有値解析

図3，4，5はそれぞれCASE1，CASE2，CASE3の狭い流路内（流路幅3mm）に流体（水）を流し，流速を変化させた時の根軌跡を表している．これらの図からそれぞれのCASEにおける系の動的安定性が判別できる．

3・2・1 上端側固定の片持ち梁(CASE1)の場合 図3から，初めに連成2次の複素固有値が不安定となり，その後，連成3次の複素固有値が不安定になって行く様子がわかる．また，連成3次の複素固有値が不安定になる瞬間，連成2次の複素固有値が安定側に入る様子が見られる．また，連成1次の複素固有値は全ての流速で安定となることがわかる．

Fig.3 Argand diagram (gap width 3[mm], fluid: water upstream cantilever), CASE1

3・2・2 下流側固定の片持ち梁(CASE2)の場合 図4はCASE2の根軌跡を表している．初めに，連成1次の複素固有値がダイバージェンス型の不安定となり，次第に連成2次の複素固有値が0に至る様子が確認できる．しかし，連成2次の複素固有値は常に安定側に存在することが確認できる．そのため，CASE2では連成の1次モードが流速 $V=0.6\text{m/s}$ でダイバージェンスになった後，流速を上げててもその他の連成モードが不安定にならず常に連

成の1次モードがダイバージェンス型の不安定となる。この現象は、下流側片持ち梁の物理的性質を非常に良く捉えているものと考えられる。

Fig.4 Argand diagram (gap width 3[mm], fluid: water, downstream cantilever), CASE2

3・2・3 両端単純支持梁(CASE3)の場合 図5はCASE3の根軌跡を表している。両端支持梁の場合、流速 $V=10.5\text{ m/s}$ で、まず連成の1次モードがダイバージェンスとなる。その後、流速を上げていくと、流速 $V=16.2\text{ m/s}$ で連成2次モードがフラッターとなる。さらに、流速を上げると $V=20.9\text{ m/s}$ でダイバージェンス型の不安定を示していた連成1次モードが安定領域に飛び移ることが確認された。また、さらに流速を上げると、流速 $V=22.4\text{ m/s}$ で連成3次モードがフラッターとなる。

Fig.5 Argand diagram (gap width 3[mm], fluid: water, simple support-simple support), CASE3

3・3 流体の温度特性、流路幅変化が限界流速へ及ぼす影響

ここでは、液体と気体の流体特性の違いや、流路幅変化が系の安定性に及ぼす影響について述べる。ここでいう限界流速とは、複素固有値解析の実部が最初に正の値をとった流速のことを指す。液体（水）は温度が上昇すると粘性が小さくなる性質を持つ。逆に、気体（空気）の場合は温度上昇で粘性が大きくなる性質を持つ。このように、圧力一定のもとで、流体に温度変化を与えた時、限界流速はどのようなになるかについて計算を行う。この計算に採用した流体の諸元を表2に示す。

Table2 Characteristics of fluid

fluid	water	water	water	air	air	air
temperature [K]	273	373	573	300	600	900
kinematic viscosity [m^2/s]	1.79×10^{-6}	0.30×10^{-6}	0.13×10^{-6}	1.60×10^{-5}	3.50×10^{-5}	1.04×10^{-4}
density [kg/m^3]	998.2	958.2	712	1.169	0.7738	0.3867

このように圧力一定の大気圧のもとで流体に温度変化を与えたとき，限界流速はどのようなことになるかについて，数値計算結果を図6，7に示す．図6は流体が液体（水）の場合で，温度が上昇すると限界流速が上がるのがわかる．また流路幅が大きいほど限界流速が上がり，系は安定化することがわかる．

次に，流体が気体（空気）の場合を図7に示す．図7より，流体が気体の場合も温度が高いほど，また，流路幅が大きいほど限界流速が増し，系が安定化する．流体の温度特性は気体と液体とで，粘性の変化の傾向が逆になるが，密度はどちらの流体でも温度の上昇とともに小さくなる．この密度変化の影響が流体力に顕著に表れ，系の安定性に大きな影響を及ぼしていると考えられる．つまり，これらの結果から，流体の温度特性や流路幅変化が限界流速に及ぼす影響は，流体の付加質量による部分が非常に大きいといえる．では，仮に，密度一定として粘性のみ変化させると系の安定性はどのようなのであろうか．次に，粘性が系の安定性に及ぼす影響について調べる．

(a) CASE1, 2nd mode, flutter (a) CASE1, 2nd mode, flutter (b) CASE2, 1st mode, divergence (b) CASE2, 1st mode, divergence (c) CASE3, 1st mode, divergence (c) CASE3, 1st mode, divergence

Fig. 6 Influence of temperature on critical velocity (fluid: water)

Fig. 7 Influence of temperature on critical velocity (fluid: air)

3・4 流体粘性が限界流速へ及ぼす影響

前述したように流体の種類に関わらず，温度上昇に伴い系が安定化された．つまり，流体の温度特性が系の安定性に及ぼす影響には，主に密度変化が顕在化し，粘性の影響を捉えることはできなかった．そこで，密度が一

定で粘性が変化する仮想的な流体を考え，粘性が系の安定性に及ぼす影響について調べる．計算で用いる仮想的な流体の諸元を表3に示す．図8は流体粘性と限界流速の関係を示す．

Table3 Characteristics of fluid

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
density [kg/m^3]	998.2	998.2	998.2	998.2	998.2
kinematic viscosity [m^2/s]	1.8×10^{-6}	5.9×10^{-6}	9.9×10^{-6}	1.4×10^{-5}	1.8×10^{-5}

図8より，CASE1の上流側固定の片持ち梁の場合，粘性を増加させると限界流速は下がることがわかる．つまり，系が不安定化することがわかる．CASE2，CASE3の場合を見てみると，これらはCASE1とは逆に，粘性の増加とともに，限界流速が上がることをわかる．つまり，CASE2の下流側固定の片持ち梁や，CASE3の両端単純支持梁の場合，粘性の増加は系を安定化することがわかる．CASE1の限界流速は，連成2次モードのフラッターモードに支配されているのに対し，CASE2やCASE3の限界流速は共に，連成1次モードのダイバージェンス型の不安定に支配されている．つまり，粘性の増加はフラッターを加速させる効果があり，ダイバージェンスを抑制する働きがあると考えられる．ただし，本研究における解析では，梁に加わる力は圧力が支配的であると，流体の粘性力は直接梁に加えていない．

なお，図8の数値計算では流体を空気として行ったが，流体を水として行っても定性的に図8のような傾向がみられた．

(a) CASE1, 2nd mode, flutter (b) CASE2, 1st mode, divergence (c) CASE3, 1st mode, divergence

Fig. 8 Influence of kinematic viscosity on critical velocity

3・5 流体粘性がフラッターに関する根軌跡の限界流速近傍での振る舞いに与える影響

前節で流体の粘性が変化しても密度が変化しない仮想的な流体を考え、粘性が限界流速に与える影響について調べた。上流側固定の片持ち梁の場合、粘性の増加は系の不安定化を招き、下流側片持ち梁や、両端単純支持梁の場合、粘性の増加は逆に、系の安定化を招く結果となった。これは、梁の支持条件の違いにより、限界流速を支配するモードが異なるためであると考えられる。そこで、さらに CASE3 について、連成 2 次のフラッターや連成 3 次のフラッターの発生流速は、粘性の増加に対して根軌跡の限界流速近傍でどのような振る舞いをするか検証する。計算に用いる流体の諸元は表 3 に示す。図 9 は連成 2 次モードのフラッター発生流速と流体の粘性の関係について示す。図 9(a) から流速がフラッター発生流速より比較的低い流速、すなわち複素固有値の実部が負の領域にあるとき、粘性の増加、すなわち (i) から (v) の状態への移行に伴い、複素固有値の実部は小さくなり、系は安定化しているように見える。また、粘性の増加により実部が 0 となる時の虚部の値が大きくなることがわかる。しかし、流速と実部の関係を示す図 9(b) より、実部が 0 の線を横切るフラッター発生流速付近を見ると、粘性が大きいきの方が低い流速でフラッターに突入していることがわかる。すなわち、粘性の増加はフラッターに関して系を不安定化することになる。ここで、 ν は動粘性係数である。

また、連成 3 次モードのフラッターに対しても、連成 2 次モードと同じ傾向が見られる。この様子を図 10 に示す。

(a) Argand diagram, CASE3, 2nd mode, flutter

(b) Relation between real part and flow velocity

Fig. 9 Influence of kinematic viscosity on critical velocity

(a) Argand diagram, CASE3, 3rd mode, flutter

(b) Relation between real part and flow velocity

Fig. 10 Influence of kinematic viscosity on critical velocity

3・6 流体粘性がダイバージェンスに関する根軌跡の限界流速近傍での振る舞いに与える影響

ここでは、CASE3 の連成 1 次モードのダイバージェンスについて、粘性を考慮した時のダイバージェンスに対する系の安定性について述べる。図 11(a) は根軌跡の限界流速近傍での振る舞いを示した。図 11(a) より、粘性が増加すると連成 1 次の複素固有値は安定側に動いて行く様子が確認できる。さらに、図 11(b) に示す流速と実部の関係を示すが、粘性の増加による安定化効果をはっきりわかる。このため、CASE3 において、流体の粘性の増加が限界流速を高めることがよくわかる。以上から、流体粘性の増加はダイバージェンスの発生流速を上昇させる効果があり、系の安定化に寄与する。

(a) Argand diagram, CASE3, 1st mode, divergence

(b) Relation between real part and flow velocity

Fig. 11 Influence of kinematic viscosity on critical velocity

3・7 構造減衰が限界流速へ及ぼす影響

ここでは，梁に構造減衰を考慮した時の系の安定性について述べる．CASE1 を対象として構造の減衰比を 0 %，1 %，5 %，10 % などとした場合の限界流速を数値計算により求める．図 12 にこれらの関係を示す．

図 12 の (a)，(b)，(c) は，それぞれ CASE1，2，3 の構造減衰と限界流速の関係を示している．CASE1 の限界流速は，連成 2 次モードのフラッターモードにより支配されている．図 12 の (a) より，構造減衰を増加させると，実部は負側に移動して小さくなり，限界流速が上昇し，系が安定化することがわかる．一方，図 12 の (b) の CASE2 では，限界流速は連成 1 次モードのダイバージェンスに支配されている．梁の構造減衰を増加させると，実部は負側に移動して安定化傾向を示すが，限界流速は，CASE1 の場合と異なり，上昇しないことがわかる．この傾向は図 12 の (c) の CASE3 でも確認できる．CASE3 の限界流速は CASE2 と同様に，連成 1 次モードのダイバージェンスに支配されている．構造減衰の増加に対して限界流速は上昇していないことがわかる．これらの結果から，構造減衰の増加は系を安定化の領域に移動させるが，限界流速に関してはフラッターに対してのみ安定化効果を示す．この物理的な理由は，ダイバージェンスになった瞬間に，動的な問題から静的な問題に移行し，構造減衰が効果を発揮しなくなるためと考えられる．

(a) CASE1, 2nd mode, flutter (b) CASE2, 1st mode, divergence (c) CASE3, 1st mode, divergence

Fig. 12 Influence of structural damping on critical velocity

4. 結 言

- (1) 産業界の現場でよく採用されている弾性梁の支持構造などをパラメーターにして，支持条件の相違によって，フラッターやダイバージェンスの発生限界流速がどのように変化するかを明らかにした．なお，現場における防振対策の場合，これまでに報告されてきた参考文献(1)–(9)を含めた数多くの研究の知見に加えて，ここで報告した知見を併せて防振設計に反映していただくことが望ましい．
- (2) 流体粘性は，流体の圧力が支配的な系では，フラッターに対して不安定化効果を示し，ダイバージェンスに対しては安定化効果を示すことがわかった．
- (3) 構造減衰は，系を安定化の領域に移動させるが，限界流速に関してはフラッターに対して安定化効果を示し，ダイバージェンスに対しては限界流速近傍では安定化効果を示さないことがわかった．

文 献

- (1) Paidoussis, M., P. and Pettigrew, M., J., “Dynamics of Flexible Cylinders in Axisymmetrically Confined Axial Flow”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.46 (1979), pp.37-44.
- (2) Hobson, D. E., “Fluid-Elastic Instabilities Caused by Flow in an Annulus”, *Proceedings of 3rd International Conference on Vibration in Nuclear Plant*, Keswick, U. K. (1982), pp.440-461, London: BNES.

- (3) Mateescu, D. and Paidoussis, M., P., “The Unsteady Potential Flow in an Axially Variable Annulus and its Effects on the Dynamics of the Oscillating Rigid Centre-Body”, *Journal of Fluids Engineering*, Vol.107 (1985), pp.421-427.
 - (4) 稲田文夫, 葉山眞治, “すきま流励起振動に関する研究 (第1報, 一次元テーパすきまの壁面に作用する流体力の評価)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 53, No. 488 (1987), pp. 933-939.
 - (5) Mulcahy, T., M., “One-Dimensional Leakage Flow Vibration Instabilities”, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.2 (1988), pp.383-403.
 - (6) Paidoussis, M. P., Mateescu, D. and Sim, W.-G., “Dynamics and Stability of a Flexible Cylinder in a Narrow Coaxial Cylindrical Duct Subjected to Annular Flow”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.57 (1990), pp.232-240.
 - (7) 新井正彰, 田島清瀬, “軸対称物体のすきま流れ振動”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 57, No. 536 (1991), pp. 1113-1121.
 - (8) Fujita, K. and Ito, T., “Study on Leakage Flow-Induced Vibration of an Axisymmetric Cylindrical Rod due to Axial Flow”, *Proceedings of ASME Pressure Vessels and Piping Conference*, Vol.244 (1992), pp.33-43.
 - (9) 長倉博, 金子成彦, “1次元平行すきま流路内に置かれた片持弾性はりの安定性”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 58, No. 546 (1992), pp. 352-359.
 - (10) 藤田勝久, 伊藤智博, “軸方向すきま流を受ける弾性棒の流体励起振動 (軸対称体に関する有限要素法による安定解析)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 66, No. 643 (2000), pp. 715-723.
 - (11) 藤田勝久, 新谷篤彦, “軸方向すきま流を受ける軸対称弾性はりの流体励起振動の安定性解析”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 68, No. 674 (2002), pp. 2889-2895.
 - (12) Fujita, K., Morikazu, H. and Shintani, A., “A Consideration on Pre- and Post-Instability of an Axisymmetric Elastic Beam Subjected to Axial Leakage Flow”, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.23 (2007), pp.463-478.
 - (13) 藤田勝久, 大熊歩, “狭い流路内で軸流を受ける弾性梁の動的安定性に与える構造諸元の影響”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 76, No. 765 (2010), pp. 1209-1216.
-