白色励振と不規則パルス励振を同時に受ける非線形系の応答解析*

木村 康治*¹, 須田 紘司*²

Response Analysis of a Nonlinear System Subjected to Combined Excitation of White Noise and Random Train of Impulses

Koji KIMURA*¹ and Koji SUDA

*¹ Department of Mechanical and Environmental Informatics, Tokyo Institute of Technology
2-12-1, Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, Japan

Probability distribution of stationary responses of a nonlinear system subjected to a combined excitation of white noise and random train of impulses is analyzed. White noise and impulses are independent processes. The response distributions are obtained by employing moment equations approach and Gaussian sum approximation, which expresses the probability density function in terms of weighted sum of several Gaussian probability density functions. In the illustrative example, the response distributions of a Duffing oscillator are calculated and compared with simulation results. The effects of impulses upon a tail of these distributions are clarified.

Key Words : Random Vibration, Random Impulses, Nonlinear System, Non-Gaussian Random Process, Gaussian Sum Approximation

1. 緒 言

実在する構造物や機械は、多数の不確定因子を持つ再現性のない外力を、連続的または断続的に受けている⁽¹⁾。連続した励振力に関する解析は、様々な問題について広く行われている。その中でも、ホワイトノイズ励振を受ける一部の系の応答分布は、Fokker Planck 方程式の解として厳密解が与えられている⁽²⁾。一方、橋梁に働く移動荷重⁽³⁾、車両が凹凸路面から受ける励振⁽⁴⁾などの断続した励振は、不規則な時刻に到着する不規則な大きさを持つパルスの列で表される。不規則パルス列は、その時間的性質において連続した入力とは異なる扱いが必要となり、これまでに様々な応答解析がなされている⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

実際の構造物において、異なる励振源からこれらの入力を同時に受けることが考えられる。このような入力を受ける系の応答解析について数例報告されているが⁽⁸⁾⁽⁹⁾、応答特性については未だ十分明らかでない。

不規則な入力および系の応答は、確率論的な取り扱いが適当であり、統計量などにより特徴付けられる。その中でも応答の確率分布は、系の動的挙動を完全に記述することができ、系の信頼性の計算に用いられる重要な情報である。応答分布を、異なるパラメータを持ついくつかのガウス確率密度関数の重み付き和により近似する方法は Gaussian sum approximation と呼ばれる⁽¹⁰⁾。Chang⁽¹¹⁾はこの方法を用いて、ガウス性ホワイトノイズを受ける Duffing 系の非定常応答解析を行った。また、萩谷⁽¹²⁾は、パルス入力についての統計的性質を定めることで、この方法を用いて、不規則パルス列を受ける Duffing 系の定常応答解析を行った。

本研究は、ホワイトノイズ励振と不規則パルス励振を同時に受ける非線形系に対して、Gaussian sum approximation の手法を適用することにより、定常応答の確率密度関数および期待値を求める。最初に、ホワイトノイズと不規則パルス列の和で表される入力の統計的性質を定め、次に系のモーメント方程式を示す。そして、Gaussian sum approximation を用いた定常応答確率分布の解析手順を示す。

* 原稿受付 2011 年 3 月 29 日

*¹ 正員, フェロー, 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻
(〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

*² 学生員, 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻
(〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

E-mail: kkimura@mei.titech.ac.jp

具体的な計算例として、Duffing 系の定常応答の確率分布を算定し、解析結果とシミュレーション結果を比較する。さらに、得られた解析結果をもとに、パルス入力に応答に及ぼす影響について考察する。

2. 解析モデル

2.1 運動方程式

図 1 に示す、不規則外力 $f_0(t)$ を受ける 1 自由度非線形系の運動方程式は以下のように表される。

$$\ddot{x}(t) + g(x(t), \dot{x}(t)) = f(t), \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

ここで、 $[0, T]$ は考えられる時間区間、 $x(t), \dot{x}(t)$ は時刻 t における系の変位および速度を表す。 $f(t)$ は不規則外力、 $g(x, \dot{x})$ は系の減衰および復元力に相当する非線形関数で、図中の $f_0(t), g_0(x, \dot{x})$ を質量 m で除したものある。

2.2 不規則入力

互いに独立な、定常ガウス性ホワイトノイズ $\xi(t)$ と定常不規則パルス列 $\eta(t)$ の和で表される不規則入力を次式で定義する。

$$F(t) = \alpha \{ \xi(t) + \eta(t) \} \quad (2)$$

ここで、 α は入力の大きさのパラメータである。ホワイトノイズ $\xi(t)$ は平均値 0、スペクトル密度 S_0 、すなわち $E[\xi(\tau)\xi(\tau+s)] = 2\pi S_0$ で与える。不規則パルス列 $\eta(t)$ は次式で表される⁽¹⁾。

$$\eta(t) = \sum_{k=0}^{N(T)} P_k \delta(t - \tau_k), \quad 0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N(T)} < T \quad (3)$$

ここで、 $N(T)$ は時間 $[0, T]$ に到着するパルスの本数を、 P_k, τ_k はそれぞれ k 番目のパルス振幅の大きさと到着時刻を表す。この不規則励振の標本関数を図 2 に示す。本研究では、個々のパルスの到着が独立である場合を考える。このとき、 $\tau_1 < \dots < \tau_{N(T)}$ は時間軸上にポアソン分布する点であり、単位時間当たりの到着本数の平均値は期待到着率 λ で与えられる。また、個々のパルスの大きさは独立で、同一な確率分布に従う確率変数で表される。

励振力 $F(t)$ の積分過程 $G(t) = \int_0^t F(u) du$ の微小時間間隔 $[t, t+dt]$ における増分 $dG(t)$ は、式 (2) より次式で与えられる。

$$dG(t) = \int_t^{t+dt} \alpha \{ \xi(u) + \eta(u) \} du = \alpha \left\{ \int_t^{t+dt} \xi(u) du + \int_t^{t+dt} \eta(u) du \right\} \quad (4)$$

右辺第 1 項のホワイトノイズの積分の増分は、単位ウィーナー過程 $W(t)$ を用いて次式で表される。

$$\int_t^{t+dt} \xi(u) du = \sqrt{2\pi S_0} dW(t) \quad (5)$$

このとき、増分の n 乗期待値 ($n = 1, 2, \dots$) は次のように求められる。

$$E \left[\left\{ \int_t^{t+dt} \xi(u) du \right\}^n \right] = \begin{cases} 2\pi S_0 dt & (n = 2) \\ 0 & (n \neq 2) \end{cases} \quad (6)$$

Fig. 1 A single DOF nonlinear oscillator

Fig. 2 Combined excitation of white noise and random train of impulses

式(4)右辺第2項の、不規則パルス列の積分の $[t, t+dt)$ における増分を $dS(t)$ とおく.

$$dS(t) = \int_t^{t+dt} \eta(u) du = S(t+dt) - S(t) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau_j \\ P_j, & t = \tau_j \end{cases}, \quad j = 1, 2, \dots, N(T) \quad (7)$$

また, $[t, t+dt)$ 内に1本のパルスが到着する確率は λdt で与えられる. $dS(t)$ に関する確率は, 二つ以上の同時到着を無視すると, 次式となる.

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{dS = 0\} &= 1 - \lambda dt \\ \text{Prob}\{dS = P\} &= \lambda dt \end{aligned} \quad (8)$$

ここで, P は式(7)右辺に対応する値である. $dS(t)$ の増分の n 乗期待値は次のように求められる⁽¹²⁾.

$$\begin{aligned} E[\{dS(t)\}^n] &= (1 - \lambda dt)E[0^n] + \lambda dt E[P^n] \\ &= \lambda E[P^n] dt, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

以上の計算をもとに $E[\{dG(t)\}^n]$ を求める. ホワイトノイズとパルス列の独立性を考慮すると, 次式となる.

$$\left. \begin{aligned} E[dG(t)] &= E[\alpha\{\sqrt{2\pi S_0}dW(t) + dS(t)\}] = \alpha\sqrt{2\pi S_0}E[dW(t)] + \alpha E[dS(t)] \\ &= \alpha\lambda E[P]dt \\ E[\{dG(t)\}^2] &= \alpha^2\{2\pi S_0 + E[dS^2]\}dt + o(dt) \\ &= \alpha^2\{2\pi S_0 + \lambda E[P^2]\}dt \\ E[\{dG(t)\}^n] &= \alpha^n \lambda E[P^n] dt \quad (n \geq 3) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで, $dG(t)$ は, 2次期待値にのみホワイトノイズの項を持ち, それより高次期待値は不規則パルス列の期待値のみで与えられる.

3. 理論解析

3.1 モーメント方程式

式(1)を状態変数 $y_1 = x, y_2 = \dot{x}$ を用いて書き換え, $[t, t+dt)$ における y_1, y_2 の増分形式で表すことで次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt \\ dy_2 &= -g(y_1, y_2)dt + dG(t) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

次に, 変位 y_1 , 速度 y_2 のべきの形の関数 $\phi(y_1, y_2, t)$ を考える.

$$\left. \begin{aligned} \phi(y_1, y_2, t) &= y_1^{m_1} y_2^{m_2} \\ m_1, m_2 &= 0, 1, 2, \dots; m_1 + m_2 = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$\phi(\cdot)$ の期待値 $E[\phi(\cdot)] = E[y_1^{m_1} y_2^{m_2}]$ はモーメントと呼ばれ, 状態変数 y_1, y_2 の統計的性質を表す. モーメントの時間変化を支配する微分方程式はモーメント方程式と呼ばれ, 非線形系(1)のモーメント方程式は次式で表される⁽¹³⁾.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[y_1^{m_1} y_2^{m_2}] &= m_1 E[y_1^{m_1-1} y_2^{m_2+1}] - m_2 E[y_1^{m_1} y_2^{m_2-1} g(y_1, y_2)] + \frac{E[y_1^{m_1} \{(y_2 + dG)^{m_2} - y_2^{m_2}\}]}{dt} \\ m_1, m_2 &= 0, 1, 2, \dots; m_1 + m_2 = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

ただし, $g(\cdot)$ が非線形の場合, 一般にこの方程式系は閉じない.

3.2 Gaussian sum approximation

式(13)から, $m_1 + m_2 = 1, 2, \dots, m(m: \text{定数})$ であるものをすべて選ぶことで得られる方程式系を閉じるために, 右辺に現れる m 次より高次のモーメント $E[y_1^{m_1} y_2^{m_2-1} g(y_1, y_2)]$ を算定する必要がある. そこで, m 次以下のモーメントに基づいて定められる確率密度関数から, 高次モーメントを算定することにする.

異なる平均値および分散を有する複数個のガウス確率密度関数の重み付き和により, 任意の確率密度関数を近似的に表現する方法は, Gaussian sum approximation と呼ばれる. 図3に, 3個のガウス確率密度関数の重み付き和により表される, 1変数の非ガウス確率分布の一例を示す. 2変数以上の確率分布についてもこの方法は適用可能である. そこで本研究では, 変位 y_1 , 速度 y_2 の結合確率密度関数を, この Gaussian sum approximation の方法を用いることにより求める.

次式で表される確率密度関数を考える.

$$p_y(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{N=3} a_i p_i(y_1, y_2) \quad (14)$$

ここで, $p_i(y_1, y_2)$ は 2 変数ガウス確率密度関数, $a_i \geq 0$ は $p_i(\cdot)$ の重み係数である.

$$p_i(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{i1}\sigma_{i2}\sqrt{1-\rho_i^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho_i^2)} \left[\frac{(y_1 - \mu_{i1})^2}{\sigma_{i1}^2} - \frac{2\rho_i(y_1 - \mu_{i1})(y_2 - \mu_{i2})}{\sigma_{i1}\sigma_{i2}} + \frac{(y_2 - \mu_{i2})^2}{\sigma_{i2}^2} \right] \right\}, \quad (15)$$

$$i = 1, 2, 3$$

ここで,

$$\mu_{ij} = E[y_j], \quad \sigma_{ij}^2 = E[y_j^2] - \mu_{ij}^2, \quad j = 1, 2, \quad \sigma_{ij} > 0$$

$$\rho_i = \kappa_{i12}/\sigma_{i1}\sigma_{i2}, \quad \kappa_{i12} = E[Y_1 Y_2] - \mu_{i1}\mu_{i2}, \quad -1 \leq \rho_i \leq 1$$

式中 $E[\cdot]$ は, ガウス確率密度関数 $p_i(\cdot)$ についての期待値演算を表す.

重み係数 a_i は, 次式の条件を満たすように決められる.

$$\iint_{-\infty}^{\infty} p_y(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \sum_{i=1}^{N=3} a_i = 1 \quad (16)$$

また, 式 (14) で表される確率密度関数により, y_1 と y_2 の任意関数 $\phi(y_1, y_2)$ の期待値は, 次のように求められる.

$$E[\phi(y_1, y_2)] = \iint \phi(y_1, y_2) p_y(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \sum_{i=1}^{N=3} a_i E_i[\phi(y_1, y_2)] \quad (17)$$

以上より, 近似した確率密度関数およびそのすべてのモーメントは, パラメータ $a_i, \mu_{i1}, \mu_{i2}, \sigma_{i11}, \sigma_{i22}, \kappa_{i12}, i = 1, 2, 3$ により表される. したがって, 前節のモーメント方程式を解くために必要な高次モーメント $E[y_1^{m_1} y_2^{m_2-1} g(y_1, y_2)]$ は, パラメータ $a_1, \dots, \kappa_{312}$ を用いて算定することができる.

3.3 定常応答解析

定常応答は, モーメント方程式 (13) の左辺微分項を零として得られる, モーメントに関する代数方程式を解くことで求められる.

解析手法のフローチャートを図 4 に示す. 与えられた m 次以下のモーメントをもとに, パラメータ $a_1, \dots, \kappa_{312}$ を決定する. そのパラメータを用いて高次モーメントを算定し, モーメント方程式を閉じる. これを解くことで新たに m 次以下のモーメントが求められる. この手順を, 予め定めた収束条件を満たすまで繰り返すことで, モーメント方程式を満たすモーメントと, 応答の近似確率分布を得ることができる.

Fig. 3 Gaussian sum approximation

Fig. 4 Flow chart for present method

4. 計算例

4.1 系と入力

具体的な計算例として、ホワイトノイズと振幅がガウス分布である不規則パルス列を同時に受ける Duffing 系の定常応答を求める。対応する線形系固有振動数 ω_0 で無次元化した Duffing 系の運動方程式は次式で表される。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x + \varepsilon x^3 = F(\tau) \quad (18)$$

ここで、 ζ , ε はそれぞれ減衰定数、非線形係数を表す。また、ドット ($\cdot$) は無次元化時間 $\tau = \omega_0 t$ による微分、 $F(\tau) = f(\tau/\omega_0)/\omega_0^2$ は無次元化時間で表された不規則外力である。

このとき、運動方程式 (18) を式 (1) の形で表すと、非線形関数 $g(\cdot)$ は次式で表される。

$$g(x(\tau), \dot{x}(\tau)) = 2\zeta\dot{x} + x + \varepsilon x^3 \quad (19)$$

したがって、Duffing 系のモーメント方程式は、式 (13) より次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} E[y_1^{m_1} y_2^{m_2}] = & m_1 E[y_1^{m_1-1} y_2^{m_2+1}] - m_2 \left\{ 2\zeta E[y_1^{m_1} y_2^{m_2}] + E[y_1^{m_1+1} y_2^{m_2-1}] + \varepsilon E[y_1^{m_1+3} y_2^{m_2-1}] \right\} \\ & + E[y_1^{m_1} \{y_2 + dG(\tau)\}^{m_2} - y_2^{m_2}] / d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

式 (20) の左辺のモーメントの次数は $m_1 + m_2$ であるのに対し、右辺の ε を有する項のモーメントの次数は $(m_1 + m_2 + 2)$ 次となるため、この方程式系は閉じていない。

状態変数 y_1, y_2 と $dG(\tau)$ の積の期待値の計算は、両者が独立であるから、次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{E[y_1^{m_1} y_2^{m_2} (dG)^n]}{d\tau} &= \frac{E[y_1^{m_1} y_2^{m_2}] E[(dG)^n]}{d\tau} \\ m_1, m_2 &= 0, 1, 2, \dots; m_1 + m_2 = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

不規則パルスの大きさは $N(0, \beta^2)$ にしたがうものとする。このとき、入力を表す統計量 $E[(dG)^n]$ は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E[dG] &= 0 \\ E[(dG)^2] &= \alpha^2 \{2\pi S_0 + \lambda \beta^2\} d\tau \\ E[(dG)^3] &= 0 \\ E[(dG)^4] &= 3\lambda \alpha^4 \beta^4 d\tau \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

4.2 Gaussian sum approximation におけるパラメータの算定

前節の入力、系の場合、応答分布は原点对称となる。このことを考慮して、Gaussian sum approximation の未知パラメータを次式のように仮定すると、9つのパラメータ $\{a, \mu_1, \mu_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \kappa_1, \kappa_2\}$ で表すことができる。

$$\begin{pmatrix} a_1 & \mu_{11} & \mu_{12} & \sigma_{111} & \sigma_{122} & \kappa_{112} \\ a_2 & \mu_{21} & \mu_{22} & \sigma_{211} & \sigma_{222} & \kappa_{212} \\ a_3 & \mu_{31} & \mu_{32} & \sigma_{311} & \sigma_{322} & \kappa_{312} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)/2 & \mu_1 & \mu_2 & \sigma_{11} & \sigma_{22} & \kappa_1 \\ a & 0 & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \kappa_2 \\ (1-a)/2 & -\mu_1 & -\mu_2 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \kappa_1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

これらのパラメータを決定するためには、それと同数のモーメントが必要である。対称分布の奇数次モーメントはすべて零となるため、偶数次 (2 次, 4 次) のモーメント方程式および、自明な解を持つ 6 次モーメントから 9 つのモーメントを求めることができる。

Gaussian sum approximation の未知パラメータは、このパラメータを用いて算定されたモーメントと、上記で求めたモーメントの二乗誤差が最小になるように決定する。

4.3 系と入力の計算パラメータ

系については、 $\zeta = 0.05, \varepsilon = 0.3$ とし、入力の強さ $\alpha = 0.5$ 、ホワイトノイズのスペクトル密度 $S_0 = 1/2\pi$ とする。不規則パルス列のパラメータは到着率 λ 、振幅の分散 β^2 について、それぞれ 2 通りを計算する。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 0.05, 0.1 \\ \beta^2 &= 5, 10 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

パルスの平均到着間隔は $1/\lambda$ で表される。例えば、 $\lambda = 0.1$ の場合、系は平均して $(1/\lambda)/(2\pi) \simeq 1.6$ 固有周期あたりに 1 本のパルスが入力される。 (λ, β^2) の異なる組み合わせ 4 組について計算を行い、応答を比較する。

4.4 計算結果

最初に、応答時刻歴をもとに考察を行う。図 5-8 に入力および変位応答の標本関数の一例を示す。横軸は無次元化時間、縦軸は (a) 不規則入力 $F(\tau)$, (b) 変位 $x(\tau)$ を表す。図より、パルス入力が無い、あるいは小さい場合、応答にホワイトノイズによる不規則な振動が認められる。また、パルスが入力された場合には、系は大きく変位した後、周期を持った減衰振動を示す。振幅の分散 β^2 が大きな場合、大きな振幅をもつ周期的な振動となることが確認できる。一方、到着率 λ が大きな場合には、パルス入力本数が増えるため、周期的な減衰が連続して起きている。

図 9-12 に本手法およびシミュレーションにより得られた定常応答分布を示す。横軸は変位、縦軸は確率密度を表す。すべてにおいて、(b) は、(a) の縦軸を対数目盛で表したものである。実線は解析結果、○はシミュレーション結果、破線は同じ強さのホワイトノイズのみを受ける系の応答分布の厳密解を表す。これらの図より、裾の領域において誤差が認められるが、解析結果はシミュレーション結果を良く表している。

次に、ホワイトノイズのみを受ける系の応答分布と比較すると、いずれの図においても、パルスが加わることで分布形状が広がることが確認できる。各図 (b) の $|y_1| > 4$ の領域では、パルスが加わることで確率密度の値が一桁程度上昇している。このような裾の領域における確率の上昇は系の破壊しやすさに関わり、強いパルス入力の付加は信頼性の問題において無視できないと言える。また、 λ , β の増大に伴い、分布形状が広がっている。このことは、応答時刻歴 (図 5-8) においても、パルスが強く、入力本数が多いほど応答が大きくなることを確認できる。

(a) Random input

(b) Displacement response

Fig. 5 Sample functions ($\lambda = 0.05, \beta^2 = 5$)

(a) Random input

(b) Displacement response

Fig. 6 Sample functions ($\lambda = 0.05, \beta^2 = 10$)

(a) Random input

(b) Displacement response

Fig. 7 Sample functions ($\lambda = 0.1, \beta^2 = 5$)

(a) Random input

(b) Displacement response

Fig. 8 Sample functions ($\lambda = 0.1, \beta^2 = 10$)

さらに、パルス入力2つのパラメータ、到着率 λ およびパルス振幅の分散 β^2 が分布形状に与える影響を、解析で得られた応答モーメントを基に考察する。パルス入力の強さを代表する値として、入力の統計量(22)の中で唯一ホワイトノイズの項を有する $E[(dG)^2]$ に着目し、到着率と分散の積 $\lambda\beta^2$ を用いる。不規則パルスの計算パラメータに、 $\lambda = 0, 0.01; \beta^2 = 0, 1$ の場合を加えた10組について、解析により得られたモーメントを表1に示す。これより、 $\lambda\beta^2$ の値の増大とともに、応答モーメントが増大する傾向が認められる。

(a) Probability density (b) Probability density(Log scale)

Fig. 9 Probability density of stationary displacement response ($\lambda = 0.05, \beta^2 = 5$)
(— Present method, $\circ$ Simulation, - - White noise excitation)

(a) Probability density (b) Probability density(Log scale)

Fig. 10 Probability density of stationary displacement response ($\lambda = 0.05, \beta^2 = 10$)
(— Present method, $\circ$ Simulation, - - White noise excitation)

(a) Probability density (b) Probability density(Log scale)

Fig. 11 Probability density of stationary displacement response ($\lambda = 0.1, \beta^2 = 5$)
(— Present method, $\circ$ Simulation, - - White noise excitation)

(a) Probability density (b) Probability density(Log scale)

Fig. 12 Probability density of stationary displacement response ($\lambda = 0.1, \beta^2 = 10$)
(— Present method, $\circ$ Simulation, - - White noise excitation)

Table 1 Pulse intensity $\lambda\beta^2$ vs statistical moment of response

λ	β^2	$\lambda\beta^2$	$E[y_1^2]$	$E[y_2^2]$	$E[y_1^4]$	$E[y_1^2 y_2^2]$	$E[y_1^4]$
0	0	0	1.284	2.531	4.056	3.211	19.380
0.01	1	0.01	1.297	2.481	4.071	3.189	18.487
0.05	1	0.05	1.299	2.614	4.808	3.394	20.496
0.01	5	0.05	1.313	2.619	4.351	3.431	20.594
0.1	1	0.1	1.362	2.741	4.553	3.780	22.566
0.01	10	0.1	1.341	2.645	4.316	3.519	21.055
0.05	5	0.25	1.489	3.125	5.391	4.872	29.754
0.1	5	0.5	1.602	3.847	7.079	6.157	45.741
0.05	10	0.5	1.655	3.892	7.223	6.646	50.372
0.1	10	1	1.945	4.849	9.761	8.932	84.722

5. 結 言

連続したホワイトノイズ励振と不規則な時刻に不規則な振幅をもつパルス列が同時に入力される非線形振動系の定常応答解析を行った。ガウス確率密度関数の重み付き和により確率分布を近似的に与える Gaussian sum approximation の方法とモーメント方程式を組み合わせた手法を用いて、応答の確率分布を求めた。

- 具体的な計算例として、ホワイトノイズとガウス振幅をもつパルス列を同時に受ける Duffing 系の定常応答分布を求め、シミュレーション結果を良く表すことを確かめた。
- パルスが付加されることで、応答分布の裾の領域における確率が上昇することを明らかにした。
- パルスの到着率とパルス振幅の分散の積に着目し、この値の増大とともに、応答モーメントが増大する傾向を示した。

文 献

- (1) Y.K.Lin 著, 森 大吉郎, 富田文治, 小林 繁夫, 佐藤寿芳, 小林 暁峯 訳, 構造動力学の確率論的方法 (1972), 培風館。
- (2) Thomas K. Caughey, “Derivation and Application the Fokker-Plank Equation to Discrete Nonlinear Dynamic Systems Subjected to White Random Excitation”, *The Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 35, No. 11 (1963), pp. 1687-1692.
- (3) C.C.Tung, “Random response of highway bridges to vehicle loads”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 93 (1967), pp. 79-94.
- (4) A.G. Thompsona, B.R. Davisb, “Computation of the rms state variables and control forces in a half-car model with preview active suspension using spectral decomposition methods”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 285 (2005), pp. 571-583.
- (5) Andrzej Tyliński and Witold Marowski, “Vibration of a Non-Linear Single Degree of Freedom System Due to Poissonian Impulse Excitation”, *INTERNATIONAL JOURNAL OF NON-LINEAR MECHANICS*, Vol. 21, No. 3 (1986), pp. 229-238.
- (6) R. Iwankiewicz, “Dynamics Response of Non-Linear System to Poisson-Distributed Random Impulses”, *Journal of the Sound and Vibration*, Vol. 156, No.3 (1992), pp. 407-423.
- (7) M. Grigoriu, “Response of Dynamic Systems to Poisson White Noise”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 195, No. 3 (1996), pp. 375-389.
- (8) M. Grigoriu, “A Partial Differential Equation for the Characteristic Function of the Response of Non-Linear Systems to Additive Poisson White Noise”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 198, No. 2 (1996), pp. 193-202.
- (9) Steven F. Wojtkiewicz, Erik A. Johnsonb, Lawrence A. Bergmana, Mircea Grigoriu, Billie F. Spencer, JrP, “Response of stochastic dynamical systems driven by additive Gaussian and Poisson white noise: Solution of a forward generalized Kolmogorov equation by a spectral finite difference method”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 168 (1999), pp. 73-89.
- (10) D.L. Alspach and H.W. Sorenson, “Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximation”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 17, No. 4 (1972), pp. 439-448.
- (11) R.J. Chang, “Non-Gaussian Linearization Method for Stochastic Parametrically and Externally Excited Nonlinear Systems”, *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, Vol. 114 (1992), pp. 20-26.
- (12) 木村康治, 高原弘樹, 萩谷忍, 坂田勝, “不規則インパルス列を受ける非線形系の応答分布”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 61, No. 583 (1995), pp. 836-841.
- (13) T.T. Soong, *Random Differential Equations in Science and Engineering* (1970), Academic Press.