層間を部分的に非接着にした CFRP 積層はりの減衰振動測定と FEM 解析*

鈴木 浩治^{*1}Vibration Damping Measurements and FEM Analysis
of Partially-Debonded CFRP Laminated BeamsKohji SUZUKI^{*1}^{*1} Chiba Institute of Technology, Department of Mechanical Science & Engineering
2-17-1, Tsudanuma, Narashino-shi, Chiba, 275-0016 Japan

In this study, three different types of delamination (partially-debonded regions in the adhesive layers) were artificially introduced into carbon fiber reinforced plastic (CFRP) laminated beams and then both of experiments and numerical analysis using finite element method (FEM) were applied to evaluate their vibration damping properties under cantilever-type fixtures. The experimental measurements showed that, when delaminations were introduced into the specimens, in general, the first bending mode frequencies decreased and the modal loss factors increased. For the purpose of explaining the experimental observations especially in terms of damping, distributions of transverse shear strain energy and contact pressure on the internal debonding surfaces were numerically examined by FEM analysis.

Key Words : CFRP, Composite Laminates, Delamination, Damage Detection, Free Vibration, Finite Element Analysis, Eigen Frequency, Damping, Loss Factor

1. 緒 言

炭素繊維強化プラスチック (Carbon Fiber Reinforced Plastics, CFRP) からなる先進積層複合材料は、軽量かつ高剛性であり、また構造材料としての強度、耐熱性、寸法安定性などにも一般に優れており、航空宇宙、スポーツ・レジャー用途、自動車をはじめとする走行車両等への適用が今後ますます本格化していくと思われる。さらに、各種 FRP 一体成形技術により出来上がった部材同士の接着接合、構造強度低下部位への積層補強、コンクリート構造へのレイアップ補修など、積層部材同士または積層材と異材とを接着して全体構造を作りあげる手法・技術の重要性も増している。ところで、このような一体化積層構造または接着積層構造には、層間はく離 (delamination) という層間が部分的に非接着状態となる損傷・破壊形態が現れる。そして、このような積層材特有の損傷が構造全体の静的または動的力学挙動におよぼす影響を定量的に把握し、その強度低下や構造強度信頼性を正しく見積もることで、構造の安全性評価や構造・機能設計の礎の一つをなすことが、今後ますます重要になるとと思われる。

CFRP 積層材料中に部分的な非接着領域 (層間はく離, delamination) を導入して、固有振動数や振動モード形状など、その振動特性の変化を実験的に計測するとともに、積層材解析モデルや有限要素法 (Finite Element Method, FEM) による積層材数値解析モデルを用いた解析シミュレーションから、はく離と振動特性との因果関係を調べたり、さらに振動特性の変化より、はく離の位置や程度を同定したりする研究が過去になされている^{(1)~(10)}。

本研究では、CFRP 積層材 4 枚を熱硬化接着フィルムにより貼り合わせた積層はり構造に対して、部分的に非接着部 (層間はく離) を導入し、片持はり減衰振動波形を実計測する。その後、汎用 FEM 解析ソフト (ANSYS ver.10) を用いて FEM 数値解析し、CFRP 積層はり構造の接着層に導入された層間はく離の影響について考察を試みる。過去の既存研究との相違点としては、本研究では、ステップ弛緩減衰振動波形を詳細に検討した点や減衰発現メカニズムについて FEM 数値解析的な側面からの詳しい考察を試みた点などが挙げられる。

* 原稿受付 2011 年 3 月 8 日

^{*1} 正員, 千葉工業大学 工学部 機械サイエンス学科 (〒275-0016 千葉県習志野市津田沼 2-17-1)
E-mail: kohji.suzuki@it-chiba.ac.jp

2. 供試体および測定方法

2・1 供試体の作成

図 1 に、本研究で作成した供試体の模式図を示す。全長 250mm に片持ち固定部 50mm を加えた 300mm の総長さで、幅は 25mm である。厚さ方向には、平織り CFRP（厚さ約 0.45mm）フラットシートを 4 枚用いて、各層間に接着フィルム（厚さ 0.2mm）をそれぞれ 2 枚重ねて、CFRP が 4 層、接着層が 3 層の総厚さ約 3mm の積層構成とした。また、層間に 2 枚重ねられている接着フィルムの間に約 0.05mm のテフロンシートを 2 枚重ねて挿入することで非接着部（層間にはく離）を導入した。挿入するテフロンシートの長さを全長の 20%、40% および 60% とした 3 タイプ、そしてテフロンシートを挿入する接着層の位置により中央（Center Interface）、片側上部（Upper Interface）および両側上下部（Outer Interfaces）の 3 タイプを組み合わせせた計 $3 \times 3 = 9$ 本に、層間にはく離の無い健全材（Intact）を加えた合計 10 本の供試体を作成した。なお、はく離は長さ方向中央に関して対称に導入した。また、片持はりの右側自由端部から内側へ 10mm の箇所に加速度センサ取り付けのためのマーキングを施した。

Fig.1 Dimensions and configurations of the present delaminated CFRP specimens

2・2 片持はり減衰振動測定方法

作成した供試体を十分に剛な作業台上のバイスに供試体毎の締付け力がほぼ一定となるように注意して片持はり状態で固定し、自由端側（図 1 中の Point A）に超小型加速度ピックアップセンサ（小野測器 NP-2110、重量 0.6g）を取り付けた。そして、供試体の自由端をハイトゲージにより板厚の半分程度（1.5mm）までたわませた後、ハイトゲージのスクライバ先端部を供試体から静かに離し、ステップ弛緩自由振動させた。加速度ピックアップ

Fig.2 Measurement and data analysis system (constructed based on Labview 6.1)

ップセンサからの出力は 1kHz のローパスフィルタを設定したチャージアンプ（小野測器 CH-1200）により増幅された後、データ収集カード（National Instruments, DAQ-6062E）によりサンプリング周波数 1kHz にてパソコンに取り込んだ。また、計測は同一供試体に対して複数回実施し、毎回ほぼ同一の波形が得られることを確認した。

取り込んだ加速度波形は汎用測定システム開発環境 Labview（version 6.1, National Instruments）にて構築した振動計測・解析プログラムによりデータ処理した。図 2(a) は本研究にて構築した振動波形測定プログラムのブロック・ダイアグラムである。取り込んだ信号は時刻歴波形として、パソコン画面に表示された後、テキストファイルに書き出される。また、波形のピーク値を検出させて、それを減衰振動波形の包絡曲線データとしてテキストファイルに書き出すルーチンも備えている。さらに、波形データを FFT 処理することで、振動波形における卓越スペクトル周波数（主として曲げ 1 次の固有振動数）を抽出し、パソコン画面にそのスペクトルを表示させるようにした。図 2(b) は計測中に実際に表示される画面（上が時刻歴波形、下が周波数スペクトル）である。

3. FEM 解析モデルおよび解析方法

表 1 に、本有限要素法（FEM）解析において使用した CFRP と接着フィルム層の材料特性を示す。これらの値には、カタログ値かまたは推定値を用いた。なお、本 FEM 解析モデルの作成と数値解析の実施、および解析結果のポスト処理や表示には、汎用 FEM 解析コード ANSYS（version 10, サイバネットシステム）を用いた。

図 3(a) に、本研究で作成した FEM 解析モデルの概要を示す。供試体の長手方向を x 座標軸、厚さ方向を y 座標軸に一致させた。座標原点は供試体左端固定部の板厚中央とした。そして 4 節点 2 次元平面ひずみソリッド要素を用いて、CFRP 層を厚さ方向 1 分割、接着層を厚さ方向 2 分割した。供試体長手方向には、要素の縦横比が 5 を超えないように分割した。図中最上部の他より細長いメッシュ図がモデルの実際の x, y 方向寸法であり、それ以外のメッシュ図は板厚方向（ y 方向）に 10 倍に拡大表示している。図中のはく離無し供試体の場合、節点総数 561、要素総数 500 である。また、はく離部分は、それを挟んだ上下部分のメッシュ分割をそれぞれ独立に実施して自由表面を生成することでモデル化した。なお、図中の通り、はく離領域部は特に細かく要素分割した。そして本研究では供試体を片持はり状態で固定しているの、図中左端の節点自由度をすべて固定した。図中に示した中央 20% はく離、片側上部 40% はく離および両側上下部 60% はく離供試体の節点総数／要素総数はそれぞれ、2172／2000、3368／3000 および 4533／4600 である。なお、加速度ピックアップセンサは考慮していない。

図 3(b) に、本研究で実施した FEM 解析の内容を示す。本 FEM 解析では、最初に固有振動モード解析を実施し、曲げ 1 次の固有振動数を求める。全体質量マトリックスもフル・マトリックスとして評価した、減衰を考慮しない実固有値解析をブロック・ランチョス法にて行い、固有振動数および対応する振動モードを抽出した。なお通常の固有振動モード解析では解析対象を線形と仮定するため、はく離面での接触／非接触状態変化、材料内部の粘弾性特性および接触面での動摩擦などに起因する非線形性は十分に小さいと仮定された結果を得ることになる。次に、固有振動モード解析に用いた FEM 解析モデルを再利用して、自由端を 1.5mm（板厚の半分程度）まで静的にたわませた状態からその強制変位をステップ弛緩的に解放し、接触・大変形を考慮しながらの時刻歴応答解析を実施し、片持はり減衰振動に関する過渡応答シミュレーションを試みた。はく離面での接触は、ラグランジュ未定乗数法によって考慮し、はく離面での接触／非接触判定は要素辺中のガウス数値積分点毎に行った。時間積分には Newmark β 法を用い、時間刻みは 0.005s とした。なお、本解析では、系の全体減衰マトリックスは、比例粘性減衰（レイリー減衰）を仮定し全体剛性マトリックスおよび全体質量マトリックスの線形和と仮定した。

Table 1 Material properties

material		CFRP	Adhesive
thickness	t (mm)	0.45	0.20
Young's modulus	E_x (GPa)	59.0	3.0
	E_y (GPa)	10.0	
Shear modulus	G_{xy} (GPa)	3.0	1.154
Poisson's ratio	ν_{xy}	0.25	0.3
mass density	ρ ($\text{N s}^2/\text{mm}^4$)	1.6×10^{-9}	2.0×10^{-9}

その際に用いた定数は、はく離無しの供試体の減衰振動波形に関する測定結果と本 FEM 数値シミュレーション結果とが一致するように試行的に定めた。また本 FEM 数値シミュレーションでは、実験に用いた供試体のはく離面には基材に比べると滑らかな 2 枚のテフロンシートが挿入されているため、はく離接触面での動摩擦係数をゼロとした。最後に、片持はり状態で固定された供試体の自由端を 1.5mm（総板厚の半分程度）まで静的にたわませた状態に対して、静的な変形・応力解析を実施し、供試体内に蓄えられているひずみエネルギーやはく離面接触域の接触力の分布を調べることで、特に減衰特性発現メカニズムについてその定量的な考察を試みた。

Fig.3 Finite Element Method (FEM) modeling and analysis

4. 結果 および 考察

4・1 自由振動波形および固有振動数・損失係数

図 4 は、はく離無し供試体の自由振動減衰波形（図 1 中 Point A での加速度）である。波形は、2・2 節にて既に述べたように板厚の半分程度の初期たわみ振幅を与えて自由振動を開始した後、振動が曲げ 1 次モードに支配されながら十分に安定した、加速度ピーク値がおおよそ 50m/s^2 まで減衰した時点からのものである。同様に図 5 にはく離長さ 20%、図 6 にはく離長さ 40%、そして図 7 にはく離長さ 60% の供試体の自由振動減衰波形を示す。各図中とも (a)、(b) および (c) がそれぞれ中央はく離、片側上部はく離および両側上下部はく離の場合である。なお、初期たわみ振幅値を 2 倍（つまり板厚と同程度）に変えた場合の波形も計測した結果、加速度ピーク値がおおよそ 50m/s^2 まで減衰すれば、それ以降の波形は初期たわみ振幅の大きさによらず同一のものが得られることが確認された。したがって本報では、減衰特性に関する初期たわみ振幅量依存性を除いた結果が報告されている。

これらの減衰振動波形から、卓越周波数（曲げ 1 次の固有振動数） f_n および減衰振動波形の包絡線に対して減衰率法⁽¹⁾を適用することにより算出された損失係数 η を表 2 にまとめた。表中には FEM 解析により得られた曲げ 1 次の固有振動数も比較のために載せてある。なお、表中のそれぞれの結果に括弧で付したものは各項目（各列）のはく離無しの結果が 1 となるように正規化した値である。表 2 にまとめた固有振動数については、一般にはく離位置が中央にある場合よりは片側上部にある場合の方が固有振動数が若干高く、そして、両側上下部にある場合が一番固有振動数が低くなる傾向が見られた。この傾向は、実測結果および FEM 解析結果の双方で共通して認められ、はく離を 60% 導入した場合に特に顕著であった。これは固有振動数の変化に供試体の曲げ剛性の変化の影響が現れた結果であると考えられる。つまり、曲げ剛性は板厚の 3 乗に比例（固有振動数については

Fig.4 A typical free vibration wave form of the intact specimen

(a) center, 20%

(b) upper, 20%

(c) outers, 20%

Fig.5 Typical free vibration wave forms of 20% delaminated specimens

(a) center, 40%

(b) upper, 40%

(c) outers, 40%

Fig.6 Typical free vibration wave forms of 40% delaminated specimens

(a) center, 60%

(b) upper, 60%

(c) outers, 60%

Fig.7 Typical free vibration wave forms of 60% delaminated specimens

Table 2 Comparison of natural frequencies and loss factors

delamination length (%)	delamination type	natural frequency (Hz)		loss factor
		experiment	FEM	experiment
0	intact	36.7 (1)	40.2 (1)	0.0043 (1)
20	center interface	34.9 (0.95)	39.9 (0.99)	0.0053 (1.23)
	upper interface	35.6 (0.97)	40.1 (0.998)	0.0045 (1.05)
	outer interfaces	35.0 (0.95)	39.6 (0.98)	0.0041 (0.95)
40	center interface	35.0 (0.95)	38.1 (0.95)	0.0050 (1.16)
	upper interface	33.8 (0.92)	39.3 (0.98)	0.0074 (1.72)
	outer interfaces	32.0 (0.87)	36.4 (0.91)	0.0089 (2.07)
60	center interface	31.0 (0.84)	34.5 (0.89)	0.0060 (1.40)
	upper interface	34.9 (0.95)	37.6 (0.94)	0.0070 (1.63)
	outer interfaces	27.8 (0.75)	30.8 (0.77)	0.0138 (3.21)

曲げ剛性と断面積の関係から板厚に比例)する⁽¹²⁾ので、例えば、中央はく離を導入した場合、厚さが2分の1となった2枚の分離はりが、はく離面接触における相互作用⁽⁶⁾を保ちつつもそれぞれ自由状態となり、結果的にこれら分離独立した部分はりの個々の曲げ剛性がはり全体の固有振動数の低下にも直接影響を及ぼしているものと考えられる。そして、片側上部はく離のケースがはく離無しの場合に比べて最も固有振動数の低下が小さかったのは、元の厚さの4分の3の板厚を有し曲げ剛性低下の最も小さい下側分離はりが存在するためであると考えられる。また、両側上下部はく離のケースが最も固有振動数の低下が大きかったのは、元の厚さの4分の1の板厚のはり2枚と2分の1の板厚のはり1枚の合計3枚に分離したためと考えられる。なお、以上のようなはく離導入位置による固有振動数変化の一般的な傾向から、はく離40%導入の実測値だけが外れていた。はく離40%(および20%)を導入した供試体の曲げ1次固有振動数の低下量が、はく離無し供試体の固有振動数に比べてせいぜい10%程度と、さらに大きな低下を示したはく離60%の場合よりも検出精度に対する測定値の変化量が小さかったことが理由として挙げられる。曲げ2次、3次やねじり等のより高次の振動モードの情報を振動波形から抽出できれば検出精度が向上し、はく離40%導入の実測値の高精度化が可能だったかもしれないが、今回計測した自由振動では、高次振動モードは速やかに減衰してしまい、それらを明瞭に抽出することはできなかった。

一方、振動減衰特性を表す損失係数 η については、20%はく離では中央はく離、40%および60%はく離では両側はく離の場合が他の厚さ方向はく離導入位置よりも大きくなることから分かる。曲げ1次振動が減衰する機構として供試体自身に内在している要因としては、接着層の面外せん断ひずみエネルギーを介した材料内部減衰とはく離接触面での乾性摩擦減衰の2つがその主要なものとして挙げられる。20%はく離と40%または60%はく離、さらにそのはく離の板厚方向の挿入位置によって、これら2つの振動減衰機構の寄与の程度に差が生じていると考えられる。この2つの減衰機構については、次節に示すFEM解析結果から、さらに詳しく考察する。なお、表2に示された固有振動数の実測値はFEM解析結果よりも一貫して低くなった。本報で実施したFEM解析では、実測時に供試体自由端部付近に取り付けられていた加速度ピックアップセンサを考慮していなかったことが、その理由の一つに挙げられる。さらに、振動測定試験において片持ちはり固定の境界条件を厳密に実現することは一般に困難であり、不完全な固定状態は固有振動数の低下として現れることが指摘されており⁽¹³⁾、そのため理想的な固定条件を設定したFEM解析による固有振動数の方が高めとなったと考えられる。さらに、片持ちはり固定部付近には供試体とバースとの間の乾性摩擦などによる減衰も発生し、さらに空気抵抗も含めて、これら構造減衰の寄与も本報で得られた実測結果に含まれていることが考えられる。本報では、固定端部摩擦や空気抵抗などによる構造減衰は比較的小さく、また各供試体でほぼ同一とし、よって、はく離を導入したことによる供試体自身の減衰特性変化の相対的な比較や考察結果に、それが大きな影響を及ぼすことはないものとする。

最後に、図8にはく離無し供試体、そして図9(a)~(c)に20%はく離供試体の中央はく離、片側上部はく離、および両側上下部はく離の供試体それぞれに対してFEM自由振動時刻歴応答解析により得られた自由端部(図1中Point A)における加速度波形を示す。いずれも先に図4および図5(a)~(c)に示した実測定結果と同様の振動減衰波形を示すことが分かった。ただし、はく離長さ40%および60%については、少なくとも本研究で採用した時間積分手法および時間刻み幅では、安定した収束解をすべての供試体に対しては得ることができなかった。

Fig.8 A typical free vibration wave form of the intact specimen (FEM transient analysis)

Fig.9 Typical free vibration wave forms of 20% delaminated specimens (FEM transient analysis)

4・2 減衰メカニズムの考察

前節の図4～7および表2に示されたような減衰振動特性の実測結果について考察するため、図10に、本FEM解析で得られた、自由振動開始時（初期たわみ 1.5mm）での、面外せん断ひずみエネルギーの分布を示し、また、図11にはその時のはく離部分接触面圧分布を示す。そして、表3に、その時に積層材内部に蓄えられている面外せん断ひずみエネルギーの総和、およびはく離部分接触面垂直抗力の大きさをまとめる。なお、表中の面外せん断ひずみエネルギーの結果に括弧付けで示したものは、はく離無しの結果を1となるように正規化した値である。また、一般に理想的なはく離（き裂）先端部では応力値は無限大となるが、応力値と変形量をもとに有限領域に対して評価されるひずみエネルギー量については有限値となる。図10に示した面外せん断ひずみエネルギー分布は、前章の図3(a)に示したメッシュ分割の解析モデルによる結果であるが、それよりも粗くメッシュ分割した解析モデルによる結果と比較してもひずみエネルギー分布状態に顕著な差は見られなかったため、図10に示した分布図は妥当なメッシュ分割数による結果と考えられる。

表3より、接着層にはく離を導入することにより、いずれの供試体についても、面外せん断ひずみエネルギー量の総和の増加がみられることがわかる。ただし、図10に示されている結果から、はく離長さが20%、40%、60%と大きくなるにつれて、高いせん断ひずみエネルギーを示す部分がはく離先端部付近に局在する傾向にあり、それ以外の部分では、はく離無しの場合に比べて、面外せん断ひずみエネルギーの集中量が低下してゆく傾向にあることも確認される。それでもはく離20%の場合は比較的面外せん断ひずみエネルギーの分布が積層材全体の特に接着層内部に広がっていることが分かる。高分子基材料である接着層やCFRP層の内部減衰はせん断変形に対する減衰の寄与がそれ以外の変形形態に対するものよりも1桁程度大きいと言われており、そのため面外せん断エネルギーのわずかな増加でも積層材全体の振動減衰特性の向上につながったものと考えられる。その一方で、はく離長さ40%や60%の場合に見られたように、せん断ひずみエネルギーのはく離先端部付近への過度の集中は接着層やCFRP層の材料の劣化や疲労寿命低下など好ましくなく状況を招くことになると思われ、単にせん断ひずみエネルギーの積層材全体での総和だけでなく、その材料内部での分布状況にも注目する必要があることがわかる。

一方、表3中にまとめたはく離接触面垂直抗力については、20%、40%および60%のいずれのはく離長さの

Fig.10 Shear strain energy distributions (FEM analysis), unit: 10^{-3}J

Fig.11 Contact pressure distributions (FEM analysis), unit: MPa

供試体も、中央はく離、片側上部はく離、そして両側上下部はく離となるにつれて大きな値となった。なお、両側上下部はく離ははく離面積が他に比べて 2 倍であるため、それを考慮して垂直抗力を 1/2 にして比べる必要があるかもしれないが、両側上下部はく離の垂直抗力を 1/2 にしても先に述べた順番は変わらない。また、図 11 に示されているように片側上部はく離および両側上下部はく離では 20%、40%、60% のいずれの供試体もはく離先端部付近に接触圧力の大きな集中が見られた。はく離接触面での垂直抗力の大きさにより、はく離面摩擦減衰の程度を見積もることが可能と思われるが、先に示した面外せん断ひずみエネルギー分布の場合と同様に、はく離先

Table 3 Total amounts of transverse shear strain energy and contact force

delamination length (%)	delamination type	shear strain energy $\times 10^{-3} \text{ J}$	contact force N
0	intact	0.258 (1)	-
20	center interface	0.413 (1.60)	0.0031
	upper interface	0.340 (1.32)	0.0258
	outer interfaces	0.503 (1.95)	0.0549
40	center interface	0.776 (3.01)	0.0062
	upper interface	0.547 (2.12)	0.0475
	outer interfaces	1.007 (3.90)	0.1145
60	center interface	1.117 (4.33)	0.0501
	upper interface	0.813 (3.15)	0.0721
	outer interfaces	1.267 (4.91)	0.2157

端部付近への接触圧力の過度の集中は積層材全体の強度特性を考えた場合に好ましくないと判断され、その点では、その総和としての垂直抗力はさほど大きなものではないが、接触圧ははく離先端部付近に過度に集中せずに分散分布している中央はく離は優れていることが分かる。なお、本報では、はく離面に挿入された 2 枚のテフロンシート同士の間の接触時の動摩擦係数に関するデータが得られていなかったため、はく面での接触圧の結果から、摩擦力や摩擦により散逸してゆくエネルギーを定量的に評価するまでには至らなかった。

5. 結 言

本研究では、CFRP 積層材 4 枚を接着フィルムにより貼り合わせた積層構造はりに対して、接着層内に部分的に非接着部（層間はく離）を導入し、片持はり自由振動減衰波形を実計測した。また、有限要素法（FEM）を用いて、固有振動モード解析、接触大変形静解析および時刻歴応答解析を実施した。その結果、はく離部の割合が増えることにより、曲げ 1 次モードの固有振動数は低下し、その一方で、減衰特性指標としての積層材損失係数については、それがはく離の導入により一般に増加する傾向にあることが分かった。そして各供試体に対する FEM 解析結果から、積層材内部の面外せん断ひずみエネルギー分布およびはく離接触面圧分布におよぼす、層間はく離の長さや厚さ方向導入位置の影響について考察し、結果として、はく離を導入したことによる、特に減衰特性の変化を、ある程度定量的に評価できる可能性を示すことができた。

今後、本研究の内容をさらに進めていけば、実計測と FEM 数値解析とをハイブリッドに組み合わせることで、積層材のはく離の位置や程度を振動減衰特性の変化から見積もる枠組みを構築していけるものと考えている。

謝 辞

本研究の一部は、科学研究費補助金（課題番号 16760181）の援助の下で実施された。記して謝意を表する。

文 献

- (1) Lee, B.T., Sun, C.T., and Liu, D., "An Assessment of Damping Measurement in the Evaluation of Integrity of Composite Beams", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 6, No. 2 (1987), pp. 114-125.
- (2) Tracy, J.J., and Pardo, G.C., "Effect of Delamination on the Natural Frequencies of Composite Laminates", *Journal of Composites Materials*, Vol. 23, No. 12 (1989), pp. 1200-1215.
- (3) Shen, M.-H.H., and Grady, J.E., "Free Vibrations of Delaminated Beams", *AIAA Journal*, Vol. 30, No.5 (1992), pp. 1361-1370.
- (4) 金原勲, 影山和郎, 鈴木敏夫, 大沢勇, 伊出浩司, "レーザー振動画像法と有限要素法によるはく離を有する積層板の振動モード解析", 材料, Vol. 43, No. 487 (1994), pp. 476-481.
- (5) 邊吾一, 西恭一, 黄一正, 藤川由美, "ニューラルネットワークと実験データによる CFRP 積層材の損傷同定", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 62, No. 602 (1996), pp. 2338-2343.
- (6) 有富正男, 隈元健, 小田美紀男, 戸谷眞之, "はく離を有する積層はりの自由振動", 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 65, No. 638 (1999), pp. 3943-3950.
- (7) Żak, A., Krawczuk, W., and Ostachowicz, W., "Vibration of a Laminated Composite Plate with Closing Delamination", *Key Engineering Materials*, Vols. 167-168 (1999), pp. 17-26.
- (8) Luo, H., and Hanagud, S., "Dynamics of Delaminated Beams", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 10 (2000), pp. 1501-1519.
- (9) 稲田貴臣, 島村佳伸, 轟章, 小林英男, "共振・反共振周波数変化を利用した 2 段階はく離同定法の開発", 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 69, No. 678 (2003), pp. 231-238.
- (10) Della, C.N., and Shu, D., "Free Vibration Analysis of Delaminated Bimaterial Beams", *Composite Structures*, Vol. 80, No. 2 (2007), pp. 212-220.
- (11) 例えば, 日本機械学会編, 振動のダンピング技術, 第 1 版 (1998), 第 3 章, 養賢堂.
- (12) 例えば, 片岡真澄, 五百井俊宏, 振動工学の基礎, 初版 (1993), 第 6 章, コロナ社.
- (13) 例えば, 長松昭男, モード解析入門, 初版 (1993), 第 5 章, コロナ社.