幾何学的アプローチに基づく 4 ロータ小型ヘリコプタの位置及び機体ヨー角制御*

藤本 啓吾^{*1}, 横山 誠^{*2}, 田辺 裕治^{*2}

Position and Yaw Angle Control for a Four Rotor Mini Helicopter Based on a Geometric Approach

Keigo FUJIMOTO^{*1}, Makoto YOKOYAMA and Yuji TANABE

^{*1} Graduate School of Niigata University
8050 Ikarashi 2- nocho, Nishi-ku, Niigata, Japan

In this paper, we present a position and yaw angle controller for a four-rotor mini helicopter, which is designed via the backstepping methodology. In order to avoid a singularity problem caused by using of Euler angles, only quaternion is employed to represent the attitude of the airframe. Although the use of quaternion makes it difficult to obtain a desired attitude in a step of the back-stepping procedure, a geometrical approach gives an effective solution for the problem. It is shown in some numerical simulations that the proposed controller can achieve global tracking to demanded position and yaw angle simultaneously.

Key Words : Motion Control, Nonlinear Control, Unmanned Aerial Vehicle, Moving Robot, Aircraft

1. 緒 言

近年, 安全性や小型化, 低コスト化などの観点から, 無人航空機に対する関心が高まっており, 様々な航空機に関する研究・開発が盛んに行なわれている⁽¹⁾. 無人航空機の中でも, 無人小型ヘリコプタは, ホバリングや垂直離着陸可能など固定翼機では実現不可能な優れた飛行特性を有し, 環境モニタリング, 農薬散布などの様々な分野で活躍している.

ヘリコプタにも様々な種類が存在するが, 4 ロータ小型ヘリコプタは, 一般的に知られるシングルロータ式ヘリコプタと違い, ロータブレードのピッチ角変換機構を必要とせず, ロータ角速度の制御だけで運動制御が可能であり, 非常にシンプルな構造を有している (図 1). 現在までに, 筆者ら及び他の研究者らにより, バックステッピング手法にスライディングモード制御理論を併用した制御器^{(2)~(4)}, Nested saturation を基礎とした制御器^{(5)~(7)}などが提案され, その有効性が示されている. また, ここ数年, 外生外乱及び不確かさに対するより高いロバスト性向上を目指して, Astolfi らによって提案された I&I 適応制御手法^{(8)~(9)}や, 非線形 H_∞ 制御, HOSM 理論などを適用した制御器^{(10)~(12)}も提案されている.

4 ロータ小型ヘリコプタは, 機体に働く揚力ベクトルの方向が常に機体上部方向であるため, 姿勢変化によって様々な並進運動を実現することが特徴的である. したがって, 横風などによる外生外乱を打ち消すため, あるいは, 高速度での水平方向への移動や斜め下方向への移動を行うためには, 姿勢を大きく傾ける必要がある. そこで, より広い範囲の姿勢変化の実現を目指し, 筆者らや Abdelhamid Tayebi により, 姿勢表現に四元数を用いた

* 原稿受付 2011 年 1 月 6 日

^{*1} 正員, 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐 2 の町 8050)

^{*2} 正員, 新潟大学工学部

E-mail: f09k007e@mail.cc.niigata-u.ac.jp

姿勢制御器⁽³⁾⁽¹³⁾も種々提案されている。四元数とは、オイラーの定理に基づく姿勢表現方法であり、特異点が存在しないことがその大きな特徴である。さらに、姿勢表現に四元数を用いたとき、回転運動を比較的簡易に表現できる。後者に着目し、4ロータ小型ヘリコプタ、シングルロータ小型ヘリコプタ、及び人工衛星の制御問題において、適応制御理論を適用した制御器⁽¹⁰⁾⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾も提案されている。ところで、モニタリングやビジョンフィードバックを用いた協調制御などを実現するためには、機体のヨー角を制御できることが望まれる。しかしながら、垂直離着陸型無人航空機(VTOL-UAV)の制御に関して、四元数のみを用いた位置制御器は既に提案されているが⁽¹⁶⁾、機体のヨー角を同時に制御する制御器は未だ見受けられない。この理由は、オイラー角と違い、四元数の各パラメータとそのパラメータが表す姿勢のヨー角及び上部方向との間に複雑な非線形関係が存在し、かつ四元数自身が非線形な拘束条件を有しているため、望ましい姿勢を実現する四元数を導出することが困難となることに起因している。

そこで、筆者ら及びHamelらは、姿勢表現にオイラー角と四元数を適宜使い分けた制御器設計法⁽⁴⁾⁽¹⁷⁾を提案している。これは、ヨー角制御が可能となるが、制御器設計の際、オイラー角を利用するために特異点の問題が生じる。このため、例えば機体上部が水平方向近傍を向くような姿勢を指令することはできない。また、2つの姿勢表現を用いるために、制御器設計は煩雑となる。

以上の背景により、本論文では、4ロータ小型ヘリコプタの位置および機体ヨー角制御問題について検討する。特異点の問題を解決すべく、姿勢表現には四元数のみを利用し、バックステッピング手法を基礎に制御器設計を試みる。ただし、上述の問題を幾何学的アプローチによって解決する方法を提案する。そして、数値シミュレーションによって、提案する制御器の有効性を示す。

本論文で用いる変数の定義を以下に一括記述する。

$\Sigma O = \{e_x, e_y, e_z\}$	: 慣性座標系
$\Sigma A = \{e_1, e_2, e_3\}$	: 機体の重心を原点とし、また慣性主軸上に座標をとった機体座標系
$R_{XY} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$	: $\Sigma Y \rightarrow \Sigma X$ への座標変換行列
$e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$	: ΣA における幾何ベクトル e_3
$e_z = [0 \ 0 \ 1]^T$	: ΣO における幾何ベクトル e_z
$\eta = [\eta_x \ \eta_y \ \eta_z]^T$	: ΣO における ΣA の原点の位置
$v = [v_x \ v_y \ v_z]^T$	: ΣO における機体速度
$\varepsilon_{XY} = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_4]_{XY}^T$	: R_{XY} に対応する四元数
$\Omega_{XY} \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$	: ΣY における ΣX に対する ΣY の角速度ベクトル
$m \in \mathbf{R}$	: 機体質量
$f \in \mathbf{R}$	: 機体の重心に働く揚力
$\zeta = m^{-1}f$	
$J_j \ (j=1, 2, 3)$	: ΣA における各軸周りの慣性モーメント
$\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$	: ΣA における機体トルク
$\xi = [J_1^{-1}\tau_1 \ J_2^{-1}\tau_2 \ J_3^{-1}\tau_3]^T$	
$g \in \mathbf{R}$	: 重力加速度

また、 $[\bullet]_{XY}$ は行列 $\bullet_{XY}$ の ij 成分、 $[\bullet]_i$ はベクトル $\bullet$ の i 成分を、 $\sim$ は $\bullet$ の望ましい状態を、 $\underline{\bullet}$ は実状態 $\bullet$ と望ましい状態 $\sim$ との誤差をそれぞれ表すこととする。

2. 制御対象

本研究の制御対象である4ロータ小型ヘリコプタの概略図を図1に示す。機体重心に働く揚力 f は、角ロータで発生する揚力 $f_i \ (i=1, 2, 3, 4)$ の和である。また姿勢変化を生じさせるローリングおよびピッチングトルクは、それぞれ左右ロータおよび前後ロータで発生する揚力差によって発生する。また、左右ロータを時計方向、前後ロ

ータを反時計方向に回転させることによって、ホバリング時のヨーイングトルクを零にできる．数学モデルを以下に記述する．

回転運動モデル

機体座標系を慣性主軸上にとれば，機体の幾何学的対称性の仮定から慣性乗積は0となる．したがって，回転運動はオイラー方程式より次式で与えられる

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{OA} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\Omega}_{OA}) + \boldsymbol{\xi} \quad (1)$$

ただし，

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\Omega}_{OA}) = \begin{bmatrix} \Omega_2 \Omega_3 J_1^{-1} (J_2 - J_3) \\ \Omega_1 \Omega_3 J_2^{-1} (J_3 - J_1) \\ \Omega_1 \Omega_2 J_3^{-1} (J_1 - J_2) \end{bmatrix}$$

はジャイロ効果を， $\boldsymbol{\Omega}_{OA} = [\Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3]^T$ は機体角速度ベクトルを表す．

幾何モデル

回転行列 $\mathbf{R}_{OA}$ に対応する四元数 $\boldsymbol{\varepsilon}_{OA} = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4]^T$ は， ΣO または ΣA における回転軸方向の単位ベクトル $\mathbf{k} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T$ および回転角 ϕ を用いて次式で与えられる（図2）．

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{OA} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} \sin \frac{\phi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ただし，次式の拘束条件を伴う．

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{OA}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{OA} = 1 \quad (3)$$

機体角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}_{OA}$ と四元数 $\boldsymbol{\varepsilon}_{OA}$ の時間微分の関係は，一般に次式で与えられる．

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{OA} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\varepsilon}_{OA}) \boldsymbol{\Omega}_{OA} \quad (4)$$

ここで， $\mathbf{G}(\boldsymbol{\varepsilon})$ は次の行列を表す．

Fig. 1 Schematic diagram of the four-rotor mini helicopter

Fig. 2 Quaternion

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon_4 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \varepsilon_4 \\ -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

並進運動モデル

重心の運動方程式は次式で与えられる.

$$\dot{\mathbf{v}} = -g\mathbf{e}_z + \mathbf{R}_{OA}(\boldsymbol{\varepsilon}_{OA})\mathbf{e}_3\zeta \quad (5)$$

ただし, 回転行列 $\mathbf{R}_{OA}$ は, 四元数 $\boldsymbol{\varepsilon}_{OA}$ を用いて次式で表される.

$$\mathbf{R}_{OA}(\boldsymbol{\varepsilon}_{OA}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_3\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_2\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3\varepsilon_4) & \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_4^2 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1\varepsilon_4) \\ 2(\varepsilon_3\varepsilon_1 - \varepsilon_2\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_4) & \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 \end{bmatrix}_{OA} \quad (6)$$

ここで, 式 (5) の右辺第 2 項の $\mathbf{R}_{OA}(\boldsymbol{\varepsilon}_{OA})\mathbf{e}_3\zeta$ は機体に働く揚力ベクトルを表しており, その方向は機体姿勢を表す四元数 $\boldsymbol{\varepsilon}_{OA}$, また, その大きさは揚力 ζ によってそれぞれ定められることに留意する.

実際は, 入力電圧によって各ロータのアクチュエータであるモータを制御し, 機体に働く揚力とトルクを制御する. しかし, 本論文では説明の簡略化のため, 制御入力を揚力 ζ とトルク ξ とし, システム式 (1), (4), (5) に関する制御問題について考える (図 3).

3. 制御器設計

本制御器のブロック線図を図 4 に示す. 本制御器は位置制御器および姿勢制御器で構成され, それぞれバックステッピング手法を基礎に設計する. 位置制御器では, 姿勢を並進モデルへの仮想的な入力とみなして, 望ましい姿勢と揚力入力を設計する. 一方, 姿勢制御器では, 実姿勢を位置制御器で生成される望ましい姿勢に追従させる機体トルク入力を設計する.

3・1 位置制御器設計

いま, サブシステム式 (5) において, 機体に働く揚力ベクトル $\mathbf{R}_{OA}\mathbf{e}_3\zeta$ を仮想入力と考え, 位置指令に実位置を追従させる望ましい揚力ベクトル $\mathbf{R}_{OA}\mathbf{e}_3\zeta$ を設計する. 位置指令 $\mathbf{r}$ を用いて位置追従誤差と速度追従誤差をそれぞれ次のように定義する.

$$\underline{\boldsymbol{\eta}} \triangleq \boldsymbol{\eta} - \mathbf{r} \quad (7)$$

Fig. 3 Block diagram of Plant

Fig. 4 Block diagram of control system

$$\underline{\mathbf{v}} \triangleq \dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{r}} \quad (8)$$

これらのダイナミクスは、式 (5), (7), (8) を用いると以下のように表される.

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\eta}}} = \underline{\mathbf{v}} \quad (9)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{v}}} = -g\mathbf{e}_z + \mathbf{R}_{oA}\mathbf{e}_3\zeta - \ddot{\mathbf{r}} \quad (10)$$

ここで、望ましい揚力ベクトルを次式で与える.

$$\mathbf{R}_{oA}\mathbf{e}_3\zeta = g\mathbf{e}_z + \ddot{\mathbf{r}} - \Lambda_1\underline{\boldsymbol{\eta}} - \Lambda_2\underline{\mathbf{v}} \triangleq \boldsymbol{\chi} \quad (11)$$

ただし、対角行列 $\Lambda_i \in \mathbf{R}^{3 \times 3} > 0$ ($i=1,2$) は設計パラメータであり、 $\boldsymbol{\chi} = [\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3]^T$ である. サブシステム式 (9), (10) に式 (11) を代入し、整理すると次式を得る.

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\eta}}} = \underline{\mathbf{v}} \quad (12)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{v}}} = -\Lambda_1\underline{\boldsymbol{\eta}} - \Lambda_2\underline{\mathbf{v}} + \mathbf{R}_{oA}\{\mathbf{I} - \mathbf{R}_{AA}^T\}\mathbf{e}_3\zeta \quad (13)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は単位行列を表す. よって、式 (13) より、実姿勢 $\mathbf{R}_{oA}$ と望ましい姿勢 $\mathbf{R}_{oA}$ が一致するとき、すなわち誤差姿勢を表す回転行列 $\mathbf{R}_{AA} = \mathbf{I}$ のとき、サブシステム式 (12), (13) が大域的漸近安定となることがわかる.

次に、実位置を位置指令に漸近的に追従させ、かつ指令ヨー角と一致する望ましい姿勢 $\mathbf{R}_{oA}$ について考える. まず、式 (6) を用いて、望ましい揚力ベクトルに関する条件式 (11) を次のように成分表示する.

$$\begin{bmatrix} 2(\tilde{\epsilon}_3\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2\tilde{\epsilon}_4) \\ 2(\tilde{\epsilon}_2\tilde{\epsilon}_3 - \tilde{\epsilon}_1\tilde{\epsilon}_4) \\ \tilde{\epsilon}_3^2 - \tilde{\epsilon}_1^2 - \tilde{\epsilon}_2^2 + \tilde{\epsilon}_4^2 \end{bmatrix}_{o\bar{A}} \zeta = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここで、 $[\tilde{\epsilon}_i]_{o\bar{A}}$ ($i=1, \dots, 4$) は回転行列 $\mathbf{R}_{o\bar{A}}$ に対応する四元数を表す. いま、指令ヨー角 ψ_r と一致する望ましい姿勢 $\mathbf{R}_{o\bar{A}}$ の条件について考える. ただし本論文では、図 5 に示すように、ヨー角 ψ をベクトル $\mathbf{e}_1$ の $e_x - e_y$ 平面への正射影ベクトル $\mathbf{e}_\psi$ とベクトル $\mathbf{e}_x$ が成す角度で定義する. $\mathbf{R}_{o\bar{A}}$ の 1 行 1 列目成分は、幾何ベクトル $\tilde{\mathbf{e}}_1$ の ΣO における e_x 成分、 $\mathbf{R}_{o\bar{A}}$ の 2 行 1 列目成分は、幾何ベクトル $\tilde{\mathbf{e}}_1$ の ΣO における e_y 成分であることから、次式の条件式を与える (図 5).

$$[R_{21}]_{o\bar{A}} \cos \psi_r = [R_{11}]_{o\bar{A}} \sin \psi_r \quad (15)$$

Fig. 5 Indication of desired attitude condition for yaw angle condition of control system

式 (15) に関係式 (6) を用いて, 四元数を用いて表すと次のようになる.

$$\left[2(\tilde{\epsilon}_1\tilde{\epsilon}_2 + \tilde{\epsilon}_3\tilde{\epsilon}_4)\right]_{OA} \cos\psi_r = \left[\tilde{\epsilon}_1^2 - \tilde{\epsilon}_2^2 - \tilde{\epsilon}_3^2 + \tilde{\epsilon}_4^2\right]_{OA} \sin\psi_r \quad (16)$$

以上より, 望ましい姿勢及び揚力を設計する問題は, 式 (14), (16) を $[\tilde{\epsilon}_i]_{OA}$ ($i=1, \dots, 4$) について解く問題に帰着された. しかしながら, これらは複雑な非線形代数方程式であるため, これらから直接的に望ましい姿勢を設計することは容易ではない. そこで, 幾何学的アプローチによる以下のステップにより, 望ましい姿勢を設計する (図 6).

STEP 1 慣性座標系 ΣO の上部方向を指す e_z は, $e_x - e_y$ 平面内の回転軸周りの回転によって, 任意の単位ベクトルと一致させることが可能である. これに着目し, $e_x - e_y$ 平面内に回転軸をとり, 式 (14) を満たす, 座標 $\Sigma A' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ を導出する.

STEP 2 回転軸を e'_3 にとるとき, 座標 $\Sigma A'$ の上方向が変化しないことに着目し, e'_3 軸を回転軸にとり, 式 (14), (15) を満たす望ましい機体座標 $\Sigma \tilde{A} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ を導出する.

各ステップの詳細を以下に述べる.

STEP 1 まず, $\Sigma A' \rightarrow \Sigma O$ への回転行列 $R_{OA'}$ に対応する四元数 $\epsilon_{OA'} = [\epsilon'_1 \ \epsilon'_2 \ \epsilon'_3 \ \epsilon'_4]_{OA'}^T$ を導出する. 四元数 $\epsilon_{OA'}$ は式 (14) を満たすことから, 次式を得る.

$$\begin{bmatrix} 2(\epsilon'_1\epsilon'_2 + \epsilon'_3\epsilon'_4) \\ 2(\epsilon'_2\epsilon'_3 - \epsilon'_1\epsilon'_4) \\ (\epsilon'_3)^2 - (\epsilon'_1)^2 - (\epsilon'_2)^2 + (\epsilon'_4)^2 \end{bmatrix}_{OA'} \zeta = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$\epsilon_{OA'}$ に関する回転軸 $\mathbf{k}'$ を $e_x - e_y$ 平面内に限定することから, 式 (2) より拘束条件

$$[\epsilon'_3]_{OA'} = 0 \quad (18)$$

を得る. 揚力は正とする. また, $\Sigma A'$ の上部方向 e'_3 は慣性座標系 ΣO における真下方向を指すことを要求しないとする. すなわち, 次の条件を与える.

$$\zeta > 0, \quad [\epsilon'_4]_{OA'} \neq 0 \quad (19)$$

このとき, 四元数の拘束条件式 (3) 及び式(17), (18)を用いて, 揚力 ζ および四元数 $\epsilon_{OA'}$ について解くと以下のようなになる.

$$\zeta = \|\chi\| \quad (20)$$

Fig.6 Design procedures of desired attitude

$$[\varepsilon'_4]_{OA'} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\chi_3}{\zeta} \right)} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \end{bmatrix}_{OA'} = \frac{1}{2\zeta[\varepsilon_4]_{OA'}} \begin{bmatrix} -\chi_2 \\ \chi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

STEP 2 まず, $\Sigma\tilde{A} \rightarrow \Sigma A'$ への回転行列 $\mathbf{R}_{A'\tilde{A}}$ に対応する四元数 $\varepsilon_{A'\tilde{A}}$ を導出する. 回転軸を $\Sigma A'$ の上部方向 e'_3 と一致させることから, 式 (2) より, 四元数は次式で与えられる.

$$\varepsilon_{A'\tilde{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (23)$$

ここで, Φ は $\varepsilon_{A'\tilde{A}}$ に関する回転角を表す. 回転行列のチェーンルール, すなわち

$$\mathbf{R}_{O\tilde{A}} = \mathbf{R}_{OA'} \mathbf{R}_{A'\tilde{A}} \quad (24)$$

と式 (6), (15), (23) を用いて, Φ について解くと,

$$\Phi = \tan^{-1} \left(\frac{[R_{21}]_{OA'} \cos \psi_r - [R_{11}]_{OA'} \sin \psi_r}{[R_{12}]_{OA'} \sin \psi_r - [R_{22}]_{OA'} \cos \psi_r} \right) \quad (25)$$

を得る. 式 (25) の導出は付録に記す. 以上より, 回転行列 $\mathbf{R}_{O\tilde{A}}$ に対応する四元数 $\tilde{\varepsilon}_{O\tilde{A}}$ は, 四元数のチェーンルールより次式で与えられる.

$$\tilde{\varepsilon}_{O\tilde{A}} = \mathbf{Z}(\varepsilon_{OA'}) \varepsilon_{A'\tilde{A}} \quad (26)$$

ここで, $\mathbf{Z}(\varepsilon)$ は以下の行列を表す.

$$\mathbf{Z}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon_4 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & -\varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \\ -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

以上で, 揚力 (式 (20)) 及び望ましい姿勢 (式 (26)) が設計された.

3・2 姿勢制御器設計

機体姿勢を上で設計した望ましい姿勢に漸近追従させるために, まず誤差姿勢のダイナミクスを導く. 四元数のチェーンルールより, 誤差姿勢を表す回転行列 $\mathbf{R}_{\tilde{A}A}$ に対応する四元数は次式で与えられる.

$$\varepsilon_{\tilde{A}A} = \mathbf{Z}^T(\tilde{\varepsilon}_{O\tilde{A}}) \varepsilon_{OA} \quad (27)$$

本式の時間微分は、式 (4) と同様に次式で与えられる。

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}}_{\tilde{A}A} = \mathbf{G}(\underline{\mathbf{e}}_{\tilde{A}A}) \underline{\boldsymbol{\Omega}}_{\tilde{A}A} \quad (28)$$

ここで、 $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_{\tilde{A}A}$ は ΣA における $\Sigma \tilde{A}$ に対する ΣA の角速度ベクトルを表す。角速度のチェーンルールより、次式を得る。

$$\underline{\boldsymbol{\Omega}}_{\tilde{A}A} = \underline{\boldsymbol{\Omega}}_{OA} - \mathbf{R}_{\tilde{A}A}^T \underline{\boldsymbol{\Omega}}_{O\tilde{A}} \quad (29)$$

ただし、 $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_{O\tilde{A}}$ は $\Sigma \tilde{A}$ における ΣO に対する $\Sigma \tilde{A}$ の角速度ベクトルを表し、また、四元数の時間微分の関係式より次式で与えられる。

$$\underline{\boldsymbol{\Omega}}_{O\tilde{A}} = 4\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{e}}_{O\tilde{A}})^T \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{O\tilde{A}} \quad (30)$$

式 (28) に式 (29) と (30) を代入すると、誤差姿勢のダイナミクスを表す次式を得る。

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}}_{\tilde{A}A} = \mathbf{G}(\underline{\mathbf{e}}_{\tilde{A}A}) \left\{ \underline{\boldsymbol{\Omega}}_{OA} - 4\mathbf{R}_{\tilde{A}A}(\underline{\mathbf{e}}_{\tilde{A}A})^T \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{e}}_{O\tilde{A}})^T \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{O\tilde{A}} \right\} \quad (31)$$

次に、機体角速度ベクトル $\underline{\boldsymbol{\Omega}}_{OA}$ を誤差姿勢ダイナミクスへの仮想入力とみなし、誤差姿勢 $\underline{\mathbf{e}}_{\tilde{A}A}$ を漸近安定化させる望ましい機体角速度 $\tilde{\underline{\boldsymbol{\Omega}}}_{OA}$ を設計する。機体座標系 ΣA と理想機体座標系 $\Sigma \tilde{A}$ が一致するとき、誤差姿勢 $\underline{\mathbf{e}}_{\tilde{A}A} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ となることに着目し、サブシステム式 (31) に関するリアプノフ関数の候補を

$$V_1(\underline{\mathbf{e}}_{\tilde{A}A}) = \sum_{i=1}^3 [\underline{\mathbf{e}}_i^2]_{\tilde{A}A} + (1 - [\underline{\mathbf{e}}_4]_{\tilde{A}A})^2 \quad (32)$$

と選ぶ。さらに、望ましい機体角速度 $\tilde{\underline{\boldsymbol{\Omega}}}_{OA}$ を次のように設計する。

$$\tilde{\underline{\boldsymbol{\Omega}}}_{OA} = -\alpha \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{e}}_1 \\ \underline{\mathbf{e}}_2 \\ \underline{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix}_{\tilde{A}A} + 4\mathbf{R}_{\tilde{A}A}(\underline{\mathbf{e}}_{\tilde{A}A})^T \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{e}}_{O\tilde{A}})^T \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{O\tilde{A}} \quad (33)$$

ただし、 $\alpha \in \mathbf{R}^1 > 0$ は設計パラメータである。このとき、リアプノフ関数の導関数は次式のようになり、負定となることが容易に確認できる。

$$\dot{V}_1(\underline{\mathbf{e}}_{\tilde{A}A}) = -\alpha \sum_{i=1}^3 [\underline{\mathbf{e}}_i^2]_{\tilde{A}A} \leq 0 \quad (34)$$

次に、回転運動モデル式 (1) とサブシステム式 (31) を安定化させるトルク入力を設計する。機体角速度ベクトルと望ましい機体角速度ベクトルとの誤差を

$$\underline{\mathbf{e}}_{OA} = \underline{\boldsymbol{\Omega}}_{OA} - \tilde{\underline{\boldsymbol{\Omega}}}_{OA} \quad (35)$$

と定義すると、その導関数は式 (1) を用いて以下のように表される。

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}}_{OA} = \mathbf{F}(\underline{\boldsymbol{\Omega}}_{OA}) + \xi - \dot{\tilde{\underline{\boldsymbol{\Omega}}}}_{OA} \quad (36)$$

サブシステム式 (31) , (36) に関するリアプノフ関数の候補を

$$V_2 = V_1(\underline{\varepsilon}_{\dot{A}A}) + \frac{1}{2} \underline{\Omega}_{OA}^T \underline{\Omega}_{OA} \quad (37)$$

と選び、さらにトルク入力を次のように設計する.

$$\xi = -\mathbf{G}(\underline{\varepsilon}_{\dot{A}A})^T \left[\frac{\partial V_1(\underline{\varepsilon}_{\dot{A}A})}{\partial \underline{\varepsilon}_{\dot{A}A}} \right] - \mathbf{F}(\underline{\Omega}_{OA}) + \dot{\underline{\Omega}}_{OA} - \beta \underline{\Omega}_{OA} \quad (38)$$

ただし, $\beta \in \mathbf{R}^1 > 0$ は設計パラメータである. このとき, リアプノフ関数の導関数は次式のように負定となり,

$$\dot{V}_2 = -\alpha \sum_{i=1}^3 [\varepsilon_i^2]_{\dot{A}A} - \beta \underline{\Omega}_{OA}^T \underline{\Omega}_{OA} \quad (39)$$

サブシステム式 (31), (36) は大域的漸近安定である.

3・3 ヨー角に関する考察

ピッチ角が 90deg を境に変化する状況におけるヨー角変化に関して考察する. 説明の簡単化のために, 指令ヨー角は 0deg (一定) であり, また実姿勢が望ましい姿勢に一致している状況を考える. このときのピッチ角 90deg 前後における機体姿勢を図7~9に示す. 図7の状態から図8へと姿勢が変化する場合, ピッチ角が 90deg を越える瞬間に, e_1 の $e_x - e_y$ 平面への正射影ベクトル e_ψ は, 指令前方方向ベクトル $e_{\psi r}$ (e_x と指令ヨー角 ψ_r をなすベクトル) と逆方向を指す. すなわち, この

Fig.7 Yaw angle around pitch angle not exceeding 90 degree ($\psi = 0\text{deg}$)

Fig.8 Yaw angle around pitch angle exceeding 90 degree ($\psi = 180\text{deg}$)

Fig.9 Yaw angle around pitch angle exceeding 90 degree in $\Sigma O = \{e_x, e_y, e_z\}$

瞬間に実機体ヨー角は、指令ヨー角と不連続的に180degずれる。逆にもし仮に、実ヨー角が常に指令ヨー角と一致するように望ましい姿勢を設計すれば、望ましい姿勢は不連続となり、安定性などの問題から不適切であると考える。

次に、望ましい姿勢のヨー角を決定する回転角 Φ を与える式(25)について考察する。 $\tan^{-1}$ の性質上、回転角 Φ は Φ_0 を一つの解として一般に、 $\Phi = \Phi_0 \pm 180n$ ($n=1, \dots, k$) [deg] で与えられる。そこで、ピッチ角が90度を境に変化する際には、回転角 Φ が不連続にならないようにプログラム上その解を選択する。その結果、前述のように、望ましい姿勢の不連続化を防ぐことができるが、望ましい姿勢のヨー角は、指令ヨー角と逆方向を指すこととなる。

ところで、例えばビジョンフィードバックによる協調制御や環境モニタリングなどを想定したとき、機体ヨー角の制御を行わない制御器と異なり、提案する制御器では、ピッチ角が90degを境に変化する状況においても、機体に搭載したカメラの上下方向の首振り制御（チルト制御）だけで、ターゲットを捉えることが可能である。

4. 数値シミュレーション

本章では、提案した制御器の有効性を数値シミュレーションによって検証した結果を示す。数値シミュレーションに用いたパラメータ値は、筆者らの研究室で現在製作中の実験装置を参考に、以下の値とした。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 7.04 \times 10^{-3} & 7.04 \times 10^{-3} & 1.34 \times 10^{-3} \end{bmatrix}^T \text{ [kgm}^2\text{]}, \quad m = 0.52 \text{ [kg]}$$

機体の初期姿勢は以下で与えた。

Fig.10 Simulation result

$$\mathbf{q} = [-0.4.162 \quad 0.0734 \quad -0.6943 \quad 0.5826]^T$$

また、初期状態を空中停止状態（他の初期状態は零）とした。指令ヨー角は図 10(c)のように与えた。広範囲な姿勢運動を要求する状況を想定し、位置指令は開始 10 秒後に円軌道を、その 5 秒後に螺旋軌道を指令した（図 10(a)）。数値シミュレーション結果を図 10 に示す。

約 21 秒付近において、機体ヨー角が不連続的に変化し、機体ヨー角が指令ヨー角と 180deg ずれていることがわかる（図 10(c)）。これは、3 章の図 7～9 に示したように、ピッチ角が 90deg を超える際に（図 10(d)）、 e_1 の $e_x - e_y$ 平面への正射影ベクトル e_ψ が指令前方方向ベクトル $e_{\psi r}$ の逆方向を指したためである。したがって、図 10(b)に示したように、実姿勢は不連続に変動していないことに注意されたい。また、望ましい姿勢のヨー角も、機体ヨー角と共に指令ヨー角と 180deg ずれていることがわかる（図 10(c)）。これは、3 章にて述べたように、望ましい姿勢を不連続な変動を避けるように設計したためである。実際、図 10(b)より、望ましい姿勢は不連続な挙動を示していない。この結果として、実位置及び実姿勢は、不連続な変動を生じることなく、指令位置及び望ましい姿勢に、漸近的に追従できている（図 10(a), (b)）。

5. 結 言

本論文では、姿勢表現方法に四元数だけを利用した位置およびヨー角制御器を、バックステッピング法によって設計した。設計過程において、望ましい姿勢を導出する際に発生する、複雑な非線形代数方程式を解く問題に対して、幾何学的考察による解決方法を提案した。

本制御器設計法を応用することによって、過去に提案されてきた四元数を用いた種々の制御器^{(10), (13)～(15)}を、ヨー角制御も可能とし、かつより広範囲な姿勢変化を実現できる制御器へと拡張することが可能である。

付録 式 (25) の導出

式 (23) 及び回転行列と四元数の関係式 (6) を用いて、式 (24) を成分表示すると次のようになる。

$$\mathbf{R}_{O\tilde{A}} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{bmatrix}_{O\tilde{A}'} \begin{bmatrix} -\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 & 2\varepsilon_3\varepsilon_4 & 0 \\ 2\varepsilon_3\varepsilon_4 & -\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{A'\tilde{A}} \quad (40)$$

式 (23) 及び倍角の公式より

$$-[\varepsilon_3]_{A'\tilde{A}}^2 + [\varepsilon_4]_{A'\tilde{A}}^2 = \cos \Phi \quad (41)$$

$$2[\varepsilon_3]_{A'\tilde{A}}[\varepsilon_4]_{A'\tilde{A}} = \sin \Phi \quad (42)$$

式 (41), (42) を式 (40) に代入することにより次式を得る。

$$[R_{11}]_{O\tilde{A}} = [R_{11}]_{O\tilde{A}'} \cos \Phi + [R_{12}]_{O\tilde{A}'} \sin \Phi \quad (43)$$

$$[R_{21}]_{O\tilde{A}} = [R_{21}]_{O\tilde{A}'} \cos \Phi + [R_{22}]_{O\tilde{A}'} \sin \Phi \quad (44)$$

式 (43), (44) を式 (15) に代入し、 Φ について解くことで式 (25) を得る。

文 献

- (1) Nonami, K., Kendoul, F., Suzuki, S., Wang, W., and Nakazawa, D., *Autonomous Flying Robots-Unmanned Aerial Vehicles and Micro Aeria* (2010), Springer Japan.
- (2) Bouabdallah, S., and Siegwart, R., "Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor," *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Barcelona, Spain, (2005), pp. 2259-2264.
- (3) 小池雄史, 横山誠, "4 ローター小型ヘリコプターの制御," 第 48 回自動制御連合講演会, (2005), G2-13.
- (4) Yokoyama. M., and Fujimoto, K., Velocity Tracking Control of a Four-rotor Mini Helicopter, *Motion and Vibration Control* (2009), pp. 335-344, Springer Heidelberg.
- (5) Castillo, P., Dzul, A., and Lozano, R., "Real-time Stabilization and Tracking of a Four-rotor Mini Rotorcraft," *IEEE Transactions on Control System Technology*, Vol. 12, No. 4 (2004), pp. 510-516.
- (6) Salazar-Cruz, S., Lara, E. D., and Lozano, R., "Embedded control system for a four-rotor UAV," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 21 (2007), pp. 189-204.
- (7) Beji L. and Abichou A., "Streamlined Rotors Mini Rotorcraft: Trajectory Generation and Tracking," *International Journal of Control, Automation, and systems*, Vol. 3, No. 1 (2005), pp. 87-99.
- (8) Astolfi, A., and Ortega, R., "Immersion and Invariance a New Tool for Stabilization and Adaptive Control of Nonlinear Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, No.4 (2003), pp. 590-606.
- (9) Astolfi, A., Karagiannis, D., and Ortega, R., "Nonlinear and Adaptive Control with Applications (2008), Springer.
- (10) Fujimoto, K., Yokoyama. M., and Yuji, T., "I&I-based adaptive control of a four-rotor mini helicopter," *36rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, (2010).
- (11) Raffo, G. V., Ortega, M. G., and Rubio F. R., "An Integral Predictive/ Nonlinear H_∞ Control Structure for a Quadrotor Helicopter," *Automatica*, Vol. 46, (2010), pp. 29-39.
- (12) Benallegue, A., Mokhtari, A., and Fridman, L., "High-order Sliding-mode Observer for a Quadrotor UAV," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 18, (2008), pp. 427-440.
- (13) Tayebi, A., and McGilcary, S., "Attitude Stabilization of a VTOL Quadrotor Aircraft," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 14, No. 3 (2006), pp. 562-571.
- (14) Suzuki, S. and Nonami, K., "Nonlinear Adaptive Control for Small-Scale Helicopter," *The 1^{0th} International Conference on Motion and Vibration Control*, (2010), 1B11.
- (15) 深尾隆則, 山口真史, 足立紀彦, "スペースクラフトのバックステッピング法による姿勢追従制御" 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 67, No.653 (2001), pp. 131-137.
- (16) Abdessameud, A. and Tayebi, A., "Global Trajectory Tracking Control of VTOL-UAVs without Linear Velocity Measurements," *Automatica*, (2010), pp. 1-7.
- (17) Hamel, T., et al., "Dynamic Modelling and Configuration Stabilization for an X4-flyer," *15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain*, (2002).