エネルギー整形非線形制御による 倒立振り子型移動体の不安定性を利用した加速制御*

横山 和人^{*1}, 高橋 正樹^{*2}

Energy Shaping Nonlinear Acceleration Control for a Mobile Inverted Pendulum Utilizing Instability

Kazuto YOKOYAMA^{*1} and Masaki TAKAHASHI

^{*1} Keio University, School of Science for Open and Environmental System
3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8522, Japan

A nonlinear controller for accelerating a mobile inverted pendulum (MIP) with interconnection and damping assignment passivity-based control (IDA-PBC) is proposed. For underactuated systems, nonlinear partial differential equations (PDEs) must be solved to derive the IDA-PBC and it is a difficult task in general. However, this study shows that the MIP can be properly described as a full actuated port-Hamiltonian system focusing only on the pendulum dynamics. The controller is derived without solving the PDEs. Although our controller is for only the pendulum part of the system, the translational acceleration can be indirectly controlled utilizing the relation between the inclination of the pendulum and the acceleration arising from instability of the system. The controller can achieve various properties through energy shaping procedure of the IDA-PBC. Especially an energy function which will lead to safe operation of the MIP is proposed in this study. The function ensures that motion of the pendulum is restricted in a predefined region and converges to a desired pendulum angle. The controller also gets the pendulum back to the desired angle with a large state-dependent gain when the pendulum comes close to fall over. Effectiveness of the controller is verified through simulations.

Key Words : Nonlinear Control, Passivity-Based Control, Mobile Inverted Pendulum, Instability, Mobility

1. 緒 言

倒立振り子型移動体は旋回性や省スペース性から、人間の生活空間に近い環境で運用する移動ロボットやパーソナルモビリティへの応用が期待される。このシステムは運用の前提として倒立状態の維持が要求され、安全性の高い加減速・走行制御が必要である。ここで本研究における安全性とは、倒立振り子型移動体の車体の傾き角度に関するものを意味する。制御時に車体が予期せず大きく傾き転倒する危険性を回避しつつ、所望の並進方向加速度を達成するための制御系を提案する。

従来研究の走行制御手法は大きく分けて 2 つある。1 つ目は、鉛直上向きを振り子角度の目標値としながら、車輪に所望の回転角度や角速度を与えて走行させるものである。線形近似モデルに基づく線形制御が主流であるが⁽¹⁾⁽³⁾、安定性は所望の平衡点近傍のみで保証される。非線形運動方程式に基づきスライディングモード制御系を導出する研究⁽⁴⁾もあるが、切替超平面上でのシステムを平衡点まわりで線形化した上で局所的な安定性を保証している。従ってこれらの手法では、外乱などでシステムの状態が所望の平衡点近傍から大きく外れた場合などに理論的には安定性を保証できない。また、加速・走行は車輪の回転角度や角速度に対する目標値を与えて行うことから、追従動作に伴う振り子角度の動きの予測が難しい。目標値の与え方によっては振り子が大きく傾き、安定性

* 原稿受付 2011 年 3 月 22 日

^{*1} 正員, 慶應義塾大学大学院 理工学研究科 開放環境科学専攻 (〒223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1)

^{*2} 正員, 慶應義塾大学 理工学部 システムデザイン工学科

E-mail: kazuto_yokoyama@2008.jukuin.keio.ac.jp

を保証できなくなる可能性がある。

これに対して2つ目は、本制御対象の力学的特徴である不安定性を利用し、目標振子角度を与えて加速・走行を達成するものである。ここで不安定性の利用とは、振子が前方または後方に倒れ込み定常状態となるとき、動力学的な釣り合いから、移動体の並進方向加速度も一定値になるという関係⁽⁵⁾の利用を指す。従って目標振子角度を鉛直上向きではなく、故意に傾いた状態として与えることで、間接的に加速・走行制御を行うことができる。振子角度の動きも予測しやすく、安全性の観点からも好ましい。しかしこの関係を利用した従来研究では、ヨー方向の運動も同時に制御するという目的も有するものの、フィードバック線形化を併用した制御系設計が行われてきた⁽⁵⁾⁽⁶⁾。従って制御対象の正確なパラメータが必要であり、モデル化誤差などに対する脆弱性が懸念される。また特定の振子角度まわりで線形近似したモデルに基づく線形制御を用いることを考えた場合でも、様々な目標角度に対して安定性を保証することは困難である。

以上に基づき、本研究では広範囲なシステムの状態での安定性保証、およびロバスト性の観点から、線形近似モデルやフィードバック線形化を用いず、不安定性を利用した非線形加速制御系設計を目指す。ただし移動体の運動は前後方向の2次元平面内に限定して考える。用いる制御手法は、非線形システムをはじめ、劣駆動機械システムに対する広範囲な状態での安定性保証などで有効性が示されている⁽⁷⁾ Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control (IDA-PBC)⁽⁸⁾である。IDA-PBCはシステムのport-Hamiltonian (PH) 構造⁽⁹⁾を保存しつつ、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの両者を整形し、PHシステムが有する受動性を利用して安定化を達成する。エネルギー整形を用いた受動性に基づく制御は竹垣、有本による研究⁽¹⁰⁾に端を発し、モデル化されていない不確かさなどに対するロバスト性も期待されている⁽¹¹⁾⁻⁽¹⁴⁾。なお、3次元モデルの倒立振子型移動体に対してIDA-PBCを適用した研究があるが、振子を倒立状態へ安定化させることのみを目的とした制御系を導出しており、加速・走行を考慮したものではない⁽¹⁶⁾。IDA-PBC導出時、本制御対象のような劣駆動システムに対しては非線形偏微分方程式 (PDEs: Partial Differential Equations) を解く必要があり⁽⁷⁾⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾、一般的には困難な作業とされる。著者らは従来研究において、倒立振子型移動体のレギュレータ問題に対してPDEsが解けることを示して制御系を導出し、有効性を示してきた⁽¹⁵⁾。しかし加速・走行制御では車輪の回転角度や角速度を必ずしも一定値に収束させるわけではないため、これまでレギュレータとして理論構築されてきたIDA-PBCを直接的に応用することは困難である。そこで本研究では、移動体の振子部分のダイナミクスのみに着目すれば、これを全駆動PHシステムとして記述可能であることを示し、PDEsを解くことなくIDA-PBC制御系を導出する。その際、線形近似モデルやフィードバック線形化は用いない。従って広範囲な振子角度に対する安定性保証やモデル化誤差に対する脆弱性の回避が期待できる。また制御系は移動体の振子部分のみに対するものであるが、前述のシステムの不安定性を利用して間接的に並進方向加速度を制御する。導出した制御系では閉ループシステムに与える所望のエネルギー関数の設計が重要となり、この自由度を利用することで様々な特性を有する制御系を構築可能である。特に本研究では、安全性の観点から、設計者が予め指定した角度範囲内に振子の運動を制限することを理論的に保証しながら、目標の振子角度へと移動体を収束させる設計法を示す。さらに目標角度を超えて振子が転倒に近づく場合には、それに伴い値が大きくなる振子角度依存ゲインにより目標状態へと積極的に復帰させる制御特性を実現する。提案する制御系の有効性はシミュレーションにより検証する。

2. 機械システムに対する IDA-PBC

ここでは機械システムに対するIDA-PBCの定式化について述べる⁽⁷⁾。機械システムは次のPHシステムとして表現できる⁽⁹⁾。ただし摩擦は考慮しない。

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{p})] \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H \\ \nabla_{\mathbf{p}} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + V(\mathbf{q}) \quad (4)$$

$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ は一般化座標, $\mathbf{p} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ は一般化運動量, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ は制御入力, $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は単位行列および $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ は入力行列である. $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\mathbf{J}^T(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ と $\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \geq 0$ はそれぞれ Interconnection 行列, Damping 行列である. $\mathbf{M}$ は慣性行列, V はポテンシャルエネルギー, H は開ループ系の全エネルギーを表す.

IDA-PBC は 2 種類の制御入力から構成される.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{es} + \mathbf{u}_{di} \quad (5)$$

$\mathbf{u}_{es}$ はシステムの全エネルギーを整形 (Energy Shaping) し, 所望の平衡点の安定性を保証する入力, $\mathbf{u}_{di}$ は漸近安定性を達成するための減衰 (Damping Injection) に相当する入力である.

ここで IDA-PBC により達成される, 所望の慣性行列 $\mathbf{M}_d$ およびポテンシャルエネルギー V_d をもつ閉ループ PH システムは次の形で表すことができる.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{q}, \mathbf{p})] \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H_d \\ \nabla_{\mathbf{p}} H_d \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{J}_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\mathbf{J}_d^T(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}_d \\ -\mathbf{M}_d\mathbf{M}^{-1} & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{R}_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{R}_d^T(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}\mathbf{K}_d\mathbf{G}^T \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + V_d(\mathbf{q}) \quad (9)$$

$\mathbf{J}_d$, $\mathbf{R}_d$ はそれぞれ閉ループ系に与える所望の Interconnection および Damping 行列である. $\mathbf{J}_2$ は歪対称行列であり制御系設計時のフリーパラメータとなる. H_d は閉ループ系の全エネルギーを表す. $\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_d^T > 0$ は制御入力式 (5) の第 2 項を次に示すように閉ループ系の受動出力 $\mathbf{y}_c = \mathbf{G}^T \nabla_{\mathbf{p}} H_d$ の負のフィードバックとしたときの定数ゲインである.

$$\mathbf{u}_{di} = -\mathbf{K}_d \mathbf{y}_c \quad (10)$$

$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}^*, \mathbf{0})$ を所望の平衡点とし, この近傍で $\mathbf{M}_d(\mathbf{q}^*) > 0$ であり, かつ

$$\mathbf{q}^* = \arg \min V_d(\mathbf{q}) \quad (11)$$

を満たすとする. H_d の時間微分を計算すると, $\mathbf{J}_d$ の歪対称性および $\mathbf{K}_d$ の正定性から次の不等式を満たす.

$$\dot{H}_d = \mathbf{y}_c^T \mathbf{u}_{di} \leq -\lambda_{\min} \{ \mathbf{K}_d \} \left| (\nabla_{\mathbf{p}} H_d)^T \mathbf{G} \right|^2 \leq 0 \quad (12)$$

Fig. 1 A diagram of a mobile inverted pendulum

Table 1 Parameters of the mobile inverted pendulum

Parameter	Unit	Value
M	kg	2.3
m_w	kg	0.63
m_h	kg	1.0
J	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	1.9×10^{-2}
J_w	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	1.8×10^{-3}
J_m	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	2.1×10^{-6}
l	m	0.061
l_h	m	0.50
r	m	0.075
n_r	-	50
f_r	$\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$	0

$\lambda_{\min}\{\mathbf{K}_d\}$ は $\mathbf{K}_d$ の最小の固有値を表す. 従って閉ループ PH システム式 (6) は H_d をリアプノフ関数として平衡点近傍で安定となる. ただし $\dot{H}_d$ は準不定関数であるため, 必ずしも最終的にシステムの状態が所望の平衡点へ収束するとは限らない. 漸近安定性が保証されるのは, 式 (12) の等号が恒等的に満たされ $\dot{H}_d \equiv \mathbf{y}_c^T \mathbf{u}_{di} \equiv 0$ となるとき, 閉ループ PH システムの状態が所望の平衡点へ収束することがいえる場合のみである. つまり零状態可検出性の条件 $\mathbf{y}_c \equiv 0$, $\mathbf{u}_{di} \equiv 0 \Rightarrow (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{q}^*, \mathbf{0})$ が満たされるとき, この平衡点の漸近安定性が保証される.

推定引き込み領域は次式を定めるとき Ω_w で与えられる⁽⁷⁾.

$$\Omega_w = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) < W\} \quad (13)$$

$$\bar{W} \triangleq \sup\{W > H_d(\mathbf{q}^*, \mathbf{0}) \mid \Omega_w \text{ is bounded}\} \quad (14)$$

ここで Energy Shaping のための入力 $\mathbf{u}_{es}$ を考える. 式 (5), (10) を開ループ PH システム式 (1) へ代入し, 閉ループ PH システム式 (6) と等式で結ぶと, 次式が得られる.

$$\mathbf{G}\mathbf{u}_{es} = \nabla_{\mathbf{q}} H - \mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} H_d + \mathbf{J}_2 \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{p} \quad (15)$$

制御対象が劣駆動システムの場合 $\text{rank}(\mathbf{G}) = m < n$ となり, $\mathbf{G}$ の逆行列を計算できない. このとき $\mathbf{u}_{es}$ の導出には PDEs を解かなければならず, これは一般的に困難とされる. 一方, $\mathbf{G}$ が可逆, つまりシステムが全駆動のとき, $\mathbf{u}_{es}$ は任意の H_d , $\mathbf{J}_2$ に対して一意に求まる⁽⁷⁾.

本研究では倒立振り子型移動体の振り部分のダイナミクスに着目すれば, これを全駆動 PH システムとして扱うことができることを示し, PDEs を解くことなく IDA-PBC 制御系を導出する.

3. 加速制御系設計のための PH システム導出

3・1 運動方程式

倒立振り子型移動体の模式図を図 1 に示す. 表 1 にシステムのパラメータを示す. 数値は著者らが従来研究で用いた実機に基づく⁽¹⁵⁾. M , m_w および m_h はそれぞれ車体, 車輪および調整可能な追加錘の質量を表す. J , J_w および J_m はそれぞれ車体, 車輪およびモータの質量中心まわりの慣性モーメントとする. l , l_h はそれぞれ車輪の中心軸から車体の質量中心および追加錘までの長さ, r は車輪の半径を表す. n_r は減速比, f_r はモータと車輪間の摩擦係数, τ はモータが発生する制御入力トルクを表す. 本研究では摩擦や滑りは考慮しない. システムの状態変数として q_1 は鉛直上向きを基準とした振子の角度, q_2 は振子を基準とした相対的な車輪の回転角度とする.

x は並進方向への移動距離である. $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$ を一般化座標ベクトル, g を重力加速度とする. 運動方程式は松本らの研究⁽¹⁾に基づき次式で得られる.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_s + \mathbf{G}_s = \mathbf{G}u \quad (16)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2a \cos q_1 + b & a \cos q_1 + c \\ a \cos q_1 + c & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} -a \sin q_1 \cdot \dot{q}_1^2 \\ -a \sin q_1 \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{f_r}{d} \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{G}_s = \begin{bmatrix} -e \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{G} = [0 \quad 1]^T \quad (20)$$

$$d = (M + m_h + m_w)r^2 + J_w + n_r^2 J_m \quad (21)$$

$$a = \frac{1}{d}(Ml + m_h l_h)r \quad (22)$$

$$b = \frac{1}{d}\{(M + m_h + m_w)r^2 + Ml^2 + m_h l_h^2 + J + J_w\} \quad (23)$$

$$c = \frac{1}{d}\{(M + m_h + m_w)r^2 + J_w\} \quad (24)$$

$$e = \frac{g}{d}(Ml + m_h l_h) \quad (25)$$

$$u = \frac{\tau}{d} \quad (26)$$

システムのポテンシャルエネルギーは次式である.

$$V(q_1) = e \cos q_1 \quad (27)$$

3・2 倒れ込み動作と並進方向加速度の関係

振り角度が $q_1 = q_{1r}$ へ収束している状態を考える. このとき $\dot{q}_1 = 0$ であり, $\ddot{q}_2 = \ddot{q}_{2sa}$ および $u = u_{sa}$ とおいて運動方程式 (16) に代入すると次式が成立する. ただし表 1 より $f_r = 0$ である.

$$\begin{cases} (a \cos q_{1r} + c)\ddot{q}_{2sa} - e \sin q_{1r} = 0 \\ \ddot{q}_{2sa} = u_{sa} \end{cases} \quad (28)$$

Fig. 2 The relation between the pendulum angle and translational acceleration

振子が目標振り子角度 q_{1r} に追従しているとき、車輪の回転角加速度は一定値 $\ddot{q}_{2sa}$ となる。図 2 に式 (28) から算出した定常状態における振り子角度 q_1 と並進方向加速度 $\ddot{x} = r\ddot{q}_{2sa}$ m/s^2 の関係を示す。これを利用することで、振り子角度の制御を通して間接的に並進方向加速度を制御可能となる。

3・3 振り子角度に着目した PH システム導出

IDA-PBC 制御系設計のためには、システムを PH システムとして記述しなければならない。PH システムは Euler-Lagrange の運動方程式を包含する物理システムのより一般的な表現形式であり⁹⁾、式 (16) は PH システムとして記述可能であるが、車輪角度を状態変数として含む。しかしこのモデルを用いる場合、加速制御では車輪角度を一定値へ収束させるわけではないため、これまでレギュレータとして理論構築されている IDA-PBC を直接的に適用することは困難である。本研究では 3・2 節で述べた関係を利用し、振り子角度の目標値へのレギュレータ制御を通して、移動体の加速制御を行う。そこで運動方程式 (16) から $\ddot{q}_2$ を消去すると、 q_1 のみ関する次のダイナミクスが得られる。

$$\left\{ (2a \cos q_1 + b) - (a \cos q_1 + c)^2 \right\} \ddot{q}_1 + a \left\{ (a \cos q_1 + c) - 1 \right\} \sin q_1 \cdot \dot{q}_1^2 - e \sin q_1 = -(a \cos q_1 + c)u \quad (29)$$

これを PH システムとして記述できれば、IDA-PBC が適用可能となる。そこで $\ddot{q}_1$ の係数を $M_p(q_1) = (2a \cos q_1 + b) - (a \cos q_1 + c)^2$ および左辺第 3 項を積分したもの(積分定数は 0 とする)を $V_p(q_1) = e \cos q_1$ とする。

$$L = \frac{1}{2} M_p(q_1) \dot{q}_1^2 - V_p(q_1) \quad (30)$$

とおき、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} \quad (31)$$

を計算すると、式 (29) の左辺と一致したことが確認できる。ゆえにシステム式 (29) は M_p を慣性、 V_p をポテンシャルエネルギーとした運動方程式とみなすことができる。

運動方程式は PH システムとして表現可能であることから、振り子角度のダイナミクスに関して次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H_p \\ \nabla_{p_1} H_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_p(q_1) \end{bmatrix} u \quad (32)$$

$$H_p = \frac{1}{2} M_p^{-1}(q_1) p_1^2 + V_p(q_1) \quad (33)$$

ここで $p_1 = M_p \dot{q}_1$ 、 $G_p = -(a \cos q_1 + c)$ である。

4. IDA-PBC 加速制御系設計

4・1 IDA-PBC 制御系の定式化と安定性保証条件

振り角度に関する開ループ PH システム式 (32) は全駆動システムであることから, 2 章より任意の H_d , $\mathbf{J}_2$ を与えて制御入力を得ることができる.

閉ループ系に与える所望の慣性を M_{pd} , ポテンシャルエネルギーを V_{pd} とすると, 閉ループ PH システムは式 (6)~(10) に基づき次式となる. ただしシステムの自由度が 1 であることから, 歪対称行列である $\mathbf{J}_2$ は 0 である.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_p^{-1} M_{pd} \\ -M_{pd} M_p^{-1} & -K_d G_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{q_1} H_{pd} \\ \nabla_{p_1} H_{pd} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$H_{pd} = \frac{1}{2} M_{pd}^{-1} p_1^2 + V_{pd} \quad (35)$$

$$y_{pc} = G_p \nabla_{p_1} H_{pd} = G_p M_{pd}^{-1} p_1 \quad (36)$$

H_{pd} は全エネルギー, y_{pc} は受動出力を表す. 本研究では振り角度を物理的に合理的な $q_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ の範囲内で考える. また表 1 のパラメータを用いるとき常に $M_p(q_1) > 0$, $G_p \neq 0$ である. 従って IDA-PBC 加速制御系は次式となる.

$$u = u_{es} + u_{di} \quad (37)$$

$$u_{es} = G_p^{-1} (\nabla_{q_1} H - M_{pd} M_p^{-1} \nabla_{q_1} H_{pd}) \quad (38)$$

$$u_{di} = -K_d y_{pc} = -K_d G_p M_{pd}^{-1} p_1 \quad (39)$$

2 章より, 制御入力式 (37) が少なくとも目標振り角度 $(q_1, p_1) = (q_{1r}, 0)$ 近傍において安定性を保証するための条件は次式である.

$$M_{pd}(q_{1r}) > 0 \quad (40)$$

$$q_{1r} = \arg \min V_{pd}(q_1) \quad (41)$$

条件式 (41) は次式と等価である.

$$\frac{dV_{pd}}{dq_1}(q_{1r}) = 0 \quad (42)$$

$$\frac{d^2 V_{pd}}{dq_1^2}(q_{1r}) > 0 \quad (43)$$

導出した制御系では, 条件式 (40), (42) および (43) を満たす範囲内で M_{pd} と V_{pd} を与えることで, 様々な特性を有する自由度の高い制御系設計が可能となる. 本研究では設計指針として, 設計者が予め指定した角度範囲内に振子の運動を制限することを理論的に保証する. さらに目標角度を超えて振子が転倒に近づく場合には, そ

れに伴い値が大きくなる振子角度依存ゲインにより目標状態へと積極的に復帰させる制御特性を実現する。これは所望の移動を達成しながらも転倒の回避が必須である倒立振子型移動体の制御において、安全性の観点から好ましい特性である。まず4・2節で代表的なエネルギー関数設計法を述べ、制御特性および設計指針との整合性を考察する。これを受けて4・3節では、前述の設計指針を満たすエネルギー関数設計法を示す。

4・2 所望のエネルギー関数設計例と安定性保証範囲

運動エネルギー整形を行わない、つまり $M_{pd} = M_p > 0$ とし、ポテンシャルエネルギーのみを整形する場合を考える。 $K_p > 0$ を用い、 V_{pd} を単純な2次形式

$$V_{pd}(q_l) = \frac{K_p}{2} (q_l - q_{lr})^2 \quad (44)$$

とおくと、制御入力式 (37) はPD制御型⁽¹⁷⁾となる。また V_{pd} を次式

$$V_{pd}(q_l) = V_p(q_l) + \frac{K_p}{2} \{q_l - \delta(q_{lr})\}^2 \quad (45)$$

$$\delta(q_{lr}) = q_{lr} + \frac{1}{K_p} \frac{\partial V}{\partial q_l}(q_{lr}) \quad (46)$$

とすると、制御入力式 (37) はPD+重力補償項型⁽¹⁰⁾⁽¹⁷⁾となり、PD制御型と比べてパラメータの不確かさに対してロバスト性が高まるといわれている⁽¹⁷⁾。

これらの V_{pd} はいずれも条件式 (42) を満たし、条件式 (43) は計算によりそれぞれ $K_p > 0$ 、 $K_p > e$ と設計する限り常に成立する。また V_{pd} は $q_l = q_{lr} \in (-\pi/2, \pi/2)$ において唯一の極小値をとる。さらに $y_{pc} \equiv 0$ 、 $u_{di} \equiv 0 \Rightarrow G_p \nabla_{p_l} H_{pd} \equiv 0 \Rightarrow \dot{p}_l \equiv 0$ で、式 (34) より $\nabla_{q_l} H_{pd} \equiv 0 \Rightarrow \nabla_{q_l} V_{pd} \equiv 0 \Rightarrow q_l = q_{lr}$ となることから零状態可検出性が満たされ、所望の平衡点は H_{pd} をリアプノフ関数として漸近安定となる。つまり式 (12) より閉ループ系の全エネルギー H_{pd} は時間経過とともに増加することなく減少を続け、最終的に $\dot{H}_{pd} \equiv 0$ となりエネルギーの変化が恒等的に停止するとき、 H_{pd} は必ず最小値 (V_{pd} の最小値と一致) となることがいえる。このときの閉ループ系の状態は所望の平衡点と一致する。なお、零状態可検出性が満たされないエネルギー関数設計を行った場合、最終的に H_{pd} が最小値に収束することは保証されない。以上より、初期状態を $(q_l, p_l) = (q_{l0}, 0)$ 、 $q_{l0} \in (-\pi/2, \pi/2)$ とする限り、移動体は転倒することなく ($q_{l0} \geq |\pi/2|$ となることなく) 目標角度へと収束する。

しかしながらこれらの V_{pd} は $q_l \in (-\pi/2, \pi/2)$ において半径方向に非有界な関数ではない。 $q_{lr} \in [0, \pi/2)$ を設計者が指定する振子の角度制限値、 q_{lr} を一定値、および初期状態を (q_{l0}, p_{l0}) 、 $p_{l0} \in [-q_{lr}, q_{lr}]$ とする。仮に

$$H_{pd}(q_{l0}, p_{l0}, q_{lr}) > H_{pd}(q_{lr}, 0, q_{lr}) \quad (47)$$

となる初期状態を与えた場合、もしくは外乱などにより角速度が増加して上式を満たす状況になった場合には、振子が目標角度へ収束する途中で $q_l > q_{lr}$ となる可能性がある。従って状況によって変化する様々な初期角速度、目標角度や角度制限値に対して逐一条件式 (47) を考察しない限り、振子が予期しないところまで大きく傾くことがある。

また式 (38) より、IDA-PBC 制御入力はエネルギー関数の勾配の形で与えられる。式 (44) および (45) のいずれの V_{pd} を用いた場合でも、 dV_{pd}/dq_l を計算すると $q_l - q_{lr}$ にゲインが掛かった比例制御と類似した制御入力項となる。このゲインは K_p であり、振子角度に依存せず一定値であることから設計指針を満たさない。

Fig. 3 The gain property of $K_{pv}(q_1)$ ($q_{lr}=0.30$, $q_{ll}=0.60$ and $K_p=1$)

Fig. 4 A block diagram of the IDA-PBC acceleration controller

4・3 振子の運動を指定範囲内に限定する所望のエネルギー関数設計

ここでは4・1節で述べた設計指針を満たすエネルギー関数を設計し、詳細を考察する． V_{pd} を次式で定める．

$$V_{pd}(q_1) = \frac{1}{q_{ll}^2 - q_l^2} \cdot \frac{K_p}{2} (q_1 - q_{lr})^2 \quad (48)$$

q_1 による1階および2階導関数は次式となる．

$$\frac{dV_{pd}}{dq_1}(q_1) = K_{pv}(q_1)(q_1 - q_{lr}) \quad (49)$$

$$K_{pv}(q_1) = \frac{(q_{ll}^2 - q_l q_{lr})}{(q_{ll}^2 - q_l^2)^2} \cdot K_p \quad (50)$$

$$\frac{d^2 V_{pd}}{dq_1^2}(q_1) = \frac{K_p (q_1 + q_{lr})^2}{2q_{ll} (q_{ll} + q_l)^3} + \frac{K_p (q_1 - q_{lr})^2}{2q_{ll} (q_{ll} - q_l)^3} \quad (51)$$

$q_l, q_{lr} < q_{ll}$ として考えれば、式(49)は $q_1 = q_{lr}$ のときに限って0であることから条件式(42)が成立する．式(51)は常に正であり条件式(43)も成立する．従って V_{pd} は $q_1 = q_{lr}$ で唯一の極小値をとり、式(48)の分母に $q_{ll}^2 - q_l^2$ を含むことから $q_l \in (-q_{ll}, q_{ll})$ において半径方向に非有界な関数である．閉ループ系に与える所望の慣性 M_{pd} も設計自由度であるが、本研究では $M_{pd} = M_p > 0$ とする． M_{pd} が制御性能や安定性に与える影響は今後の検討事項とする．漸近安定性は4・2節と同様の考え方により保証される．ゆえに $q_{l0} \in (-q_{ll}, q_{ll})$ を満たす任意の初期状態 (q_{l0}, p_{l0}) に対して、振子の運動は $q_l \in (-q_{ll}, q_{ll})$ に制限された上で目標角度へ収束し、同時に移動体の並進方向加速度は式(28)より一定値 $\ddot{x} = r\ddot{q}_{2sa}$ m/s²へと収束する．

次に上記 V_{pd} が制御入力に与える影響を考察する． V_{pd} は式(49)の形で制御入力へ寄与し、 $q_1 - q_{lr}$ に振子角度依存ゲイン $K_{pv}(q_1)$ が掛かった比例制御と類似した役割を担う．これは $q_1 - q_{lr}$ に対するゲインが定数 K_p であった4・2節とは異なる重要な点である．また K_{pv} は $q_l, q_{lr} < q_{ll}$ より常に正値である．ここで $q_{lr} = 0.30$ rad,

Fig. 5 Tracking for a constant reference pendulum angle from $q_{l0} = \dot{q}_{l0} = 0$

Fig. 6 Tracking for a constant reference pendulum angle from the edge of the domain of attraction

$q_{ll} = 0.60 \text{ rad}$ および $K_p = 1$ とし、 K_{pv} のゲイン特性を図 3 に示す。縦の破線は目標振り角度 $q_l = q_{lr} = 0.30 \text{ rad}$ を表し、この付近の特性に着目して考える。振子が倒立状態へ近づく方向である $q_l < 0.30$ では、 K_{pv} は小さくなる傾向がある。一方、振子が転倒に向かう方向である $q_l > 0.30$ においては、 K_{pv} は大きくなる傾向がある。従って、目標角度を超えて振子が転倒に近づくにつれて値が大きくなるゲイン特性が実現されている。なお、4・2 節で示した V_{pd} を用いる場合、ゲイン K_p は振り角度に依らず一定値であることから、図 3 において水平線となる。

以上より、IDA-PBC の設計自由度を活かして本節で提案するような V_{pd} を設計することで、設計指針を満たす制御系設計が可能であることが示された。本研究の制御系のブロック線図を図 4 に示す。

5. シミュレーション

制御系パラメータは、制御系の構造から K_p を比例ゲイン、 K_d を微分ゲインのように扱えることを考慮して試行錯誤的に決定し、 $K_p = 2e$ 、 $K_d = 35$ とした。 q_{ll} は安定性を保証したい振り角度範囲、およびゲインに急峻な特性を持たせたい角度を考慮して $q_{ll} = 0.60 \text{ rad}$ とした。なお理論的には $q_{ll} = \pi/2$ として振子が水平上半面内にある限り目標振り角度への収束を保証することも可能である。

図 5 に静止倒立状態のシステムに対して一定目標角度 $q_{lr} = 0.30 \text{ rad}$ を与えたときのシミュレーション結果を示す。図 5 (a) より、約 0.5 s で目標値へ収束して定常状態となり、図 5 (b)、(c) より並進方向に移動体が加速し

Fig. 7 Tracking for a varying reference pendulum angle

ていることがわかる. 図 5 (d) に閉ループ PH システムの全エネルギー H_d の時刻歴を示す. H_d は常に正値かつ単調非増加であり, 最終的に最小値 0 へ収束し, 理論通りにリアプノフ関数となっていることがわかる.

図 6 に示すシミュレーションでは, システムの状態が引き込み領域の端点に近い場合の制御性能を検証した. 初期振り子角度として $q_{i0} = 0.59 \text{ rad}$ を与えた. さらに条件を厳しくするため, 初期振り子角速度として振り子が倒れ込む方向に $\dot{q}_{i0} = 2.0 \text{ rad/s}$ を与えた. 目標振り子角度は前シミュレーションと同様に $q_{lr} = 0.30 \text{ rad}$ とした. 図 6 (a) より, 理論通りに振り子角度は最終的に目標値へ収束している. 一方, 制御初期段階でオーバーシュートしており, 図 6 (b) より入力トルクが過大になっている. 従って q_{li} で与える引き込み領域の大きさにはある程度余裕を持たせる必要がある.

図 7 に静止倒立状態のシステムに対してステップ状に変化する q_{lr} を与えたシミュレーション結果を示す. 時刻 $2 \text{ s} \sim 5 \text{ s}$ 間に $q_{lr} = 0.30 \text{ rad}$, 時刻 $7 \text{ s} \sim 10 \text{ s}$ 間に $q_{lr} = -0.30 \text{ rad}$ とし, その他の時間帯では $q_{lr} = 0 \text{ rad}$ とした. はじめ静止倒立状態から倒れ込み動作を行い加速している. その後定常速度の走行を約 2 s 間続けた後, 後傾姿勢を取り減速している. 振り子角度 q_l は各時間帯における目標値 q_{lr} に対して追従している. 以上より, 適切な q_{lr} を与えて加減速を行うことで走行動作を達成できることがわかる. ただしステップ状の目標値が変化すると同時に, 図 7 (d) に示す入力トルクも急激に変化することがわかる. 実機適用時には滑らかに変化する目標振り子角度を与えることが望ましい.

6. 結 言

倒立振り子型移動体に対して IDA-PBC による非線形加速制御系設計を行った. IDA-PBC 制御系導出時, 移動体の振り子部分のダイナミクスのみに着目すればこれを全駆動 PH システムとして記述可能であることを示し, 従来研究の線形近似モデルやフィードバック線形化を用いずに IDA-PBC 制御系を導出した. これにより広範囲な振り子角度に対する安定性保証やモデル化誤差に対する脆弱性の回避が可能となり, 実機適用時や外乱の存在下において安全性の向上が期待できる. 制御系は移動体の振り子部分のみに着目したものであるが, システムの不安定性に起因する倒れ込み動作と並進方向加速度の関係を利用し, 間接的に移動体の並進方向加速度を制御できる. 導出した制御系は, 閉ループシステムに与える所望のエネルギー関数の設計自由度を活かして様々な特性を与えることが可能で, 拡張性の高さも特長の 1 つである. 特に本研究では安全性の観点から, 設計者が予め指定した角

度範囲内に振子の運動を制限することの理論的な保証, および目標角度を超えて振子が転倒に近づく場合には, それに伴い値が大きくなる振子角度依存ゲインにより目標状態へと積極的に復帰させる制御特性の実現を目指した. これに対する具体的なエネルギー関数設計法を示すとともに, 提案した制御系の有効性をシミュレーションにより検証し, 良好な制御性能および理論通りの安定性を保証していることを示した.

謝 辞

本研究の一部は文部科学省グローバル COE プログラム「環境共生・安全システムデザインの先導拠点」によるものであることを記し, 謝意を表す.

文 献

- (1) 松本治, 梶田秀司, 谷和男, “移動ロボットの内外界センサのみによる姿勢検出とその制御”, 日本ロボット学会誌, Vol. 8, No. 5 (1990), pp. 541-550.
- (2) Ha, Y., and Yuta, S., "Trajectory Tracking Control for navigation of the Inverse Pendulum Type Self-Contained Mobile Robot", *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 17, (1996), pp. 65-80.
- (3) Grasser, F., D'Arrigo, A., Colombi, S., and Rufer, A. C., "JOE: A Mobile, Inverted Pendulum", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 49, No. 1 (2002), pp. 107-114.
- (4) Huang, J., Wang, H., Matsuno, T., Fukuda, T., and Sekiyama, K., "Robust Velocity Sliding Mode Control of Mobile Wheeled Inverted Pendulum Systems", *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (2009), pp. 2983-2988.
- (5) Pathak, K., Franch, J., and Agrawal, S. K., "Velocity and Position Control of a Wheeled Inverted Pendulum by Partial Feedback Linearization", *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 21, No. 3 (2005), pp. 505-513.
- (6) 畠山直也, 島田明, “Zero Dynamics を利用した倒立振り型二輪ロボットの高速移動制御”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 44, No. 3 (2008), pp. 252-259.
- (7) Ortega, R., Spong, M. W., Gómez-Estern, F., and Blankenstein, G., “Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems via Interconnection and Damping Assignment”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 8 (2002), pp. 1218-1233.
- (8) Ortega, R., van der Schaft, A. J., Maschke, B., and Escobar, G., “Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control of Port-Controlled Hamiltonian Systems”, *Automatica*, Vol. 38, (2002), pp. 585-596.
- (9) van der Schaft, A. J., *L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, 2nd edition (1999), Springer.
- (10) Takegaki, M., and Arimoto, S., “A New Feedback Method for Dynamic Control of Manipulators”, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 102, (1981), pp. 119-125.
- (11) 坂本登, 藤本健治, 石川将人, “非線形制御—消す非線形から生かす非線形へ”, 計測自動制御学会論文集, Vol. 33, No. 1 (1997), pp.1-6.
- (12) Osuka, K., and Matsuno, F., “On Robustness of Passivity of Manipulators”, *IEEE Conference on Decision and Control*, (1999), pp. 3406-3409.
- (13) 藤本健治, “ハミルトニアンシステムの制御”, 計測と制御, Vol. 39, No. 2 (2000), pp. 1-6.
- (14) Ortega, R., van der Schaft, A. J., Mareels, I., and Maschke, B., “Putting Energy Back in Control”, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 21, No. 2 (2001), pp. 18-33.
- (15) 横山和人, 高橋正樹, “IDA-PBC による倒立振り型移動体の安定化制御と実機検証”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 77, No. 777 (2011), pp. 1850-1865.
- (16) Muralidharan, V., Ravichandran, M. T., and Mahindrakar, A. D., “Extending Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control (IDA-PBC) to Underactuated Mechanical Systems with Nonholonomic Pfaffian Constraints: the Mobile Inverted Pendulum Robot”, *IEEE Conference on Decision and Control and Chinese Control Conference*, (2009), pp. 6305-6310.
- (17) Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P. J., and Sira-Ramírez, H., *Passivity-Based Control of Euler-Lagrange Systems*, 1st edition (1998), Springer.