制振材層を有する箱型構造を非線形ばねで支持した系の衝撃応答解析* (部材間の減衰連成が非線形応答へ与える影響)

山口 誉夫^{*1}, 太田 卓^{*2}, 永井 健一^{*3}, 丸山 真一^{*1}

Analysis of Impact Responses for Box Structures Having Damping Layers Supported by Nonlinear Springs (Influences of Damping Couplings among Parts on Nonlinear Responses)

Takao YAMAGUCHI^{*1}, Suguru OTA, Ken-ichi NAGAI and Shinichi MARUYAMA

^{*1} Gunma Univ. Dept. of Mechanical System Engineering
Tenjincho 1-5-1, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

This paper describes vibration analysis using finite element method for box structures consisting of elastic flat plates and damping layers on their bottom plates. The box structures are supported by nonlinear concentrated springs on the bottom plate. The restoring force of the springs have cubic nonlinearity and linear hysteresis damping. Finite element for the nonlinear springs are expressed and are connected to the elastic plates modeled by linear solid finite elements in consideration of complex modulus of elasticity. Further, the discretized equations in physical coordinate are transformed into the nonlinear ordinary coupled equations using normal coordinate corresponding to linear natural modes. Using material damping and shares of strain energy for the parts (i.e. the plates, the damping layer and the springs), we evaluate damping couplings among the parts. Further, we clarify influences of the damping couplings on nonlinear impact responses.

Key Words : Damping, Computer Aided Analysis, Nonlinear Vibration, Finite Element Method, Vibration of Continuous System

1. 緒 言

機械構造において、制振効果を得るために弾性パネルに制振材を積層することがある。また、機械構造物を集中ばねで支持し振動絶縁することが行われている。このような防振要素には荷重と変位との関係に非線形性を有するものがある。そのため、弾性パネルと制振パネルからなる構造に非線形ばねを接続した系の振動特性の解明が必要となるが十分な検討がなされていない。

ヒステリシス減衰を持たない非線形ばねを含む系の振動特性の研究は、従来からなされてきている。例えば、Feeny らは、非線形ばねと集中質量からなる系について Proper Orthogonal Modes (POM) を同定する研究を行っている⁽¹⁾。非線形ばねで支持されたビームの振動特性を解析した報告も見られる。近藤らは非線形支持されたビームが連結された構造の強制振動について、高速な安定判別法を提案している⁽²⁾。Shaw らは両端を単純支持したビームの中央を非線形集中ばねで支持された系について Nonlinear Modal Analysis を行っている⁽³⁾。著者らはブロック状の構造物を、線形有限要素を用いて弾性体でモデル化し、それをヒステリシス減衰がない非線形ばねで支持した系の連成振動の解析を行った⁽⁴⁾。また、著者らはヒステリシス減衰を復元力に与えた 1 個の非線形ばね

* 原稿受付 2011 年 12 月 27 日

^{*1} 正員, 群馬大学工学部機械システム工学科 (〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1)

^{*2} 群馬大学大学院工学研究科 (〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1)

^{*3} 正員, フェロー, 群馬大学工学部機械システム工学科

E-mail: yamagume3@gunma-u.ac.jp

が接続された粘弾性ブロックの連成振動の解析を行った⁽⁶⁾。しかし、制振材を積層した弾性板からなる構造物を非線形ばねで支持し、非線形振動特性を検討した例は見られない。

制振材を積層した構造では、材料減衰のみならず制振材層のひずみエネルギー分担率(制振材層のひずみエネルギー/構造全体のひずみエネルギー)も大きくないと、大きなモード減衰は得られない^{(11), (8), (12)~(15)}。モードごとに制振材層のひずみエネルギー分担率が変わるので、一般的にはモードごとに得られる減衰値が異なる。また、複数の部材で構成される構造では、制振材を積層する部材のひずみエネルギー分担率(部材のひずみエネルギー/構造全体のひずみエネルギー)が小さくなく、効果的な減衰は得られない。制振材による減衰設計を行うためには、部材間の連成問題を考える必要がある。Johnson らは FEM でモデル化された構造の要素のひずみエネルギーと要素の材料減衰から、モード減衰を計算する方法(モード歪みエネルギー法)を提案した^{(11), (8)}。著者らは、その方法を複数の種類の減衰材がある場合へ拡張して、自動車用構造の制振解析を行い、その有効性を明らかにしてきた^{(12)~(15)}。これらはいずれも線形問題を取り扱っている。このような制振構造に非線形ばねが接続された系の振動特性は扱われていない。

本論では、平板で構成される箱型構造の下面に制振材を積層した。この箱型構造の下面を非線形集中ばねで支持した系を取り扱う。これより部材間(パネル、制振材、集中ばね)の減衰の連成が非線形振動へ与える影響を調べる。

2. 計算モデル

計算モデルを図 1 に示す。箱型に板厚 10mm のアルミ製平板からなる弾性パネルを 6 枚(上面 1 枚, 下面 1 枚, 側面 4 枚)配置した。箱構造中の下面パネルを変えた 3 種類の計算モデルを用いる。下面パネルを他面のパネルと同じ板厚 10mm の弾性パネルとしたモデルを弾性板モデル(モデル I)とする。下面パネルを制振パネル(弾性板モデルと同じ板厚 10mm の平板の上に板厚 40mm の二層型制振材を積層)としたモデルを弾性板+制振材モデル(モデル II)とする。弾性板+制振材モデル(モデル II)において下面の平板の板厚を 2 倍の 20mm としたモデルを高剛性弾性板+制振材モデル(モデル III)とする。モデル II とモデル III は下面パネルのみに制振材が積層されている。下面パネルの制振材層は箱型構造の内側に積層されている。外形寸法は 1000mm×920mm×860mm とする。弾性パネル・制振パネルは微小変形を仮定し、三次元有限要素法を用いる、非適合モードを考慮した 8 節点 isoparametric solid 要素でモデル化した。全体直交座標系 XYZ の原点座標を箱型構造の下面の中心とする。全てのパネル間の境界条件は、接合部においてアルミ板層の X 方向 Y 方向 Z 方向の変位が、それぞれ連続となっている。制振材層は他のパネルには接続されていない、その端部はフリーになっている。

制振材の板厚や材料減衰を増大させる方法は、基本的には減衰が増える方向であるので、比較的容易に減衰の定性的な変化が推定できる。しかし、下面のアルミ板層の板厚を変化させた条件の減衰特性には、アルミ層と制振材層のひずみエネルギー分担率、部材間のひずみエネルギー分担率が影響し、減衰の連成問題になる。本報告では、この点に着目した検討となっている。なお、下面パネルのみパラメータ変更(板厚変更、制振材の付加)を行った理由は、他の面も変更してしまうと現象が複雑になりすぎて、目的とする分析が困難になる可能性を考えてのことである。したがって、非線形集中ばねが直接連結している下面パネルのみの変更とした。

集中ばねは(310, 290, 0), (310, -290, 0), (-310, 290, 0), (-310, -290, 0)の 4 点に、それぞれ X , Y , Z 軸方向の 3 個を配置した。上下方向(Z 方向)は 3 次の非線形集中ばねとした。その荷重 R_{mz} - 変位 U_{mz} 曲線を図 2 に示す。静荷重を作用させた条件では、集中ばねは図 2 のような漸硬性の復元力を持つ。後の動解析では、そのばね定数の線形成分を $\gamma_{1mz} = \bar{\gamma}_{1mz}(1 + j\eta_s)$ で表す複素ばねとする。ここで、 $\bar{\gamma}_{1mz}$ は γ_{1mz} の実部、 j は虚数単位、 η_s は集中ばねの材料損失係数である。これらと同じヒステリシス減衰を持つ線形の集中ばねを水平方向(X 方向および Y 方向)に配置した。なお、図 2 では、静的な復元力特性を表すために $\eta_s = 0.0$ の曲線とした。後の動解析では $\eta_s = 0.10$ とした。本報告の集中ばねは、コイルばねのような金属製というよりも、ゴムなどの粘弾性体のばねを想定している。粘弾性体の減衰はヒステリシス減衰として扱われることが多いので、それに準じた減衰モデルを与えた。上下方向の集中ばねのみを非線形性とした理由は、水平方向の集中ばねにも非線形性を与えてしまうと、非線形振動の現象が複雑になりすぎて分析が困難になる可能性を考えてのことである。水平方向の集中ばねにも非線形性を与える問題は今後の課題である。

非線形集中ばね（上下方向のばね）が接続されている下面を加振（上下方向）し、非線形応答の特徴が現れやすい条件とした。また、部材間の減衰の連成が非線形応答へ与える影響に着目している。その連成の影響が評価しやすい上面パネルを観測点とした。具体的には、加振点座標を下面パネル上のばね接合部の一つの位置の座標 $(-310, -290, 0)$ とした。応答点座標を上面パネル上の一点の座標 $(310, 290, 860)$ とした。

なお、本解析では重力および箱構造内部の空気の影響は考慮していない。

Fig. 1 Model for numerical analysis

Fig. 2 Restoring force of nonlinear concentrated springs

3. 基礎式

3・1 非線形集中ばねの離散化方程式

図1のように複数の非線形集中ばねが上下方向(Z 方向)に箱型構造に接続される場合を考える。この系の有限要素による離散化方程式を求める。

m 番目の非線形集中ばねの節点力を R_{mz} とする。 R_{mz} を次式のように変位 U_{mz} の3次のべき級数で表現する。

$$R_{mz} = \gamma_{1mz} U_{mz} + \gamma_{2mz} U_{mz}^2 + \gamma_{3mz} U_{mz}^3 \quad (1)$$

これらの集中ばねに次式のような線形ヒステリシス減衰を導入する。

$$\gamma_{1mz} = \bar{\gamma}_{1mz} (1 + j\eta_s) \quad (2)$$

先に示してあるが、 $\bar{\gamma}_{1mz}$ は γ_{1mz} の実部、 j は虚数単位、 η_s は集中ばねの材料損失係数である。行列で記述すると次式を得る。

$$\{R_m\} = [\bar{\gamma}_{1m}] \{U_s\} + \{\bar{d}_m\} \quad (3)$$

$$\{R_m\} = \{R_{mx}, R_{my}, R_{mz}\}^T, \quad \{U_s\} = \{U_{mx}, U_{my}, U_{mz}\}^T, \quad \{\bar{d}_m\} = \{0, 0, \gamma_{2mz} U_{mz}^2 + \gamma_{3mz} U_{mz}^3\}^T,$$

$$[\bar{\gamma}_{1m}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{1mz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

なお、 $R_{mx} = R_{my} = 0$ である。 $\{R_m\}$ は非線形集中ばねの復元力ベクトル、 $[\bar{\gamma}_{1m}]$ は線形項の係数 γ_{1mz} のみを含む線形複素剛性行列である。 $\{U_s\}$ は節点変位ベクトル、 $\{\bar{d}_m\}$ は非線形復元力ベクトルである。

3・2 弾性平板と粘弾性制振材を積層した弾性平板からなる箱型構造の離散化方程式

箱型構造中の弾性平板には、微小変形を仮定し、ソリッド要素でモデル化した。弾性平板の要素の歪みエネルギー、運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーを求める。さらにラグランジュの方程式から離散化された運動方程式を求める。制振材層についても微小変形を仮定し、ソリッド要素でモデル化し平板に積層した。すなわち本報告で用いた弾性平板と制振材層には材料非線形性および幾何学的非線形性は考慮されていない。

制振材の減衰特性は、複素弾性率 $E_d^* = E_d(1 + j\eta_d)$ を用いて考慮した。 E_d は貯蔵弾性率、 η_d は制振材の材料損失係数である。

弾性平板と制振材層の要素の離散化方程式を、箱型構造の全系に重ね合わせ、次式を得る。

$$[M_b]\{\ddot{U}_b\} + [K_b]\{U_b\} = \{F_b\} \quad (5)$$

$[M_b], [K_b], \{U_b\}, \{F_b\}$ は、制振材層を有する箱型構造の質量行列、複素剛性行列、節点変位ベクトル、節点力ベクトルである。

3・3 非線形集中ばねと線形集中ばねを接続した箱型構造の離散化方程式

式 (3) の節点力 $\{R_m\}$ を式 (5) 中の箱型構造と非線形集中ばね (Z 方向) の接合節点 α_m の節点力に加える。さらに水平方向 (X 方向と Y 方向) の線形集中ばねの節点力を加えると、全系離散化方程式を得る。

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} + \{\hat{d}\} = \{F\}, \quad \{\hat{d}\} = \sum_{m=1}^4 \{\hat{d}_m\} \quad (6)$$

ただし、 $\{\hat{d}_m\}$ は $\{\bar{d}_m\}$ を全系のサイズに変換したベクトルである。 $[M], [K], \{U\}, \{F\}$ は全系の質量行列、複素剛性行列、節点変位ベクトル、節点力ベクトルである。

3・4 モード減衰の近似計算

式 (6) で、微小振幅条件を考え、外力項、非線形復元力項を $\{0\}$ とする。 $\{U\} = \{\phi\}e^{j\omega t}$ (t : 時間) を仮定すると、次の複素固有値問題の式を得る。

$$\sum_{e=1}^{e_{\max}} \left([K_R]_e (1 + j\eta_e) - (\omega^{(i)})^2 (1 + j\eta_{tot}^{(i)}) [M]_e \right) \{\phi^{(i)}\} = \{0\} \quad (7)$$

$[K_R]_e$ は要素剛性行列の実部、 $[M]_e$ は要素質量行列、添え字 (i) は i 次振動モードである。 $(\omega^{(i)})^2$ は複素固有値の実部、 $\eta_{tot}^{(i)}$ はモード損失係数、 $\{\phi^{(i)}\}$ は複素固有モードである。

材料減衰 η_e ($e = 1, 2, 3, \dots, e_{\max}$) に関し全要素の中で最大のものを $\eta_{\max}$ とし以下の β_e を導入する。

$$\beta_e = \eta_e / \eta_{\max} \leq 1 \quad (8)$$

$\eta_{\max} \ll 1$ と仮定し、微小量 $\mu = j\eta_{\max}$ を導入し、式 (7) の解を漸近展開すると、次式を得る。

$$\{\phi^{(i)}\} = \{\phi^{(i)}\}_0 + \mu \{\phi^{(i)}\}_1 + \mu^2 \{\phi^{(i)}\}_2 + \dots \quad (9)$$

$$(\omega^{(i)})^2 = (\omega_0^{(i)})^2 + \mu^2 (\omega_2^{(i)})^2 + \mu^4 (\omega_4^{(i)})^2 + \dots \quad (10)$$

$$j\eta_{tot}^{(i)} = \mu\eta_1^{(i)} + \mu^3\eta_3^{(i)} + \mu^5\eta_5^{(i)} + \mu^7\eta_7^{(i)} + \dots \quad (11)$$

$\beta_e \leq 1$ であるので $\eta_{\max} \beta_e \ll 1$ が成立し、 $\mu \beta_e$ も μ と同様に微小量となる。また、 $\{\phi^{(i)}\}_0, \{\phi^{(i)}\}_1, \{\phi^{(i)}\}_2, \dots$ と $(\omega_0^{(i)})^2, (\omega_2^{(i)})^2, (\omega_4^{(i)})^2, \dots$ および $\eta_1^{(i)}, \eta_3^{(i)}, \eta_5^{(i)}, \dots$ は実数とする。

ついで式 (9) ～式 (11) を式 (7) に代入し、 μ^0 と μ^1 の量ごとに整理すると次式を得る。

$$\eta_{tot}^{(i)} = \sum_{e=1}^{e_{\max}} (\eta_e S_e^{(i)}), \quad S_e^{(i)} = \frac{\{\phi^{(i)}\}_0^T [K_R]_e \{\phi^{(i)}\}_0}{\sum_{e=1}^{e_{\max}} \{\phi^{(i)}\}_0^T [K_R]_e \{\phi^{(i)}\}_0} \quad (12)$$

$\{\phi^{(i)}\}_0$ は実固有モードである。 $S_e^{(i)}$ は i 次振動モードで変形した条件での各要素の歪みエネルギー分担率 (要素 e の歪みエネルギー/全系の歪みエネルギー) である。上式からモード損失係数 $\eta_{tot}^{(i)}$ は材料減衰 η_e と歪みエネルギー分担率 $S_e^{(i)}$ との積の全要素に渡る和から近似計算できる。 $\eta_e S_e^{(i)}$ は各要素の散逸エネルギーの分担率に相当し、これが大きい要素ほどモード減衰 $\eta_{tot}^{(i)}$ への影響が大きい場所となる。すなわち、集中ばね、弾性平板、制振材層の散逸エネルギーの分担率によってモード減衰 $\eta_{tot}^{(i)}$ が変化することになる。

3・5 非線形離散化方程式の基準座標への変換

式 (6) のような物理座標で記述された運動方程式は自由度が大きく、計算時間が膨大となる。そこで、式 (6) に線形固有振動モードに対応する基準座標を導入し、自由度を縮小する。ただし、線形固有振動モード $\{\phi^{(i)}\}$ は実固有モード $\{\phi^{(i)}\}_0$ で近似できるものとする。この $\{\phi^{(i)}\}_0$ に対応する基準座標 $\tilde{b}_i$ を導入し、変位 $\{U\}$ を

$$\{U\} = \sum_{i=1} (1/n_i) \tilde{b}_i \{\tilde{\phi}^{(i)}\}_0 \quad (13)$$

と記述する。 $\{\phi^{(i)}\}_0 = \{\tilde{\phi}^{(i)}\}_0 / n_i$, $n_i = (\sqrt{m_i})^{-1}$, $m_i = \{\phi^{(i)}\}_0^T [M] \{\phi^{(i)}\}_0$, $\{\tilde{\phi}^{(i)}\}_0^T [M] \{\tilde{\phi}^{(i)}\}_0 = 1$ とする。

これを、全系離散化方程式 (6) に代入すると基準座標 $\tilde{b}_i$ を用いた非線形連立三次微分方程式を得る。

$$M(\tilde{b}_i) \equiv \ddot{\tilde{b}}_i + \eta_{tot}^{(i)} \omega^{(i)} \dot{\tilde{b}}_i + (\omega^{(i)})^2 \tilde{b}_i + \sum_j \sum_k \tilde{D}_{ijk} \tilde{b}_j \tilde{b}_k + \sum_j \sum_k \sum_l \tilde{E}_{ijkl} \tilde{b}_j \tilde{b}_k \tilde{b}_l - \tilde{P}_i = 0 \quad (14)$$

ただし、 $\tilde{P}_i = n_i \{\tilde{\phi}^{(i)}\}_0^T \{F\}$, $\{\tilde{\phi}^{(i)}\}_0 = \{\tilde{\phi}_{1Xi}, \tilde{\phi}_{1Yi}, \tilde{\phi}_{1Zi}, \tilde{\phi}_{2Xi}, \tilde{\phi}_{2Yi}, \tilde{\phi}_{2Zi}, \tilde{\phi}_{3Xi}, \dots\}^T$,

$$\tilde{D}_{ijk} = \sum_{m=1}^4 \gamma_{2mZ} \frac{n_i}{n_j n_k} \tilde{\phi}_{\alpha_m Zi} \tilde{\phi}_{\alpha_m Zj} \tilde{\phi}_{\alpha_m Zk}, \quad \tilde{E}_{ijkl} = \sum_{m=1}^4 \gamma_{3mZ} \frac{n_i}{n_j n_k n_l} \tilde{\phi}_{\alpha_m Zi} \tilde{\phi}_{\alpha_m Zj} \tilde{\phi}_{\alpha_m Zk} \tilde{\phi}_{\alpha_m Zl} \quad (15)$$

$\tilde{\phi}_{\alpha_m Zi}$ は非線形集中ばねと箱型構造の接合節点 α_m における $\{\tilde{\phi}^{(i)}\}_0$ の Z 成分である。式 (14) を用いると式 (6) に比べ計算自由度を縮小できる。

3・6 非線形衝撃応答

外力 $\{F\}$ が半三角波形のパルスであるとし、加振点 (図3右) の Z 方向に図4のような加振振幅 F_d をもつパルスを与えた。 $\{F\}$ 中の他の成分はすべてゼロとする。 τ は時間である。観測点 (図3左) の Z 方向の変位の時間変化をルング・クッタ法を用い求めた。この半三角波形について、パルスの最大振幅 $|F_{\max}|$ を変化させた。パルス幅は一定とした。

4. 共振周波数, 固有モード, モード損失係数

固有値解析により共振周波数 $f^{(i)} = \omega^{(i)} / 2\pi$, 固有モード $\{\phi^{(i)}\}_0$, モード損失係数 $\eta_{tot}^{(i)}$ を求め、比較した。結果の一部を図5～図7に示す。

各モデルとも、1～6次は集中ばねの変形が主体の剛体モードが現れる。7次以降に箱型構造の変形が主体の弾性モードが現れる。

Fig. 3 Excitation point and observation point

Fig. 4 Input of impact load

4・1 弾性板モデル(モデルⅠ)における固有モードとモード損失係数

弾性パネル(アルミ板)の減衰 ($\eta_p = 0.001$) よりも集中ばねの減衰 ($\eta_s = 0.1$) を大きくしてある。したがって箱型構造の剛体モード (図 5 左) のモード損失係数 $\eta_{tot}^{(i)}$ は、弾性モード (図 5 中央, 右) よりも大きくなる。

4・2 弾性板+制振材モデル(モデルⅡ)における固有モードとモード損失係数

材料減衰 $\eta_d = 0.333$ の制振材を $\eta_p = 0.001$ のアルミ製板に積層したパネルの減衰の理論値 (Oberst の理論式⁽¹⁰⁾) は 0.27 である。したがって、集中ばねの減衰 ($\eta_s = 0.1$) よりも制振材を積層した下面パネルの減衰の方が大きい。よって、下面パネルの変位が大きい弾性モード (図 6 右) のモード損失係数 $\eta_{tot}^{(i)}$ は、箱型構造の剛体モード (図 6 左) よりも大きくなる。また、下面パネルの変位が小さい弾性モード (図 6 中央) のモード損失係数 $\eta_{tot}^{(i)}$ は、制振材の減衰が効かないので剛体モードよりも小さくなる。

4・3 高剛性弾性板+制振材モデル(モデルⅢ)における固有モードとモード損失係数

本モデルは、箱型構造の下面パネルの板厚を他のモデルの 2 倍の 20mm にしている。下面の板厚が 10mm の弾性板+制振材モデルと比較して、全体的にモード損失係数 $\eta_{tot}^{(i)}$ が小さい (図 6, 図 7 参照)。以下にその原因を考察する。

下面パネルの剛性が高いので、ほとんどの固有モードで、下面パネルの変位が小さくなる。式 (12) から制振材層の歪みエネルギー分担率 $S_e^{(i)}$ が大きいほど系のモード損失係数 $\eta_{tot}^{(i)}$ が大きくなる。したがって、制振材が積層されている下面パネルの変位が小さくなるモードではモード損失係数 $\eta_{tot}^{(i)}$ が小さくなる。このことを検証するために、図 8 に本系の各部分構造(箱構造の各パネル、制振材層、集中ばね)の歪みエネルギー分担率(縦軸)の例を示す。弾性板+制振材モデルの mode9 (図 6 参照) と高剛性弾性板+制振材モデルでの mode11 (図 7 参照) の計算結果が図中に記載されている。いずれも下面パネルの一次モードが含まれたモードである。これより、下面パネルの板厚を増すと下面パネルの歪みエネルギー分担率が減少し、代わりに箱構造を構成する他のパネル(制振材は積層していないパネル)の歪みエネルギー分担率が増加し、系のモード損失係数が低下している。

また、制振材を積層した下面パネルを部分構造として考える。下面パネルの板厚が増大すると、積層された制振材層の歪みエネルギー分担率 $S_e^{(i)}$ が低下する。そのために部分構造としてのモード損失係数 $\eta_{tot}^{(i)}$ も小さくなる。この現象は Oberst の理論式⁽¹⁰⁾からも予見できる。制振材を積層した下面パネルの部分構造としての減衰値は 0.13 となる。これは弾性板の板厚が増す前の減衰値 0.27 よりも劣化する。このことを検証するために、箱型構造の FEM モデルから制振材を積層した下面パネルのみを切り出した。このモデルの全周縁を固定した条件でモード損失係数を計算し、Oberst の理論式による計算値を比較した。結果を図 9 に示す。集中ばねは取り外してある。縦軸は制振材を積層した下面パネルのみのモード損失係数である。横軸はモード(括弧内に記載された 2 つの数字は、それぞれ長辺方向および短辺方向の半波長の数)を表している。FEM 計算値と理論値は一致し、ともに弾性パネルの板厚を増すと、モード損失係数が低下する結果となっている。

Fig. 5 Vibration modes of model I (elastic plates)

Fig. 6 Vibration modes of model II (elastic plates and damping layers)

Fig. 7 Vibration modes of model III (high stiffness elastic plates and damping layers)

Fig. 8 Share of strain energy in the parts of the box structure

Fig. 9 Modal loss factors of bottom panel (Oberst&FEM)

5. 衝撃応答の時刻歴波形

各モデルに図4の半三角波形パルスを入力したときの非線形衝撃応答を示す．入力大きさについては，小さい外力 ($|F_{\max}| = 9.8\text{N}$) と大きい外力 ($|F_{\max}| = 9.8 \times 10^5\text{N}$) を考慮した．なお，図4の半三角波形パルスのフーリエスペクトラムは，1kHz以下の周波数において，ほぼフラットであることを確認してある．すなわち，後に示す応答のフーリエスペクトラムの対象周波数範囲(1Hz～800Hz)において，入力の周波数は一様になっている．

5・1 弾性板モデル(モデルⅠ)の衝撃応答

弾性板モデル(モデルⅠ)に図4の半三角波形パルスを入力したときの観測点の非線形衝撃応答 w を図10，図11に示す．図10では $|F_{\max}| = 9.8\text{N}$ ，図11では $|F_{\max}| = 9.8 \times 10^5\text{N}$ を入力した．外力が大きい条件(図11)では非線形集中ばねの影響により高調波成分が現れ，外力が小さい条件(図10)に比べ波形が複雑な形状となる．

Fig. 10 Impact response for model I (elastic plates),
small input $|F_{\max}| = 9.8$

Fig. 11 Impact response for model I (elastic plates),
large input $|F_{\max}| = 9.8 \times 10^5$

5・2 弾性板+制振材モデル(モデルⅡ)の衝撃応答

弾性板+制振材モデル(モデルⅡ)に図4の半三角波形パルスを入力したときの観測点の非線形衝撃応答 w を図12，図13に示す．図12では $|F_{\max}| = 9.8\text{N}$ ，図13では $|F_{\max}| = 9.8 \times 10^5\text{N}$ を入力した．外力が大きい条件(図13)では非線形集中ばねの漸硬性の影響により，外力が小さい条件(図12)に比べ減衰波形の周期が短くなる．また，制振材がない条件の図10，図11と比較すると，周期が短い高周波数成分が小さくなっている．

5・3 高剛性弾性板+制振材モデル(モデルⅢ)の衝撃応答

高剛性弾性板+制振材モデル(モデルⅢ)に，図4の半三角波形パルスを入力したときの非線形衝撃応答 w を図14，図15に示す．図14は $|F_{\max}| = 9.8\text{N}$ ，図15は $|F_{\max}| = 9.8 \times 10^5\text{N}$ を入力した結果である．外力が大きい条件(図15)では非線形集中ばねの漸硬性の影響により，外力が小さい条件(図14)に比べ周期が短くなる．また，波形上の細かな凸凹が大きくなる．下面パネルのアルミの板厚が薄い条件の図12，図13と比較すると，周期が短い高周波数成分がやや増加している．

Fig. 12 Impact response for model II (elastic plates and
damping layers), small input $|F_{\max}| = 9.8$

Fig. 13 Impact response for model II (elastic plates and
damping layers), large input $|F_{\max}| = 9.8 \times 10^5$

Fig. 14 Impact response for model III (high stiffness elastic plates and damping layers), small input $|F_{\max}| = 9.8$

Fig. 15 Impact response for model III (high stiffness elastic plates and damping layers), large input $|F_{\max}| = 9.8 \times 10^5$

6. 衝撃応答のフーリエスペクトル

図 10～図 15 の時刻歴波形のフーリエスペクトルを求めた. その結果と代表的な固有モードを図 16～図 25 に示す. 図中の横軸は分析周波数 f_{sp} , 縦軸はスペクトルの振幅 $A(f_{sp})$ である. 図中の (i) は i 次モードに対応する.

6・1 弾性板モデル(モデル I)の衝撃応答のフーリエスペクトル

外力が小さい条件 (図 16) の衝撃応答では, 図 18 に示す mode1, mode2, mode4, mode7, mode16, mode17, mode25, mode44, mode60 が主に現れた. 外力が大きい条件 (図 17) では, mode9 (図 19 左), mode20 (図 19 右) のモードの応答振幅が増大した. mode9, mode20 はパネル変形が主体の弾性モードである. mode9 の周波数成分が mode25 (図 18 下段, 左) の $1/3$ 分数次調波成分に対応する. さらに mode20 の周波数成分が mode44 (図 18 下段, 中央) の $1/2$ 分数次調波成分に対応している. これより内部共振条件による非線形連成が発生している.

Fig. 16 Fourier spectrum of impact response for model I (elastic plates), small input $|F_{\max}| = 9.8$

Fig. 17 Fourier spectrum of impact response for model I (elastic plates), large input $|F_{\max}| = 9.8 \times 10^5$

Vibration mode 1	Vibration mode 2	Vibration mode 4
$f^{(i)} = 10.7\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.081$	$f^{(i)} = 11.1\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.081$	$f^{(i)} = 24.2\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.078$
Vibration mode 7	Vibration mode 16	Vibration mode 17
$f^{(i)} = 71.3\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.007$	$f^{(i)} = 168\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.002$	$f^{(i)} = 178\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.004$
Vibration mode 25	Vibration mode 44	Vibration mode 60
$f^{(i)} = 250\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.003$	$f^{(i)} = 404\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.002$	$f^{(i)} = 541\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.002$

Fig. 18 Vibration modes of model I (elastic plates)

Vibration mode 9	Vibration mode 20
$f^{(i)} = 86.9\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.002$	$f^{(i)} = 194\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.002$

Fig. 19 Vibration modes of model I (elastic plates)

6・2 弾性板+制振材モデル(モデルⅡ)の衝撃応答のフーリエスペクトル

外力が小さい条件 (図 20) の衝撃応答には, 図 22 に示す mode1, mode2, mode4, mode7, mode13, mode25 が主に現れている. 外力が大きい条件 (図 21) では, mode1 (図 22 上段, 左), mode2 (図 22 上段, 中央), mode4 (図 22 上段, 右) のピークが微小振幅での共振周波数よりも高い周波数に現れる. mode1, mode2, mode4 は非線形集中ばねの変形が主体の箱構造の剛体モードである. したがって, これらのモードには非線形集中ばねの漸硬性の影響が強く現れたと考えられる. また, 4・2 に示したようにモード損失係数 $\eta_{tot}^{(i)}$ が弾性板モデルより大きい. したがって制振材を積層しない条件 (図 16) と比較し, 制振材を積層した条件 (図 20) では弾性モードの応答振幅が全体的に減少した. また, 外力が大きい条件で弾性板モデル (図 17) で見られた内部共振条件による応答の増加が, 弾性板+制振材モデル (図 21) では起こりにくい.

Fig. 20 Fourier spectrum of impact response for model II (elastic plates and damping layers), small input $|F_{\max}| = 9.8$

Fig. 21 Fourier spectrum of impact response for model II (elastic plates and damping layers), large input $|F_{\max}| = 9.8 \times 10^5$

Vibration mode 1	Vibration mode 2	Vibration mode 4
$f^{(i)} = 11.1\text{Hz}, \eta_{\text{tot}}^{(i)} = 0.106$	$f^{(i)} = 11.6\text{Hz}, \eta_{\text{tot}}^{(i)} = 0.106$	$f^{(i)} = 22.6\text{Hz}, \eta_{\text{tot}}^{(i)} = 0.105$
Vibration mode 7	Vibration mode 13	Vibration mode 25
$f^{(i)} = 72.2\text{Hz}, \eta_{\text{tot}}^{(i)} = 0.044$	$f^{(i)} = 158\text{Hz}, \eta_{\text{tot}}^{(i)} = 0.004$	$f^{(i)} = 255\text{Hz}, \eta_{\text{tot}}^{(i)} = 0.018$

Fig. 22 Vibration modes of model II (elastic plates and damping layers)

6・3 高剛性弾性板+制振材モデルの衝撃応答のフーリエスペクトル

外力が小さい条件 (図 23) の衝撃応答では, 図 25 に示す mode1, mode2, mode4, mode7, mode13, mode15, mode24, mode33 が応答に主に現れた. 外力が大きい条件 (図 24) では, mode7 (図 25 中段, 左) の応答振幅が増大した. mode7 はパネルの変形が主体の弾性モードである. mode7 の周波数成分が mode1 (図 25 上段, 左), mode2 (図 25 上段, 中央) の 6 倍の高調波成分に対応している. したがって, 内部共振条件による非線形連成が現れている. 4・3 に示したように, 本モデルは下面パネルの剛性が高い. したがって下面パネルの剛性が低い場合 (4・2) と比較して, 全体的に下面パネルの変位が小さくモード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$ が小さい. その影響のため, 下面パネルの剛性が高い場合 (図 23) は, 下面パネルの剛性が低い場合 (図 20) より, 大きな応答振幅を示すモードが現れた. また, 外力が大きい条件では, 弾性板+制振材モデルよりも内部共振条件 (mode1, mode2 および mode7) による応答の増加が起りやすい.

Fig. 23 Fourier spectrum of impact response for model III (high elastic plates and damping layers), small input $|F_{\max}| = 9.8$

Fig. 24 Fourier spectrum of impact response for model III (high elastic plates and damping layers), large input $|F_{\max}| = 9.8 \times 10^5$

Vibration mode 1	Vibration mode 2	Vibration mode 4

$f^{(i)} = 11.2\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.100$	$f^{(i)} = 11.6\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.100$	$f^{(i)} = 21.7\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.099$
Vibration mode 7	Vibration mode 13	Vibration mode 15

$f^{(i)} = 74.5\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.010$	$f^{(i)} = 159\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.003$	$f^{(i)} = 173\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.004$
Vibration mode 24	Vibration mode 33

$f^{(i)} = 258\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.003$	$f^{(i)} = 340\text{Hz}, \eta_{tot}^{(i)} = 0.007$	

Fig. 25 Vibration modes of model III (high stiffness elastic plates and damping layers)

7. 結 言

平板で構成される箱型構造の下面に制振材を積層した. この構造を非線形集中ばねで支持した系の衝撃応答を数値解析した. 部材間 (パネル, 制振材, 集中ばね) の減衰の連成が非線形衝撃応答に与える影響に着目して解析を行い, 以下の現象を明らかにした.

(1) 集中ばねの材料減衰をパネルの材料減衰よりも大きくした条件では、制振材が無い場合には、パネルの弾性モードのモード損失係数が小さい。その影響のために衝撃応答において、大きな振幅を示すモードが多数現れた。外力が大きい条件では内部共振条件による応答振幅の増加が起こりやすい。

(2) モード損失係数が大きいのは制振材を積層したパネルの変位が大きい（歪みエネルギー分担率が大きい）弾性モードである。制振材を積層した条件では、衝撃応答において弾性モードの応答振幅が全体的に減少する。その影響で、外力が大きい場合に内部共振条件による応答振幅の増加が起こりにくい。

(3) 下面パネルの剛性が高い場合、制振材を積層した下面パネルの変位が減少し、その歪みエネルギー分担率が小さくなる。代わりに制振材を積層していない他の弾性パネルの歪みエネルギー分担率が増加する。そのためにモード損失係数が小さくなる。また、下面パネルの剛性が高くなると、積層した制振材層の歪みエネルギー分担率が低下するために、さらにモード損失係数は小さくなる。その影響のため、衝撃応答において、下面パネルの剛性が低い場合よりも、大きな応答振幅を示すモードが現れる。また、外力が大きい場合では、その影響で内部共振条件による応答振幅の増加が起こりやすくなる。

8. 今後の課題

本問題では板構造に微小変形を仮定しており、幾何学的非線形性あるいは材料非線形性は考慮されていない。今回用いた弾性平板の板厚は10 mmあるいは20 mmなので、時刻歴波形では板厚程度の振幅の大きさになっている。したがって、実際の構造では、幾何学的非線形性の影響が現れる可能性がある。ただし、本報告の時刻歴波形には、板の曲げ変形のみではなく集中ばねの大振幅が混在している。特に制振材層を有するモデルでは、板の曲げ変形モードの振幅は減衰で十分に抑えられているので問題は少ないと考えられる。しかし、制振材層が無いモデルでは、実際の構造では幾何学的非線形性の影響が現れる可能性がある。著者らは板、シェル構造の幾何学的非線形性を考慮した非線形振動、カオス振動の理論解析^{(9), (16)}、数値解析^{(9), (16)}、実験解析⁽¹⁶⁾を過去に報告してきている。この問題点の検討については今後の課題とする。

文 献

- (1) Feeny, B.F. and Kappagantu, R., "On the Physical Interpretation of Proper Orthogonal Modes in Vibrations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211, No.4 (1998), pp. 607-616.
- (2) 近藤孝広, 佐々木卓実, 綾部隆, "非線形支持された直線状はり構造物の強制振動解析 (第2報, 低次元化モデルによる安定判別法の提案と数値計算結果)", 日本機械学会論文集C編, Vol. 67, No. 656 (2001), pp. 914-921.
- (3) Pesheck, E., Boivin, N., Pierre, C. and Shaw, S. W., "Non-linear Modal Analysis of Structural Systems Using Multi-mode Invariant Manifolds", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 25 (2001), pp. 183-205.
- (4) 山口誉夫, 永井健一, 丸山真一, 油田知宏, "非線形ばねで支持された弾性ブロックの連成振動の有限要素解析 (弱非線形性を有する場合の解析)", 日本機械学会論文集C編, Vol. 69, No. 688 (2003), pp. 3167-3174.
- (5) 山口誉夫, 斉藤友明, 永井健一, 丸山真一, 黒沢良夫, 松村修二, "非線形集中ばねで支持された粘弾性ブロックの減衰振動の有限要素解析", 日本機械学会論文集C編, Vol. 71, No. 703 (2005), pp. 829-836.
- (6) Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K., *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics* (1967), MacGraw-Hill.
- (7) Wilson, E. L., Taylor, R. L., Doherty, W. P. and Ghaboussi, J., *Incompatible Displacement Methods, in Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics* (1973), Academic Press.
- (8) Ma, B. A. and He, J. F., "A Finite Element Analysis of Viscoelastically Damped Sandwich Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 152-1 (1992), pp. 107-123.
- (9) Yamaguchi, T. and Nagai, K., "Chaotic Vibrations of a Cylindrical Shell-Panel with an In-Plane Elastic-Support at Boundary", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 13 (1997), pp. 259-277.
- (10) Oberst, H., *Akustische Beihefte*, Heft 4, (1952), pp. 181-194.
- (11) Johnson, C.D. and Kienholz, A., "Finite element prediction of damping structures with viscoelastic layers", *AIAA Journal*, Vol.20, No.9 (1982), pp.1284-1290.

- (12) 山口誉夫, 黒沢良夫, 松村修二, 野村章, “制振材を積層した自動車車体用パネルの減衰特性の有限要素解析 (第一報 ビードパネルの減衰特性の実験結果と数値解析結果の比較)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 69, No.678 (2003), pp.297-303.
 - (13) 山口誉夫, 黒沢良夫, 松村修二, 村上聡, 澤田耕吉, “制振材を積層した自動車車体用パネルの減衰特性の有限要素解析 (第二報 ビードパネルの幾何学的形状がモード減衰に与える影響)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.69, No.678 (2003), pp.304-311.
 - (14) 山口誉夫, 竹前康德, 黒沢良夫, 松村修二, “制振材を積層した自動車車体用パネルの減衰特性の有限要素解析 (第三報 散逸エネルギーの分布を集約できるビード形状)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.70, No.699 (2004), pp.3062-3069.
 - (15) 黒沢良夫, 山口誉夫, 榎本秀喜, 松村修二, “制振材が積層された自動車パネルの振動減衰特性 (大規模 FE モデルを用いた振動解析)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.69, No.687 (2003), pp.2983-2990.
 - (16) Nagai, K., Maruyama, S., Murata, T. and Yamaguchi, T., “Experiments and Analysis on Chaotic Vibrations of a Shallow Cylindrical Shell-Panel”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 305 (2007), pp.492-520.
-