絞りに円管を用いた空気ばねの復元力と減衰力を計算する近似式の提案*

浅見 敏彦^{*1}, 横田 泰孝^{*2}, 伊勢 智彦^{*3}, 本田 逸郎^{*3}, 坂本 博哉^{*4}

An Approximate Formula to Calculate the Restoring and Damping Forces of an Air Spring with an Elongated Circular Tube as the Orifice

Toshihiko ASAMI^{*1}, Yasutaka YOKOTA, Tomohiko ISE,
Itsuro HONDA and Hiroya SAKAMOTO

^{*1} University of Hyogo
2167 Shosha, Himeji, Hyogo, 671-2280, Japan

This paper proposes a simple expression for calculating the restoring and the damping forces of an air spring equipped with an elongated tube as the orifice. Air springs are commonly used in railway vehicles, automobiles, and various vibration isolators. The air spring used in this study consists of two tanks connected by a long tube. Using a tube instead of an orifice enables flexibility in the arrangement of the two tanks. In addition, this makes it possible to manufacture a thin air spring. The oscillating system, which consists of a single mass supported by this type of air spring is a single-degree-of-freedom (SDOF) system. However, it has two resonance points for a reason that had been unknown for a long period of time. In this paper, we explain why the SDOF system has two resonance points. After that, assuming that the vibration is small and the flow through the tube is laminar, we derive the spring constant and the damping coefficient of an air spring subjected to a simple harmonic motion. Then, we calculate the frequency response curves for the system and compare the calculated results with the experimental values. According to the experiment, there is a remarkable amplitude dependency in this type of air spring, so the frequency response curves for the system change with the magnitude of the input amplitude. It becomes clear that the calculation results are in agreement with the limit value when the input amplitude approaches zero.

Key Words : Damping , Vibration Control Device , Vibration Isolation , Forced Vibration , Air Spring , Oscillating Flow

1. 緒 言

空気ばねは、他のばね、例えば金属ばねに比べて、支持系の固有振動数を低く設定できるという利点を持っている。それ以外にも、空気ばねのばね定数が積載荷重に概ね比例することから、支持系の固有振動数が積載重量の変動の影響を受けにくいという利点もある。こうして、空気ばねが米国において半世紀以上に実用化されて以来、空気ばねは鉄道や自動車の懸架装置として、また精密機器の振動絶縁器として、さらには建築物の免震装置として広く採用されている⁽¹⁾。

多くの空気ばねは二つの空気室をもっている。その一つはメインタンクと呼ばれ、ゴム膜で覆われ、ばねとして荷重を支える。もう一つは補助空気室と呼ばれ、空気の貯蔵庫としての役割を果たす。これら二つの空気室は一般にオリフィスと呼ばれる細孔によって直接連結される。この方式の空気ばねは、構造が非常に簡単で、振動減衰効果を合わせ持つことから世界中で広く用いられている。そのため、これまでに多くの研究がなされ、その設計理論はほぼ確立されている^{(2) - (6)}。

* 原稿受付 2012 年 4 月 20 日

^{*1} 正員, フェロー, 兵庫県立大学大学院工学研究科 (〒671-2280 兵庫県姫路市書写 2167)

^{*2} 学生員, 兵庫県立大学大学院工学研究科 (〒671-2280 兵庫県姫路市書写 2167)

^{*3} 正員, 兵庫県立大学大学院工学研究科 (〒671-2280 兵庫県姫路市書写 2167)

^{*4} 特許機器(株) (〒660-0833 兵庫県尼崎市南初島町 10-133)

E-mail: asami@eng.u-hyogo.ac.jp

一方で、卓上型の空気ばねや自動車のサスペンションにおいては、全体を薄く設計するというような構造上の制約から、二つのタンクを同じ場所に置くことができず、両者を離して設置しなければならないことがある。この場合には、二つのタンクは細長い管によって連結される。この方式の空気ばねの減衰力発生機構はオリフィス式とは大きく違っており、この細管式の空気ばねに対しては全く新しい設計式を導かなければならない。特に、細管式の空気ばねで支えられた振動系は 1 自由度の振動系のように見えるが、二つの共振点が現れることがある。この 2 次共振点はオリフィス式の空気ばねでは決して現れないものである。

藤田ら⁽⁷⁾と高橋ら⁽⁸⁾は、この 2 次共振点は、細長い管内に含まれる空気の質量が集中質量となり、補助空気室内の空気弾性がばねとして作用するヘルムホルツ共鳴と考えた。事実、系の 2 次共振振動数はこのヘルムホルツ共鳴振動数とほぼ一致する。ところが、彼らの振動モデルでは減衰が全く考慮されていないが、そのモデルによる計算値は実験値と合っていない。ただ、彼らが行った数値解析の結果は、入力振幅が小さい限りにおいては実験値とよく合っているということは注目に値する⁽⁷⁾。Berg⁽⁹⁾もまた、細管式空気ばねのばね定数と減衰係数を数値解析により計算している。このような数値解析法は、たとえ実験値とよく一致する結果が得られたとしても、実用的な方法とは言えないであろう。Debra⁽¹⁰⁾と Bachrach⁽¹¹⁾は、実際の管内流が交番流であるにもかかわらず、これを定常流と仮定して実用的な計算式を導いた。Zhao ら⁽¹²⁾は交番的な管内流に対して、管の摩擦係数を測定した。このデータを用いて、Lee⁽¹³⁾は、空気ばねのばね定数と減衰係数の周波数特性を計算するための式を導いた。ところが、彼の理論は定常流れに基づいているため、この式からは 2 次共振を計算することができない。以上見てきたように、細管式空気ばね支持系の振動特性を計算式に基づいて予測することは現在までに誰も成功していない。

この論文では、我々は細長い管を有する空気ばねで支えられた系の周波数特性を計算するための近似式を提案する。この式を用いれば、空気ばねで支えられた見かけ上の 1 自由度振動系において現れる 2 次共振を計算することができる。同時に、なぜこのような 2 次共振が現れるのかという理由が明らかにされる。この現象にはパスカルの原理が重要な役割を演じていることが示される。なお、この現象には強い非線形性があり、入力振幅の大きさに大きく影響される。一方、我々の式は線形理論に基づいているので振幅依存性がない。入力振幅が大きくなるほど、理論値と実験値の差が大きくなっていくことが確認されている。この差は、管内流れを層流とみなして解析したことにあると考えている。すなわち、管内の流れはレイノルズ数の増加に伴って層流から乱流に遷移すると考えられる。この乱流遷移の条件は Zhao らが提案した実験式⁽¹²⁾によって確認できる。こうして、本論文で提案する設計式は、Zhao らによって与えられた限界値を超えない範囲で正弦振動する系に対しては有用であることが実証される。

2. 理 論 解 析

図 1 は、二つのタンクとそれを連結する細管で構成された空気ばねの模式図を示している。この空気ばねは質量 m のおもりを支え、おもりが正弦振動をすると、おもりの下に取付けられたピストンがメインタンク内を上下に運動する。はじめに、ピストンが $y(t) = y_a \sin \omega t$ で記述される単振動をしていると仮定して、二つのタンク内の圧力変化を計算する。次に、ピストンに作用する圧力の値から空気ばねの等価ばね定数と等価粘性減衰係数を求め、これを用いて基礎動振に対する上部質量の振動応答を計算する。この計算を代数式の形で実行するために、以下に示す仮定を用いる。これらの仮定が計算式の精度に及ぼす影響については後に議論することにする。

- (1) 空気ばねの基礎は静止しており、上部質量が単調和運動をする。
- (2) 二つのタンク内の空気の状態変化は断熱的である。
- (3) 管内の空気の流れは、入口部から十分発達した層流流れである。
- (4) 二つのタンクと円管内の空気圧力は正弦的に変化する。
- (5) 上部質量の変位振幅 y_a は空気ばねの初期高さ h_a に比べて十分小さい。
- (6) 空気の圧力はそれぞれのタンク内で均一に分布する。

2.1 基礎方程式

ピストンが初期平衡位置から y だけ移動すると、図 1 に示すように、メインタンクの容積が V_a から V_1 に変化し、メインタンク内の空気の圧力と密度はそれぞれ p_1 と ρ_1 に変化する。同時に、メインタンクから補助タンクに

Fig. 1 Analytical model of the air spring

単位時間あたりの質量流量が Q_m の割合で空気が流れ、補助タンク内の空気の圧力と密度がそれぞれ p_2 と ρ_2 に変化する．空気のこの状態変化に対して、仮定 (2) に基づいて次の状態方程式が得られる．

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^\kappa, \quad \frac{p_2}{p_0} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_0} \right)^\kappa \quad (1)$$

ここで、空気の比熱比 κ は 1.4 である．

y 軸の正方向を下向きにとると、メインタンクと補助タンクに対する連続の式は、質量流量 Q_m を用いて以下のように表される．

$$\rho_1(V_a - A_f y) + \int_0^t Q_m dt = \rho_0 V_a \quad (2)$$

$$\rho_2 V_b - \int_0^t Q_m dt = \rho_0 V_b \quad (3)$$

ここで、 V_b は補助タンクの容積であり、 A_f はピストンの有効受圧面積である．この受圧面積はゴム膜の厚さの分だけピストン断面積よりも大きくなり、ここではピストン断面積とシリンダ内面積の平均値としている．空気ばねの種類によっては、受圧面積はピストンの変位に依存する場合もあるが、本研究で用いたローリングシール型の空気ばねではこの変化は無視できるほど小さく、ここでは定数として扱う．

仮定 (3) により、細管内の流れについては次の線形化された Navier-Stokes 方程式で記述される．

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dz} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (4)$$

ここで ν は空気の動粘性係数で、 v は管内の軸方向 (z 軸) 速度であり、仮定により v は半径方向座標 r と時間 t のみの関数である．

2.2 円管内往復振動流の代数解⁽¹⁴⁾

仮定 (4) より、管内の圧力勾配を次のようにおく．

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{\Delta p}{L} \cos(\omega t + \xi) = \frac{\Delta p}{L} e^{i(\omega t + \xi)} \quad (5)$$

ここで ξ は、空気の慣性によって引き起こされる流速と圧力差の位相角である．このとき、管内の流れもまた正弦的に変化すると考えて、管内流速 v を次のようにおく．

$$v(r, t) = V(r) \cos(\omega t + \xi) = V(r) e^{i(\omega t + \xi)} \quad (6)$$

ここに、ピストンの速度は $dy/dt = y_a \omega \cos \omega t$ と表されることから、複素数で表示された形式的な解 (6) において、その実部のみが物理的な意味をもつことになる．この式 (5) と (6) を式 (4) に代入して整理すると、管内の速度振幅 V に関して以下に示す常微分方程式が得られる．

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} - i \frac{\omega}{\nu} V = -\frac{\Delta p}{Lv \rho_0} \quad (7)$$

これは非同次の線形微分方程式であり、その解はパラメータが $\sqrt{-i}$ の 0 次の Bessel 関数を用いて以下のように表される。

$$V(r) = A_1 \left(\text{ber } r \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} + i \text{bei } r \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right) + A_2 \left(\text{ker } r \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} + i \text{kei } r \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right) - i \frac{\Delta p}{L \rho_0 \omega} \quad (8)$$

ここで“ber”と“bei”は 0 次の Bessel 関数の実部と虚部であり、“ker”と“kei”はもう一つの Bessel 関数の実部と虚部である。ここに、式 (8) の右辺第 1 項と第 2 項は式 (7) に対応する同次方程式の解であり、最後の項は式 (7) の特殊積分、また A_1 と A_2 は積分定数である。いま、二つの境界条件 $v(0, t) = \text{finite}$ と $v(R, t) = 0$ を用いてこれらの積分定数を決定すると、次の解が得られる。ここで R は管路の半径であり、これらの境界条件は管中央における流速が有限であることと、管路壁面における速度がゼロであることを意味している。

$$V(r) = i \frac{\Delta p}{L \rho_0 \omega} \left(\frac{\text{ber } \eta + i \text{bei } \eta}{\text{ber } \eta_R + i \text{bei } \eta_R} - 1 \right) \quad (9)$$

ここに、 $\eta = r \sqrt{\omega/\nu}$ と $\eta_R = R \sqrt{\omega/\nu}$ は無次元座標である。式 (9) を式 (6) に代入すると、式 (4) の一般解が次のように得られる。

$$v(r, t) = i \frac{\Delta p}{L \rho_0 \omega} \left(\frac{\text{ber } \eta + i \text{bei } \eta}{\text{ber } \eta_R + i \text{bei } \eta_R} - 1 \right) e^{i(\omega t + \xi)} \quad (10)$$

最後に式 (10) の実部をとると、管内の空気の流れ速度分布に対して次の式が得られる。

$$v(r, t) = \frac{\Delta p}{L \rho_0 \omega} [B_2 \cos(\omega t + \xi) - (B_1 - 1) \sin(\omega t + \xi)] \quad (11)$$

ここで B_1 と B_2 は以下に示される。

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{\text{ber } \eta \text{ ber } \eta_R + \text{bei } \eta \text{ bei } \eta_R}{\text{ber}^2 \eta_R + \text{bei}^2 \eta_R} \\ B_2 &= \frac{\text{ber } \eta \text{ bei } \eta_R - \text{bei } \eta \text{ ber } \eta_R}{\text{ber}^2 \eta_R + \text{bei}^2 \eta_R} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

2.3 細管を通過する空気の質量流量

細管内を通過する空気の質量流量 Q_m は積分

$$Q_m = 2\pi \rho_0 \int_0^R r v(r, t) dr = 2\pi \rho_0 \frac{\nu}{\omega} \int_0^{\eta_R} \eta v(\eta, t) d\eta \quad (13)$$

によって求められる。Bessel 関数の積分は

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\eta_R} \eta \text{ber } \eta d\eta &= \eta_R \frac{-\text{ber } \eta_R + \text{bei } \eta_R}{\sqrt{2}} = \eta_R \text{bei}' \eta_R \\ \int_0^{\eta_R} \eta \text{bei } \eta d\eta &= -\eta_R \frac{\text{ber } \eta_R + \text{bei } \eta_R}{\sqrt{2}} = \eta_R \text{ber}' \eta_R \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

のように計算されることから、 Q_m は次式のように表される。

$$Q_m = \frac{A_t \Delta p}{L \omega} [B'_1 \cos(\omega t + \xi) + (B'_2 + 1) \sin(\omega t + \xi)] \quad (15)$$

ここで、 A_t は細管の断面積 ($= \pi R^2 = \pi d^2/4$) で、 B'_1 と B'_2 は以下で定義される定数である

$$\left. \begin{aligned} B'_1 &= \frac{2}{\eta_R} \frac{\text{ber } \eta_R \text{ber}' \eta_R + \text{bei } \eta_R \text{bei}' \eta_R}{\text{ber}^2 \eta_R + \text{bei}^2 \eta_R} \\ B'_2 &= \frac{2}{\eta_R} \frac{\text{bei } \eta_R \text{ber}' \eta_R - \text{ber } \eta_R \text{bei}' \eta_R}{\text{ber}^2 \eta_R + \text{bei}^2 \eta_R} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Bessel 関数に付けられたプライム記号は η に関する微分を意味している．式 (5) に記された関係式を用いると，式 (15) は次のように書き直される．

$$Q_m = \frac{A_t}{L\omega} \left[B'_1(p_1 - p_2) - \frac{B'_2 + 1}{\omega} \frac{d}{dt}(p_1 - p_2) \right] \quad (17)$$

2.4 ピストンが正弦振動するときのタンク内の圧力変動

2.4.1 線形近似式の導出

式 (1) を式 (2) と (3) に代入して両辺を t で微分し，式を整理すると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{A_f}{V_a} y \right) + \frac{1}{V_a \rho_0} Q_m = 0 \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_2}{p_0} \right) \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{V_b \rho_0} Q_m = 0 \quad (19)$$

これらの式に式 (15) を代入し，以下で定義される無次元パラメータを用いる．

$$\left. \begin{array}{lll} P_1 = (p_1 - p_0)/p_0 & , & P_2 = (p_2 - p_0)/p_0 : \text{無次元圧力} \\ R_a = A_f h_a / V_a & , & R_b = A_f h_b / V_b : \text{容積比} \\ T = \omega t / (2\pi) & & : \text{無次元時間} \\ Y = y / h_a & & : \text{無次元変位} \\ N_1 = \frac{1}{V_a} \frac{A_t p_0}{L \rho_0 \omega^2} & , & N_2 = \frac{1}{V_b} \frac{A_t p_0}{L \rho_0 \omega^2} : \text{無次元振動数} \end{array} \right\} \quad (20)$$

その結果，以下の連立微分方程式が得られる．

$$\frac{1}{\kappa} (1 + P_1) \frac{1}{\kappa}^{-1} (1 - R_a Y) \frac{dP_1}{dT} + (1 + P_1) \frac{1}{\kappa} \left(-R_a \frac{dY}{dT} \right) + 2\pi N_1 \left[B'_1(P_1 - P_2) - \frac{(B'_2 + 1)}{2\pi} \frac{d}{dT}(P_1 - P_2) \right] = 0 \quad (21)$$

$$\frac{1}{\kappa} (1 + P_2) \frac{1}{\kappa}^{-1} \frac{dP_2}{dT} - 2\pi N_2 \left[B'_1(P_1 - P_2) - \frac{(B'_2 + 1)}{2\pi} \frac{d}{dT}(P_1 - P_2) \right] = 0 \quad (22)$$

これらの式は非線形微分方程式であるので，代数的な解を求めることができない．そこで，微小振動の仮定 (5) に従って， $|P_1| = 0$ ， $|P_2| = 0$ と $|Y| = 0$ という近似を用いて方程式を線形化する．その結果は以下ようになる．

$$\frac{1}{\kappa} \frac{dP_1}{dT} + 2\pi N_1 \left[-\frac{(B'_2 + 1)}{2\pi} \frac{d}{dT}(P_1 - P_2) + B'_1(P_1 - P_2) \right] = R_a \frac{dY}{dT} \quad (23)$$

$$\frac{1}{\kappa} \frac{dP_2}{dT} - 2\pi N_2 \left[-\frac{(B'_2 + 1)}{2\pi} \frac{d}{dT}(P_1 - P_2) + B'_1(P_1 - P_2) \right] = 0 \quad (24)$$

この近似による誤差は非常に小さいことが文献 (6) で確認されている．次に，式 (23) から (24) を引き去ると，次の式が導かれる．

$$C_2 \frac{d}{dT}(P_1 - P_2) + 2\pi C_1(P_1 - P_2) = R_a \frac{dY}{dT} \quad (25)$$

ここで C_1 と C_2 は以下で記述される定数である．

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = B'_1 N_{12} \\ C_2 = \frac{1}{\kappa} - (B'_2 + 1) N_{12} \\ N_{12} = N_1 + N_2 = \left(\frac{1}{V_a} + \frac{1}{V_b} \right) \frac{A_t p_0}{L \rho_0 \omega^2} \end{array} \right\} \quad (26)$$

さらに, 式 (5) から $P_1 - P_2 = \Delta p / p_0 \cos(2\pi T + \xi)$ という関係式が得られ, 式 (25) は以下のように書くこともできる.

$$\frac{2\pi\Delta p}{p_0} \left[(C_1 \sin \xi + C_2 \cos \xi) \sin 2\pi T - \left(C_1 \cos \xi - C_2 \sin \xi + \frac{p_0}{\Delta p} R_a Y_a \right) \cos 2\pi T \right] = 0 \quad (27)$$

すべての時間に対して式 (27) が満たされなければならないことから, 以下の式が成立する.

$$\left. \begin{aligned} \Delta p \cos \xi &= \frac{C_1 p_0 R_a Y_0}{C_1^2 + C_2^2} \\ \Delta p \sin \xi &= -\frac{C_2 p_0 R_a Y_0}{C_1^2 + C_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

これを式 (5) に代入することによって無次元圧力差 $P_1 - P_2$ が以下のように求められる.

$$P_1 - P_2 = \frac{R_a Y_0}{C_1^2 + C_2^2} (C_1 \cos 2\pi T + C_2 \sin 2\pi T) \quad (29)$$

最後に, この式を式 (23) と (24) に代入すると, メインタンク内の無次元圧力 P_1 と補助タンク内の無次元圧力 P_2 が以下のように求められる.

$$P_1 = \frac{R_a Y_0 \kappa}{C_1^2 + C_2^2} \left[\left(\frac{C_1}{\kappa} - D_1 \right) \cos 2\pi T + \left(\frac{C_2}{\kappa} + D_2 \right) \sin 2\pi T \right] \quad (30)$$

$$P_2 = \frac{R_a Y_0 \kappa}{C_1^2 + C_2^2} (D_1 \cos 2\pi T + D_2 \sin 2\pi T) \quad (31)$$

ここで D_1 と D_2 は以下で記述される新しい定数である.

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= N_2 [B'_1 C_2 + (B'_2 + 1) C_1] \\ D_2 &= N_2 [B'_1 C_1 - (B'_2 + 1) C_2] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

2.4.2 計算結果

図 2 は, 空気ばねの基礎を固定し, ピストンを一定振幅の単調和運動で振動させたときの周波数応答特性を表している. その計算条件は, $d = 2.5, 4.0 \text{ mm}$, $L = 0.25, 0.50, 1.0, 2.0 \text{ m}$, $y_a = 0.1 \text{ mm}$, $V_b = 546 \text{ mL}$ で, 他の条件については後述の表 1 に示されている. 図 2(a) は細管を流れる空気の流れ速度振幅 V を表しており, 同図 (b) は管内流速のピストン速度からの位相遅れ ξ を, (c) と (d) はそれぞれメインタンクと補助タンクの圧力振幅 p_{1a} と p_{2a} を表している. この図から, 空気の流れ速度振幅 V はある周波数で最大値をとり, このときに位相角 ξ は 90° になることが分かる. これはヘルムホルツ共鳴と呼ばれる現象である. この共鳴振動数において, 二つのタンクの圧力振幅は非常に大きくなる. また, 図 2(d) からは, ヘルムホルツ共鳴振動数よりも高い振動数に対しては, 補助タンク内の空気の圧力振幅はゼロに向かって減少していくことが観察される. このことは, 高い周波数領域に対しては補助タンクが機能していないことを意味している.

2.5 細管式空気ばねのばね定数と減衰係数

空気ばねのピストンの運動方程式は次式で表される.

$$m\ddot{y} + p_0 P_1 A_f = 0 \quad (33)$$

この式 (33) にピストンが $y(t) = y_a \sin \omega t = y_a \sin 2\pi T$ で正弦振動をするときの圧力 P_1 の式 (30) を代入し, $y_a = Y_0 h_a$ であることから $Y_0 \sin 2\pi T = y(t)/h_a$, $Y_0 \cos 2\pi T = \dot{y}(t)/(h_a \omega)$ とおくと, 運動方程式は次のように書き換えられる

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \quad (34)$$

Fig. 2 Calculation results of the pressure in the tanks and the flow rate in the circular tube ($y_a = 0.1$ mm, $V_b = 546$ mL)

ここで

$$k = \frac{A_f p_0}{h_a} \frac{R_a \kappa}{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_2}{\kappa} + D_2 \right) \quad (35)$$

$$c = \frac{A_f p_0}{h_a \omega} \frac{R_a \kappa}{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\kappa} - D_1 \right) \quad (36)$$

これらの式中の記号 C_1, C_2, D_1, D_2 には振動数 ω が含まれており、空気ばねのばね定数と減衰係数には周波数依存性があることが明らかである。

空気ばねで支えられた系には、ここで述べた空気の変位による復元効果と減衰効果の他に、ゴムの弾性と摩擦、おそらくはゴムとゴムの滑り、ゴムと金属の滑りに加えてゴムの内部減衰による別の復元力と減衰力が作用する。空気ばね振動系全体のばね定数と減衰係数を正確に計算するためにはこれらの影響を考慮しなければならない。ここではゴム膜の変形に起因する空気ばねのばね定数を k_r とおき、空気流動以外の原因によって生じる減衰係数を c_r とおくことにする。 k_r と c_r の大きさは振動の振幅と振動数に依存する。我々は細管が塞がれた空気ばねを用いてこれらの値を測定し、以下に示す実験式を得た⁽⁶⁾。

$$k_r = -1.60 \ln y_a + 4.72 \quad [\text{kN/m}] \quad (37)$$

$$c_r = 49.0 \exp(-0.04f) \quad [\text{Ns/m}] \quad (38)$$

ここで y_a は mm の単位で測られたピストンの変位振幅であり、 f は Hz の単位で測られた振動数である。ゴム膜のばね定数は振動振幅によって変化するので非線形であるが、ゴム膜の減衰係数は振動振幅ではなく周波数によって変化するので線形である。図3は空気ばねによって支えられた質量の振動系モデルを表している。ここで k と c は式(35)と(36)によって計算される空気ばねのばね定数と減衰係数であり、 k_r と c_r は式(37)と(38)によって計算されるゴム膜の等価ばね定数と等価粘性減衰係数である。

Fig. 3 Vibration model of the air spring

Fig. 4 Experimental setup

3. 実験装置および実験方法

理論解析においては空気ばねで支えられた質量 m が単調和運動をし、空気ばねの基礎は静止していると考えた(図1)．ところが実験では、空気ばねは2枚の板の間に挿入され(図4)、励振力が基礎板に加えられ、空気ばねを介して上部板に伝えられる．この空気ばねの水平方向剛性は非常に弱いので、頭部が横揺れすることを防ぐために案内棒を用いている．この案内棒と運動体の間で生じる摩擦力を軽減するために静圧気体軸受を用いている．この実験では、空気ばねの基礎が加振器によって正弦加振される．そして、上部板と基礎に取付けられた加速度センサによって測定されたそれぞれの加速度が、チャージ増幅器を介してFFTアナライザに送られる．このFFTアナライザによって上部板と基礎の振幅比 X/X_0 と位相角 $\phi - \gamma$ が測定される．ここで、 $\gamma = \tan^{-1}(c\omega/k) = \tan^{-1}(2\zeta\lambda)$ は等価加振力 $kx_0 + c\dot{x}_0 = P_{eq} \sin(\omega t + \gamma)$ と入力変位 $x_0(t) = X_0 \sin \omega t$ との位相差である．また、 $\phi = \tan^{-1}[c\omega/(k - m\omega^2)] = \tan^{-1}[2\zeta\lambda/(1 - \lambda^2)]$ は、この力に対する応答の位相遅れを表している．これらの式において、 $\zeta = c/(2m\omega_n)$ 、 $\lambda = \omega/\omega_n$ 、 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ である．

図3はこの実験装置の力学モデルを表している．このモデルに示された質量に関する運動方程式を導き、図に示されたばね定数 k と k_r および減衰係数 c と c_r はすべて定数とみなして方程式を解くと、以下の式が得られる．

$$k + k_r = \frac{m\omega^2[X/X_0 - \cos(\phi - \gamma)]}{X/X_0 + 1/(X/X_0) - 2\cos(\phi - \gamma)} \quad (39)$$

$$c + c_r = \frac{m\omega \sin(\phi - \gamma)}{X/X_0 + 1/(X/X_0) - 2\cos(\phi - \gamma)} \quad (40)$$

これらの式において、ゴム膜のばね定数 k_r と減衰係数 c_r は、それぞれ式(37)と(38)によって計算される．こうして、図4に示された実験から振幅比 X/X_0 と位相角 $\phi - \gamma$ が測定されると、式(39)と(40)から空気ばねのばね定数 k と減衰係数 c が求められる．この実験における実験条件は表1に示されている．

Table 1 Experimental conditions

A_f	Area of load [cm ²]	45.0
d	Inner diameter of the circular tube [mm]	2.5, 4.0
h_a	Initial height of the main tank [mm]	23.5
L	Length of the circular tube [m]	0.25, 0.5, 1.0, 2.0
m	Mass of the supported body [kg]	4.0
p_0	Initial pressure in the tanks [kPa]	110 (absolute)
V_a	Initial volume of the main tank [mL]	136
V_b	Volume of the reservoir tank [mL]	261, 546, 1106
X_0	Input vibration amplitude [mm]	0.05, 0.1, 0.3, 0.6

4. 実験値と計算値の比較

4.1 円管の長さを変えた場合

図5は、図4に示された実験装置の振動実験で測定された (a) 振幅比, (b) 位相角, (c) ばね定数, および (d) 減衰係数を示している。ここで、実験条件は、 $d = 4.0 \text{ mm}$, $X_0 = 0.1 \text{ mm}$, $V_b = 546 \text{ mL}$, および $L = 0.5, 1.0, 2.0 \text{ m}$ である。図中の曲線は本論文で提案した式による計算結果である。全体として、実験値は計算値によく一致していることが分かる。一般に管の長さが長くなるほど、空気流動に対する管路抵抗は大きくなる。その結果、補助タンクへの空気の流入量が減少し、空気ばねの実質的な内容積が減少する。このことが空気ばね支持系の固有振動数の増加をもたらしている。図5(a)では、 $L = 2.0 \text{ m}$ において系の応答倍率が最大となる固有振動数 (2 次の共振振動数: 16 Hz) は $L = 0.5 \text{ m}$ における固有振動数 (1 次の共振振動数: 7 Hz) よりも大きくなっている。

Fig. 5 Comparison between experimental and theoretical values for various tube length ($d = 4.0 \text{ mm}$, $X_0 = 0.1 \text{ mm}$, $V_b = 546 \text{ mL}$)

4.2 加振振幅を変えた場合

図6は、4種類の加振振幅 ($X_0 = 0.05, 0.1, 0.3, 0.6 \text{ mm}$) に対する実験値と計算値を示している。実験結果は強い振幅依存性を持っているが、計算値にはほとんど振幅依存性がないことに注意されたい。これは線形理論に基づいて解析を行ったからである。この図において、計算値にはわずかな振幅依存性が認められるが、それはゴム膜のばね定数を式(37)のように非線形の式で表現したからである。入力振幅が大きくなると、実験値は計算値から離れていくことが分かる。このことは、入力振幅が大きくなると、理論解析において用いた仮定の一つ、あるいは複数の仮定が成立しなくなることを意味している。我々は、誤差をもたらしている仮定は、管内の流れが十分に発達した層流であると述べている仮定(3)であると考えている。一般に、レイノルズ数が大きくなると流れは層流から乱流へと遷移する。

円管内流れの乱流遷移については、以前から多くの研究者によって研究されてきた^{(16), (17)}。Zhaoら⁽¹²⁾の研究に

よると、円管内振動流の乱流遷移の条件は以下の実験式によって与えられる。

$$(A_o)_{cri} = \frac{761}{\sqrt{(Re_\omega)_{cri}}} \quad (41)$$

ここで $A_o = x_{max}/d$ は流体の無次元振幅であり (x_{max} は振動流の変位振幅で、 d は管の内径)、 $Re_\omega = \omega d^2/\nu$ は角振動数 ω の振動流のレイノルズ数である。式 (41) は両対数グラフでは図 7 に示すような直線で描かれる。3 種類の記号は Zhao らによる実験値であり、丸印は層流を、四角印は層流から乱流への遷移流を、そして三角印は乱流を表している。すなわち、この直線の上側は乱流領域、下側は層流領域となっている。我々の実験条件におけるレイノルズ数の計算値が、2 種類の入力振幅 (L は 1.0 m) に対して図 7 に描かれている。この図から、入力振幅が 0.6 mm のときには実験値の多くは乱流域に属し、入力振幅が 0.05 mm のときには層流域に属していることが分かる。このように、我々の導いた空気ばねの式 (35) と (36) の使用限界は式 (41) に照らし合わせてみて、おおよそ判定することができる。

Fig. 6 Comparison between experimental and theoretical values for various input amplitude ($d = 4.0$ mm, $L = 1.0$ m, $V_b = 546$ mL)

Fig. 7 Critical oscillation amplitude from laminar to turbulent flow for various Reynolds numbers Re_ω (Zhao et al.)

 Fig. 8 Vibration response of supported mass and fluid in the tube ($d = 4.0$ mm, $X_0 = 0.1$ mm, $V_b = 546$ mL)

Fig. 10 Pascal's principle

Fig. 9 A vibration model of the air spring

5. 空気ばね支持系に二つの共振点が見れる理由

図 8(a) は、空気ばね支持系において基礎に加えられた振動と上部質量に伝えられる振動の振幅比を実線で、基礎に対する管内流体の振動の振幅比を破線で示している。また図 8(b) は、基礎振動に対する上部質量と管内流体の振動の位相遅れを示している。これらの図から、系には二つの共振点があり、上部質量と気柱は同じ振動数で共振していることが分かる。このことは、この系が二つの質量から構成される 2 自由度の振動系であることを示唆している (図 9)。その質量の一つは上部の質量板であり、もう一つは管内の気柱の質量である。我々の実験装置では気柱の質量 ($L = 0.5$ m のときには約 8 mg) は板の質量 (約 4 kg) に比べて極めて小さい。ところが図 8(a) に示されるように、気柱の振動振幅は上部板の振動振幅に比べて約 1200 倍も大きい ($L = 0.5$ m の 2 次共振点において、上部質量の振幅比 $|x/x_0|$ は 1.15 であり、同じ 2 次共振における管内流体の振幅比 $|x_f/x_0|$ は 1400 である)。このことは、この気柱は、上部板と同じ振幅で振動している 9.6 g の質量が生み出すのと同じだけの力を発生していることを意味する。さらに、この力はパスカルの原理によって増幅して上部質量に伝えられる (図 10)。その増幅率は、管内断面積に対するピストンの受圧面積の比になる。我々の実験装置ではその面積比は 360 である。これより、上部板に伝達される力は、上部板と同じ振幅で振動している 3.5 kg の質量が発生する力に相当することが分かる。すなわち、わずか 8 mg の質量の気柱は、見掛け上 3.5 kg の質量のおもりと同じ効果を与えていることになる。

図 8(a) と図 8(b) を比較すると、上部板と気柱は 1 次共振点においては両方とも 90° の位相遅れがあり、2 次共振点においてはそれぞれ 90° と 270° の位相遅れをもっていることが分かる。これは 2 自由度振動系の典型的な特徴であり、ここでは主質量が上部板、副質量が気柱に相当する (すなわち、図 9(b) とは質量の位置関係が逆になっていることになる)。

6. 結 言

我々は二つの空気室の間に細管を有する空気ばねを解析し、空気ばねを設計するための近似式を導いた。この式の計算結果は、空気ばねによって支えられた物体の振動試験で測定された実験値と比較した。その結果、以下の知見が得られた。

- (1) 管内に含まれる空気の質量は非常に小さいが、ヘルムホルツ共鳴周波数において大きな慣性力を獲得する。この力はパスカルの原理によって物体に増幅して伝えられる。その結果、空気ばね支持系で支えられた見掛け上の 1 自由度振動系は、実質的に 2 自由度の振動系になる。
- (2) 空気ばねで支持された質量と気柱の質量は、正弦変位を受ける基礎板の運動から、系の 1 次の共振振動数においては両方とも 90° の位相遅れをもち、2 次共振点においてはそれぞれ 90° と 270° の位相遅れをもち、
- (3) 励振振幅が小さいときには、提案した式は実験値とよく一致することを確認した。
- (4) 提案した式は振動振幅が大きくなると実験値から離れていく。その理由は、管内流れが層流から乱流へと遷移するからであると考えられる。層流条件が満足されているかどうかを判定するために、Zhao らによって提案された実験式を用いることができる。

文 献

- (1) 時田保夫, 森村正直, 防振制御ハンドブック, 初版第 1 刷 (1992), pp. 413-420, 株式会社フジ・テクノシステム.
- (2) 國枝正春, “空気ばね車両の上下振動の理論と実験”, 鉄道技術研究報告, Vol. 3, No. 6 (1958), pp. 11-44.
- (3) 小田尚輝, 西村誠一, “空気ばね懸架の振動特性とその設計”, 日本機械学会論文集 (第 1 部), Vol. 35, No. 273 (1969), pp. 996-1002.
- (4) 小柳志郎, “空気ばね防振系の最適設計法”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 49, No. 439 (1983), pp. 410-415.
- (5) 小柳志郎, “空気ばね防振特性に対する非線形性の影響”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 52, No. 480 (1986), pp. 2084-2089.
- (6) 浅見敏彦, 横田泰孝, 伊勢智彦, 本田逸郎, 坂本博哉, “オリフィス付き空気ばねの非線形特性解析と実験による検証”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 77, No. 777 (2011), pp. 1674-1685.
- (7) 藤田壽憲, 奥村英彦, 山田忠治, 井上信昭, 遠藤慎二郎, 香川利春, “補助タンク付き空気ばねにおける接続管路のばね特性への影響”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 63, No. 610 (1997), pp. 1920-1926.
- (8) 高橋正人, 涌井伸二, “補助タンクを用いた除振台の高性能化”, 精密工学会誌, Vol. 75, No. 4, pp. 542-547, 2009.
- (9) Berg, M., “A Three-Dimensional Airspring Model with Friction and Orifice Damping”, *Vehicle System Dynamics*, Vol. 33, No. Supplement (2000), pp. 528-539.
- (10) Debra, D.B., “Design of laminar flow restrictors for damping pneumatic vibration isolators”, *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, Vol. 33, No. 1 (1984), pp. 351-356.
- (11) Bachrach, B.I., Rivin, E., “Analysis of a damped pneumatic spring”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 86, No. 2 (1983), pp. 191-197.
- (12) Zhao, T.S., Cheng, P., “Experimental studies on the onset of turbulence and frictional losses in an oscillatory turbulent pipe flow”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 17, No. 4 (1996), pp. 356-362.
- (13) Lee Jeung-hoon, Kim Kwang-joon, “Modeling of nonlinear complex stiffness of dual-chamber pneumatic spring for precision vibration isolations”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 301, No. 3-5 (2007), pp. 909-926.
- (14) Uchida Shigeo, “The Pulsating Viscous Flow Superposed on the Steady Laminar Motion of Incompressible Fluid in a Circular Pipe”, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 7, No. 5 (1956), pp. 403-422.
- (15) 浅見敏彦, 関口久美, “空気ダンパの基礎的研究 (第 1 報, 理論解析)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 56, No. 526 (1990), pp. 1400-1407.
- (16) 浅見敏彦, 関口久美, “空気ダンパの基礎的研究 (第 2 報, 理論解析の概要と実験的検討)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 56, No. 532 (1990), pp. 3201-3209.
- (17) 柴田耕一, 三坐地一人, 加藤英樹, “ゴムの振動特性に関する研究 (周波数及び変位振幅依存型の非線形振動特性)”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 59, No. 564 (1993), pp. 2408-2414.