不連続部を有する機械構造物のスペクトル要素モデリングの簡便化*

松村 雄一^{*1}, 岩本 久和^{*2}, 古屋 耕平^{*1}

Simplification of Spectral Element Modeling for Structure with Discontinuity

Yuichi MATSUMURA^{*1}, Hisakazu IWAMOTO and Kohei FURUYA^{*1} Department of Mechanical Systems Engineering, Gifu University
1-1 Yanagido, Gifu-shi, Gifu, 501-1193 Japan

This paper addresses a simplification method of wave propagation modeling for discontinuous structures by using experimentally identified or numerically computed reflection and transmission coefficients. In order to simplify the modeling of a discontinuous region of a waveguide, a modified spectral element method, which includes reflection and transmission coefficients in the spectral elements, was derived. Spectral elements except for discontinuity region may be theoretically modeled by the elementary theory of a continuous system. Whereas, spectral elements for discontinuity region are calculated by the proposed method using experimentally identified or numerically computed reflection and transmission coefficients. Wave analysis by the modified spectral element method was performed to show the validity of the modeling. The behavior of resultant waves showed good agreement with the frequency characteristic of reflection and transmission coefficients.

Key Words : Wave Analysis, Numerical Analysis, Spectral Element Method, Vibration of Continuous System, Reflection, Transmission, Statistical Energy Analysis

1. 結 言

機械の振動解析には、有限要素モデルが多用されている。しかしながら、有限要素法を用いて、波長が短くなる高周波の振動や波動を正確に解析しようとした場合、補間誤差と数値分散誤差による精度上の制約のため、周波数の増大と共に必要な要素数が急増するという課題がある⁽¹⁾。この解決策として、形状関数に正弦波状の関数を用いる動剛性法がある。動剛性法においては、連続体の運動方程式に基づいた厳密動剛性行列が用いられる。厳密動剛性行列は、単一周波数に対する厳密な形状関数を用いて導出される。一方、時間領域で定式化された運動方程式の解法として、周波数領域での解法がある。その一つであるスペクトル解析法では、フーリエ変換を用いることで運動方程式の解を正弦波の重ねあわせとして扱う。スペクトル解析法を用いて単一周波数成分に解を分解できれば、各周波数成分に対して動剛性行列を利用できる。そこで、スペクトル解析法と動剛性法を組み合わせた手法としてスペクトル要素法が提案された^{(2)・(4)}。スペクトル要素は解析周波数ごとの厳密動剛性行列の集合と見なせ、有限要素法と同様にメッシングとアセンブリが行える。また、減衰効果をもたらす throw-off 要素(半無限長要素)や数値ラプラス変換⁽⁵⁾と組み合わせることで、実際の過渡応答解析^{(6)・(8)}や、パワーフローの計算⁽⁹⁾、SEA における結合損失係数の推定⁽¹⁰⁾などが可能である。

スペクトル要素法の課題は、構造が複雑で解析解が得られないような不連続部を有する導波体を解析できないことにある。本論では、不連続部における波動伝播の実験データや、不連続部の有限要素モデルを利用した反射係数、透過係数の同定結果をそのままスペクトル要素法の計算に組み込めるように工夫する。これにより、スペクトル要素法を利用した上記の過渡応答解析^{(6)・(8)}やパワーフローの計算⁽⁹⁾などにおいて、従来よりも広範囲の対

* 原稿受付 2012 年 9 月 5 日

^{*1} 正員, 岐阜大学 工学部 機械システム工学科 (〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸 1-1)^{*2} 正員, 元 山梨大学 大学院 医学工学総合教育部 機械システム工学専攻 (現 黒崎播磨 (株))
E-mail: y_matsu@gifu-u.ac.jp

象を選択できるようになる。また、波動の伝播、反射、透過という基礎的な物理を可視化し、その本質を理解した上での振動解析が行える。本論では、特に棒の粗密波伝播を対象とする。

2. スペクトル要素法

波動伝播解析の手法として Doyle^{(2),(3)}により提案されたスペクトル要素法の概要を述べる。本解析法では、はじめに加振力を離散フーリエ変換し、スペクトル要素と呼ばれる周波数依存の動剛性行列に対して、この加振力を周波数領域で掛け合わせることで、周波数領域での変位応答を得る。この変位応答を離散フーリエ逆変換することで時間応答を得る。このように、スペクトル要素法は離散フーリエ変換・逆変換を用いた時間応答解析であり、逐次積分による過渡応答解析と比べて計算量ははるかに少ないという特徴を有する。

スペクトル要素は、連続体の運動方程式と、その運動方程式によって仮定される変位の一般解と、この運動方程式から求まる波数を用いて導出される。スペクトル要素は節点変位と節点力の関係を表す動剛性行列として定義されることから、要素の結合や境界条件の適用などを従来の動剛性行列と同様に行え、有限要素による動剛性行列との結合も可能である。

スペクトル要素法は離散フーリエ変換を用いるため、その計算に際して漏れ誤差の影響を考慮する必要がある。そこで、時間領域の終端において加振力と応答がほぼ0になるように、減衰と見なせる要素を導入する。一般的なスペクトル要素法^{(2)・(4),(7)}では、フーリエ変換での周期性を保証するため、構造の一部に throw-off 要素 (半無限長要素) を結合して波動を減衰させるが、本論では、有限長のモデルを解析することを考慮して、Igawa ら⁽⁶⁾と同様に、数値ラプラス変換を用いて漏れ誤差を低減することにする。

2・1 数値ラプラス変換

本論で用いた数値ラプラス変換⁽⁵⁾について簡単にまとめる。数値ラプラス変換と数値ラプラス逆変換は、 $t < 0$ で $f(t) = 0$ である関数 $f(t)$ に対して、それぞれ次の2式によって近似的に計算できる。

$$\hat{F}(\omega) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) e^{-\sigma n\Delta t} e^{-j\omega n\Delta t} \quad (1)$$

$$\hat{f}(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \Delta \omega \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} F(n\Delta \omega) e^{jn\Delta \omega t} \quad (2)$$

ここに、 σ は正の定数、 j は虚数単位、 ω は角周波数である。 σ は減衰量のパラメータと見なせ、解析時間の長さ T を用いて経験的に $\sigma > 5/T$ で与えられる。式 (1) の数値ラプラス変換は、時間関数に対して減少する指数窓を掛けた上で離散フーリエ変換することに相当する。これは、漏れ誤差を低減する窓関数と同じ働きをする。また、式 (2) の数値ラプラス逆変換は、離散フーリエ逆変換後に増大する指数窓を掛けることに相当する。これは、漏れ誤差を低減するために減少させた値を復元する作用と見なせる。

2・2 棒のスペクトル要素

棒の縦振動の初等理論を例に、スペクトル要素の導出の概要を述べる。スペクトル要素は連続体の運動方程式に基づいて導出される。運動方程式は、断面内の粒子は軸方向に一樣な運動をすると仮定し、ポアソン比を考慮せずに求めた。一樣断面、一樣材質な棒であると仮定すれば、運動方程式は次式である。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{EA}{\rho A} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

ここに、 E は縦弾性係数、 A は断面積、 ρ は体積質量密度であり、 u は変位である。本式の変位 u の一般解は、変数分離形の次式で表せるとしてよい。

$$u(x, t) = (\alpha(\omega) e^{-jkx} + \beta(\omega) e^{jkx}) e^{j\omega t} \quad (4)$$

ここに、 $\alpha(\omega)$ は x 軸の正の方向へ進む角周波数 ω の波 (以下、前進波) の変位振幅であり、 $\beta(\omega)$ は x 軸の負の方向へ進む角周波数 ω の波 (以下、後退波) の変位振幅である。また、 j は虚数単位、 k は波数である。こ

のとき、軸力 f は次式の内力分布で表せる。

$$f(x,t) = EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = jkEA(-\alpha e^{-jkx} + \beta e^{jkx})e^{j\omega t} \quad (5)$$

スペクトル要素の求め方を示す。スペクトル要素と呼ばれる周波数依存の行列 $[S(\omega)]$ は、節点力 $[f(\omega)]$ と節点変位 $[d(\omega)]$ の関係を表す。棒に対しては基本的に要素両端に2つの節点を設けるため、次式の関係がある。

$$\begin{bmatrix} f_1(\omega) \\ f_2(\omega) \end{bmatrix} = [S(\omega)] \begin{bmatrix} d_1(\omega) \\ d_2(\omega) \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここに、添字1, 2はそれぞれ節点1, 2に関係することを表す。位置 $x=0$ に節点1、位置 $x=L$ に節点2があるとすれば、節点変位と節点力はそれぞれ式(4), (5)から求まるので、スペクトル要素は次式となる。

$$[S(\omega)] = jkEA \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -e^{-jkL} & e^{jkL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-jkL} & e^{jkL} \end{bmatrix}^{-1} \quad (7)$$

また、節点変位 d_1, d_2 から、節点間の任意の位置での変位振幅を求めるための形状関数 $[N]$ は、式(4)を参考にして、次式で表せる。

$$[N(\omega, x)] = \begin{bmatrix} e^{-jkx} & e^{jkx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-jkL} & e^{jkL} \end{bmatrix}^{-1} \quad (8)$$

スペクトル要素 $[S]$ や、形状関数 $[N]$ の式中にある逆行列計算は特異になりやすく、数値的に求めることは難しい。そこで、以降の計算では、数式処理ソフトウェアによって計算式を求めた後、数値を代入する。

3. 反射・透過係数を含むスペクトル要素の導出

不連続部を有する機械構造物の波動伝播モデリングの簡便化の手段として、不連続部を含む運動方程式を導出する代わりに不連続部を反射係数、透過係数で置き換えたスペクトル要素を用いる手法を導出する。反射係数・透過係数は、実験による同定で求めておいたり、有限要素モデルから求めておいたりするものと仮定する⁽¹¹⁾。

3・1 反射係数だけを含むスペクトル要素

棒の端部における不連続性を反射係数として取り込み、波動解析を可能にするためのスペクトル要素を導出する。図1に示すように、右端の不連続部から長さ L の均質な導波路を有するような棒のスペクトル要素を導く。棒の左端にのみ節点変位 d_1 をとり、この節点変位から、形状関数によって棒上の任意の位置での応答変位を算出できるとする。まず、棒の右端($x=L$)での反射係数は次式で表せる。

$$R_L = \frac{\beta}{\alpha} \quad (9)$$

この反射係数 R_L を用いて、式(4)の変位振幅 $U(x)$ を整理すると、次式の通りとなる。

$$U(x) = \alpha(e^{-jkx} + R_L e^{jkx}) \quad (10)$$

本式は、スペクトル要素法の計算における未知量が α だけに限定されることで、式(6)を次式のようなスカラー量の関係式にした場合でもスペクトル要素が計算できることを示す。

$$[f_1(\omega)] = [S(\omega)][d_1(\omega)] \quad (11)$$

本式より、反射係数を含んだ棒のスペクトル要素 $[S]$ と、その形状関数 $[N]$ はそれぞれ次式のように求められる。

$$[S] = jkEA \frac{1-R_L}{1+R_L} \quad (12)$$

$$[N] = \frac{e^{-jkx} + R_L e^{jkx}}{1+R_L} \quad (13)$$

Fig.1 Rod with anisotropic end

3・2 反射係数と透過係数の両方を含むスペクトル要素

棒の中間部における不連続性を反射係数と透過係数で表現したスペクトル要素を導出する．図2に示すように、長さ L の均質な導波路の途中 $x=l$ の位置に不連続部を有するような棒のスペクトル要素を導く．図2(a)は左端から波動が入射する場合、図2(b)は右端から波動が入射する場合の波動振幅の定義を示す．棒の左端と右端にそれぞれ節点変位 d_1, d_2 をとり、これらの節点変位から、形状関数によって棒上の任意の位置での応答変位を算出できるとする．まず、不連続部での反射係数と透過係数は入射波の方向によって、それぞれ次のように表せる．

$$R_1 = \frac{\beta_r}{\alpha_i}, \quad R_2 = \frac{\alpha_r}{\beta_i}, \quad T_1 = \frac{\alpha_t}{\alpha_i}, \quad T_2 = \frac{\beta_t}{\beta_i} \quad (14)$$

両端から波動が入射する場合の位置 x での変位振幅 $U(x)$ は、反射係数と透過係数を用いて次のように表せる．

$$U(x) = \begin{cases} \alpha_i (e^{-jkx} + R_1 e^{jkx}) + \beta_i T_2 e^{jkx} & (0 \leq x \leq l) \\ \alpha_i T_1 e^{-jkx} + \beta_i (R_2 e^{-jkx} + e^{jkx}) & (l \leq x \leq L) \end{cases} \quad (15)$$

前節と同様に、本式は、両節点の変位と内力の関係式(6)を用いてスペクトル要素が計算できることを示す．以上より、反射係数と透過係数を含んだ棒のスペクトル要素 $[S]$ と、その形状関数 $[N]$ は次式のように求められる．

$$[S] = \frac{jkEA}{\Delta} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix} \quad (16)$$

ここに、 $\lambda = e^{2jkl}$ 、 $\xi = e^{jkx}$ 、 $\Lambda = e^{jkl}$ とおき、以下のような省略表記を用いた．

$$\Delta = \lambda(\Lambda^2 - 1) + R_1 \lambda(\Lambda^2 - \lambda) + R_2(\lambda - 1) \quad (17)$$

$$s_1 = \lambda(\Lambda^2 + 1) + R_1 \lambda(\lambda - \Lambda^2) + R_2(\lambda + 1) \quad (18)$$

$$s_2 = -2\Lambda(R_2 + \lambda) \quad (19)$$

$$s_3 = -2\lambda\Lambda(R_1 \lambda + 1) \quad (20)$$

$$s_4 = \lambda(\Lambda^2 + 1) + R_1 \lambda(\lambda + \Lambda^2) + R_2(1 - \lambda) \quad (21)$$

また、形状関数 $[N]$ は次式で表現できる．

$$[N] = \frac{1}{\xi\Delta} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

本式の n_1 と n_2 は領域によって式が異なる．

$$n_1 = \begin{cases} \lambda(\Lambda^2 - \xi^2) + R_1 \lambda \xi^2(\Lambda^2 - \lambda) + R_2(\lambda - \xi^2) & (0 \leq x \leq l) \\ \lambda(\Lambda^2 - \xi^2)(R_1 \lambda + 1) & (l \leq x \leq L) \end{cases} \quad (23)$$

$$n_2 = \begin{cases} \lambda(\Lambda^2 - \xi^2) + R_1 \lambda \xi^2 (\Lambda^2 - \lambda) + R_2 (\lambda - \xi^2) & (0 \leq x \leq l) \\ \lambda \Lambda (\xi^2 - 1) + R_1 \lambda \Lambda (\xi^2 - \lambda) + R_2 \Lambda (\lambda - 1) & (l \leq x \leq L) \end{cases} \quad (24)$$

Fig. 2 Rod with anisotropic region

4. 波動解析への適用例

導出した要素の妥当性を確認するために、導出した反射係数要素および反射係数・透過係数要素による解析例を示す。この例においては、反射係数・透過係数が理論的に求まるような系を対象とした。この解析結果を、物理的に予測される挙動、および有限要素解析で求めた過渡応答解析の結果などと比較し、その妥当性を示す。

4・1 ばね端における反射係数要素

反射係数だけを含むスペクトル要素を用いて過渡応答解析を行い、導出した要素の妥当性の検証を行う。図 3 に示すように、右端にばね定数 κ のばねを持つ棒の縦波を解析する。はじめに、ばねの取り付け位置を $x=0$ として右端での反射係数 R_0 を導出する。ばね部における力のつり合い式は次式となる。

$$jkEA(-\alpha + \beta) = -\kappa(\alpha + \beta) \quad (25)$$

従って、反射係数は次式である。

$$R_0(\omega) = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{jkEA - \kappa}{jkEA + \kappa} \quad (26)$$

本式の反射係数の絶対値と位相角を、周波数軸で表現すると図 4 に示す周波数特性を得る。ここに、縦弾性係数 $E=206\text{GPa}$ 、体積質量密度 $\rho=7.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、断面積 $A=0.01 \times 0.01 \text{ m}^2$ とした。このとき 10 kHz まではポアソン比による横方向の運動の影響を十分無視できる範囲であり、縦振動の初等理論を適用できるとした。図 4 より、いずれのばね定数 κ においても任意の周波数で大きさは 1 (0 dB) である。また、位相は $\kappa \rightarrow 0$ で 0° 、すなわち自由端反射に近づき、 $\kappa \rightarrow \infty$ で 180° 、すなわち固定端反射に近づき、その中間のばね定数では、周波数依存性もち

Fig. 3 Rod with spring end

ながら、低周波では固定端反射、高周波では自由端反射に近づくことがわかる。これは、ばね定数が一定であっても、波数 k が周波数に依存することに起因する。

図 5 に示すような右端にばね端を有するモデルの過渡応答解析を行う。棒の長さは $L=10\text{m}$ とした。このモデルの右端での反射係数は図 4 の通りである。左端を加振端とし、加振力としては、図 6 に示すインパルス状の力を加えた。0.50ms を中心とした 0.40ms から 0.60ms までの三角波状の加振力を発生させ、擬似的なインパルス加振とした。スペクトル要素法の解析条件は、サンプリング周波数を 20kHz、サンプル数を 256 点とした。このとき、解析時間は $T=12.8\text{ms}$ となる。この解析時間 T より、数値ラプラス変換においては $\sigma=5/0.0128$ とした。

スペクトル要素法による解析で節点変位を求めた結果を図 7(a) に示す。本図において約 4 ms 間隔で節点変位が変化する理由は以下の通りと考えられる。まず、この解析例における疎密波の伝播速度は約 5120 m/s である。従って、反射波が節点を出てばね端に到達した後、再び節点に戻るまでの伝播距離は棒の長さ L の 2 倍である 20 m であるので、節点を出た伝播波は約 4 ms 後に反射波となって節点に到達する。これより、解析結果における疎密波の伝播速度は正しいと考えられる。また、棒の縦波の初等理論においては、すべての周波数において伝播速度が等しく、分散性を持たないので、インパルス入力に対して節点は階段状に変位する。 $\kappa=0$ においては、ばね端の反射係数が自由端反射になり、棒全体としては両端自由になるため、両端部での疎密波の位相変化はなく、棒の両端の間で伝播を繰り返す。このとき、節点は徐々に x 軸の正方向に移動していく。また、 $\kappa=1000EA/L$ においては固定端反射に近づき、ばね端部で位相が 180° 変化しながら反射する様子がわかる。 $\kappa=5EA/L$ においては、低周波成分は固定端反射、高周波成分は自由端反射している様子がわかる。低周波成分と高周波成分に位相差が生じるため、立ち上がりとしち下がりに変化が現れる。

また、スペクトル要素法による解析結果の妥当性を示すため、同じ系を対象にして有限要素モデルによる過渡応答解析も行った。はり要素を用い、要素数は 250 として、図 6 に示した加振力に対する過渡応答解析を行った。解析は、商用の有限要素解析ソフトウェア NASTRAN 上で実施した。要素数 250 よりも少ない要素分割で解析した場合、インパルス加振力の高周波成分による応答を解析しきれず、明らかに大きな誤差が発生したため、要素数はスペクトル要素法のモデルの 250 倍に定めた。また、サンプリング周波数は 10MHz とした。これよりも粗いサンプリング周波数では、インパルス加振力の高周波成分による応答を解析しきれなかったことから、スペクトル要素法のサンプリング周期の 500 分の 1 に定めた。この有限要素法による過渡応答解析の結果を図 7(b) に示す。また、図 7(a) および図 7(b) の比較のため、12.2 ms 以降の解析結果を拡大して、それぞれ図 8(a), (b) に示す。図 7(a), (b) の比較より、スペクトル要素法と有限要素モデルの過渡応答解析の結果はほぼ同じである。ただし、図 8(b) に着目すると、図 8(a) に示すスペクトル要素法に比べ、有限要素モデルの過渡応答解析では、波動の反射

Fig. 4 Reflection coefficients at the spring end

Fig. 5 Analysis model of a rod with spring end

時に挙動が波打つ現象が確認できる。これは、数値積分が発散しかけている様子を表している。上記の通り、モデルの要素数を少なくしたり、数値積分の時間間隔を粗くしていくと、この波打つ度合いが大きくなり、やがて数値積分が発散した。以上より、反射係数をスペクトル要素に組み込んだ提案法でもスペクトル要素法の計算が正しく実施できること、有限要素モデルの過渡応答解析に比べて、小さいモデルでも高精度に解析できることの二点が確認された。

Fig.6 Excitation force

(a) Spectral element method (number of elements: 1, sampling interval: 5×10^{-5} s) (b) Finite element method (number of elements: 250, sampling interval: 1×10^{-7} s)

Fig. 7 Nodal response of the analysis model of the rod with spring end

Fig. 8 Enlarged partial detail of nodal responses shown in Figure 7

4・2 中央にばねを付加した棒の反射係数・透過係数要素

反射係数と透過係数の両方を含むスペクトル要素を用いて過渡応答解析を行い、導出した要素の妥当性の検証を行う。図 9 に示すように、棒の中央にばね定数 κ のばねを持つ棒の縦波を解析する。まず、ばね部における反射係数、透過係数を理論から求める。ばね部における変位の連続式と力のつり合い式を解いて、それぞれ次式のように得られる。

$$R_0(\omega) = -\frac{\kappa}{2jkEA + \kappa} \quad (27)$$

$$T_0(\omega) = \frac{2jkEA}{2jkEA + \kappa} \quad (28)$$

得られた反射係数と透過係数の周波数特性を図 4 と同様の描き方で表した図を図 10 に示す。縦弾性係数 $E = 206$ GPa, 体積質量密度 $\rho = 7.86 \times 10^3$ kg/m³, 断面積 $A = 0.01 \times 0.01$ m² とした。ばね定数は $\kappa = 20EA/L$ である。図 10 から、このばね定数に対しては、ばね部は 0Hz 付近の低周波成分をほとんど透過せず、固定端と見なせる一方で、高周波の波動ほど透過しやすいことがわかる。

ばね定数を変化させたときの反射係数・透過係数を用いて図 11 のモデルの解析を行う。ばね定数 κ を 0, $20EA/L$, $1000EA/L$ の 3 パターンで解析した。棒の長さ $L = 10$ m, 左端からばね部までの距離 $l = 5$ m とした。解析条件は、サンプリング周波数 20kHz, サンプル数 256 点とし、解析時間を $T = 12.8$ ms とした。数値ラプラス変換では、 $\sigma = 5 / 0.0128$ とした。図 6 に示したインパルス状の加振力を与えた場合の左端の節点変位を図 12 に示す。 $\kappa = 0$ の場合、棒全体が均質であるとみなせるので反射係数が 0 であり、入射波は棒の長さ L の往復分だけ伝播して節点に戻る。一方、ばね定数が $\kappa = 1000EA/L$ と十分に大きい場合には、ばね部は固定端と見なせるので、左端の節点を出た波動は、ばね部ですべて反射され、棒の長さの半分の距離往復分だけ伝播して節点に戻る。このことは、 $\kappa = 0$ の場合と $\kappa = 1000EA/L$ の場合の節点変位において、 $\kappa = 1000EA/L$ の方が半分の時間で疎密波が戻ってきていることから確認できる。図 10 に示した周波数特性を持つ $\kappa = 20EA/L$ の場合は、低周波成分がばね部で反射して早く左側節点に戻り、高周波成分は右側の固定端で反射するため倍の時間を掛けて戻ってくる様子がわかる。ここに、考察の便宜上、低周波成分として反射波の位相角が 180° 付近である 0kHz 近傍の成分を考え、高周波成分として透過波の位相角が 0° 近辺である 2kHz 付近以上の周波数成分を考えた。以下の段落の考察でも、同様の定義に従って低周波成分、高周波成分と大別することで、解析結果の挙動を理解することとする。

図 13 に、図 12 の $\kappa = 20EA/L$ の場合の挙動を理解するため、高周波成分と低周波成分の波動伝播の様子を整理した。図中の時刻 t は、図 12 の横軸に示した時刻と一致させた。図 6 に示した疑似インパルス加振の入力から 1ms 後に相当する $t = 1.5$ ms において、ばね部に波動が到達する。 $t = 2.5$ ms では、ばね部で反射した低周波成分が左端に戻る一方で、高周波成分はばね部を透過して右端の固定端に到達する。 $t = 3.5$ ms では、低周波成分が左から、高周波成分が右からと方向は異なるものの、ばね部に同時に到達する。次の瞬間、低周波成分は再びばね部で反射して左端に向かい、高周波成分はばね部を透過して左端に向かうので、 $t = 4.5$ ms では左端の節点に低周波成分と高周波成分が同時に戻る。

この状況は、図 12 に示した左端の節点変位の $t = 4.5$ ms までの挙動で確認される。低周波成分は、左端の自由端とばね部の見なし固定端の間で往來を繰り返し、見なし固定端であるばね部では位相が 180° 変化することから、2ms ごとに節点変位が正負に切り替わる。一方、高周波成分は、左端の自由端と右端の固定端の間で往來し、右端の固定端では位相が 180° 変化することから、 $t = 4.5$ ms の時点で、負の変位を有して左端の節点に到達する。その結果、図 12 では $t = 4.5$ ms の時点で高周波のヒゲが確認される。以上の理解は、図 10 に示した反射係数と透過係数の周波数特性から予測される通りの挙動であり、提案する手法の妥当性が確認できた。

Fig. 9 A rod with spring discontinuity

Fig. 10 Reflection and transmission coefficients at the spring discontinuity

Fig. 11 Analysis model of a rod with spring discontinuity

Fig. 12 Nodal response of the analysis model of the rod with spring discontinuity

Fig. 13 Spatial phase relation between low and high frequency components

5. 結 論

棒の疎密波の波動伝播解析において、導波路中に存在する不連続部の理論的な解析が困難な場合であっても、実験同定や有限要素モデルから得た反射係数・透過係数を用いてスペクトル要素法による解析を行うための手法を示した。得られた知見を以下にまとめる。

(1) 棒の端部における反射係数を含んだスペクトル要素と、棒の中間部における反射係数・透過係数を含んだスペクトル要素をそれぞれ導出した。

(2) 導出したスペクトル要素を用いてインパルス加振に対する過渡応答解析を実施し、物理的に予想される挙動や、有限要素モデルの過渡応答解析結果と比較することでその妥当性を示した。

(3) インパルス加振力に対する衝撃応答のような高周波成分を多く含む解析においては、有限要素モデルを過渡応答解析するよりもはるかに少ない要素数で、非常に粗いサンプリング間隔で解析しても、スペクトル要素法では高精度に挙動を解析できることを確認した。

謝 辞

本研究は JSPS 科研費 22560219 の助成を受けたものです。ここに記して謝意を表します。

文 献

- (1) 高橋孝, 村上桂一, 青山剛史, 相曾秀昭, “音響振動解析のための数値計算法に関する研究”, 宇宙航空研究開発機構研究開発報告, JAXA-RR-07-012 (2008).
- (2) Doyle, J. F., *Wave Propagation in Structures: An FFT-based Spectral Analysis Methodology* (1989), p.258, Springer Verlag, New York.
- (3) Doyle, J. F., *Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms* (1997), p.320, Springer Verlag, New York.
- (4) Lee, U., *Spectral Element Method in Structural Dynamics* (2009), p.454, John Wiley and Sons, Asia.
- (5) 井上裕嗣, 上林稔, 岸本喜久雄, 渋谷寿一, 小泉堯, “高速フーリエ変換を利用した数値ラプラス変換・逆変換”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 57, No. 542 (1991), pp.2523-2528.
- (6) Igawa, H., Komatsu, K., Yamaguchi, I. and Kasai, T., “Wave Propagation Analysis of Frame Structures Using the Spectral Element Method”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 277 (2004), pp.1071-1081.
- (7) 西田明美, 半谷祐彦, “空間構造物の波動伝播特性に関する研究—単層ラチスドームの衝撃応答解析—”, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 474 (1995), pp.117-126.
- (8) Nishida, A., “Wave Propagation Properties of Frame Structures: Formulation for Three-Dimensional Frame Structures”, *JSME International Journal, Series B, Fluids and Thermal Engineering*, Vol. 49, No. 2 (2006), pp.360-367.
- (9) Ahmida, K. M., Roberto, J. and Arruda, J. R. F., “Spectral Element-Based Prediction of Active Power Flow in Timoshenko Beams”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38 (2001), pp.1669-1679.
- (10) Ahmida, K. M. and Arruda, J. R. F., “Estimation of the SEA Coupling Loss Factors by Means of Spectral Element Modeling”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 25, No. 3 (2003), pp.259 -263.
- (11) Zhang, B., “Joint Identification in Structural Waveguides Using Wave Reflection and Transmission Coefficients”, Doctoral Thesis (2006), University of Southampton.