レベルセット法による形状表現を用いた音響メタマテリアルの トポロジー最適化*

乙守 正樹^{*1}, 陸 麗蓉^{*2}, 山田 崇恭^{*1}
山本 崇史^{*3}, 泉井 一浩^{*1}, 西脇 眞二^{*4}

Topology Optimization for the Design of Acoustic Metamaterials Using Level Set-Based Boundary Expressions

Masaki OTOMORI^{*1}, Lirong LU, Takayuki YAMADA
Takashi YAMAMOTO, Kazuhiro IZUI and Shinji NISHIWAKI

^{*1} Department of Mechanical Engineering and Science, Graduate School of Engineering, Kyoto University
Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, Kyoto, 606-8501, JAPAN

This paper discusses a level set-based topology optimization method for the design of negative bulk modulus acoustic metamaterials. Acoustic metamaterials are engineered materials that are designed to have extraordinary acoustic properties, such as a negative effective bulk modulus and effective density. Novel applications such as sound isolation devices, acoustic cloaking, acoustic superlenses, and others have been proposed using such acoustic metamaterials. Most metamaterials consist of periodic structures of unit cells that are adequately small compared to the wavelength of target frequency. The overall structure of such periodic structures can be considered as an effectively homogeneous acoustic structure, and behaves as a material having negative effective properties exhibited globally. The purpose of the optimization problem here is to find optimized configurations of acoustic metamaterials composed of rubber and epoxy that achieve a negative effective bulk modulus. In the design of acoustic metamaterials, the presence of grayscale areas in an optimal configuration significantly affects its performance, so we use a level set-based approach that inherently avoids the grayscale problem. The effective bulk modulus of the acoustic metamaterials is computed based on the reflection and transmission coefficients and the optimization problem is formulated to minimize the effective bulk modulus. Optimization algorithm uses the adjoint variable method (AVM) for sensitivity analysis and the finite element method (FEM) for solving the acoustic wave propagation problem, the adjoint problem, and the reaction diffusion equation to update the level set function. Finally, several numerical examples are provided to confirm the utility and validity of the proposed method.

Key Words : Acoustic Metamaterials, Effective Bulk Modulus, Optimal Design, Topology Optimization, Level Set Method, Sensitivity Analysis, Adjoint Variable Method, Structural Design, Finite Element Method

1. 緒 言

音響メタマテリアルとは自然界に存在する物質が通常示さないような音響的性質を示すように設計された人工媒質であり、代表的な音響メタマテリアルとして、負の体積弾性率や負の質量密度を示す媒質がある。メタマテリアルという概念は、初めに電磁気分野において提唱され⁽¹⁾, 分割リングと金属ワイヤからなる周期構造が特定の周波数で、負の屈折率を持つことが実証されて以来^{(2)~(4)}, 高周波化⁽⁵⁾や、電磁クロッキング装置⁽⁶⁾, スーパーレンズ⁽⁷⁾等、電磁メタマテリアルの応用に関する研究が報告されている。一方、音響メタマテリアルは、Liu ら⁽⁹⁾によ

* 原稿受付 2013 年 1 月 31 日

^{*1} 正員, 京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻 (〒606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

^{*2} 京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻

^{*3} 正員, 工学院大学工学部機械工学科 (〒192-0015 東京都八王子市中野町 2665 番地 1 号)

^{*4} 正員, フェロー, 京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻

E-mail: otomori.masaki@gmail.com

り、シリコンゴムで被覆した鉛球をエポキシ樹脂内に周期的に配置した構造が負の体積弾性率を持つことを実験的に示されて以来、負の体積弾性率⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾、負の質量密度⁽¹²⁾⁽¹³⁾、負の屈折率、すなわち、負の体積弾性率と負の質量密度を同時に示す構造^{(14)~(16)}がいくつか提案されている。これらの音響メタマテリアルの応用に関して、音響クロッキング装置^{(17)~(19)}やアコースティックスーパーレンズ⁽²⁰⁾⁽²¹⁾などの従来の媒質では実現できなかった新しい機器の実現が期待されている。

通常、メタマテリアルは対象とする波長と比べ十分に小さいユニットセルを周期的に配置した構造からなり、その周期構造の集合体は、巨視的には、連続的な媒質とみなすことができ全体として負の特性などを示す媒質として振る舞う。メタマテリアルの特性は、ユニットセルの形状や大きさにより大きく左右されるため、所望の特性を得るためには、ユニットセルの形状を適切に設計する必要がある。現在までに、様々なユニットセルの形状が提案されているが、その形状設計は多くの場合、設計者の勘や経験に基づいた試行錯誤に基づいており、構造設計に多大な時間が費やされることも多く、また必ずしも所望の特性が得られるとは限らない。

これらの課題を解決し、数学的および力学的な根拠に基づき統一的な設計を行う方法として構造最適化手法の適用が考えられる。構造最適化手法は数値モデルと最適化手法に基づき、最適な構造を求める手法である。その中でも、トポロジー最適化⁽²²⁾⁽²³⁾は、最も設計自由度が高い手法で、構造の外形形状だけでなく穴の数などの形態の変更も可能な方法である。トポロジー最適化は現在までに、剛性最大化問題⁽²²⁾や電磁波伝搬問題⁽²⁴⁾、音響問題⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾など様々な設計問題に適用され、近年では、電磁メタマテリアルの設計問題にも適用されている^{(27)~(29)}。トポロジー最適化の基本的な考え方は、構造最適化問題において、固定設計領域と特性関数を導入し、指定した設計領域内における材料分布問題へ置き換えることにある。従来の方法では、0 から 1 までの値をとる連続した密度を用いて最適な材料分布、すなわち最適構造を表現するため、その密度が中間値をとる、いわゆるグレースケールを許容することになる。しかし、グレースケールで構成される構造は、数学的および物理的な解釈は可能であるものの、実際には製造が困難であるため、工学的には意味を持たない構造と言える。そのためフィルタに基づく方法^{(30)~(32)}などでグレースケールを除去する方法が提案されているものの、最適化の過程ではグレースケールを許容しているため、音響メタマテリアル設計問題など、目的とする性能がグレースケールにより大きく影響される問題においては、それらの方法を用いても、性能を確保しながらグレースケールを除去した設計を行うことは難しい。

一方、グレースケールの問題を抜本的に解決可能な方法として、レベルセット法による形状表現に基づくトポロジー最適設計手法が提案されている。この方法では、レベルセット関数と呼ばれるスカラー関数のゼロ等位面により物体の外形形状を陰的に表現するため、上述のグレースケールを本質的に除去することができる。山田らは、区分的に一定値となるレベルセット関数を用いて、チコノフ正則化法により最適化問題の正則化を行い、反応拡散方程式を解く問題へ置き換える方法を提案している⁽³³⁾。この方法では、穴の数が増加するような形態の変更が可能であり、さらには正則化の度合いを設定することにより、最適構造の複雑さを定性的に設定することが可能である。

本研究では、レベルセット法に基づくトポロジー最適化手法を用いて、明確な形状表現が可能な音響メタマテリアルの最適設計手法を構築する。すなわち、山田ら⁽³³⁾の方法に基づき、負の体積弾性率を実現する音響メタマテリアルの最適設計手法を構築する。音響メタマテリアルの均質的な音響特性を求める方法として、電磁メタマテリアルにおいて電磁気特性を求める手法の一つである S 行列に基づく方法⁽³⁴⁾を拡張した、透過係数と反射係数から求める方法⁽³⁵⁾を用いて体積弾性率を求める。以下、2 章では音響メタマテリアルの最適設計問題の定式化、およびレベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化手法の概略について述べる。3 章では、前章の定式化に基づき音響解析とレベルセット関数の更新に有限要素法を用いた数値実装法を提案する。最後に、本報で提案する手法を、音響メタマテリアルの最適設計問題に適用し、その妥当性と有効性を検証する。

2. 定 式 化

2-1 レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化

ここでは、レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化⁽³³⁾について簡単に説明する。レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化では、図 1 に示すように、固定設計領域 D 内の物体領域 Ω と境界 $\partial\Omega$ および空洞領域 $D \setminus \Omega$ を、次式に示すようにレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ を用いて陰的に表現する。

Fig. 1 Fixed design domain D and level set function ϕ

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (1)$$

次に、式 (1) のレベルセット関数による形状表現を用いると、構造最適化問題は、以下のように記述される。

$$\begin{aligned} \inf_{\phi} \quad & F(\chi_{\Omega}(\phi)) = \int_D f(\mathbf{x}) \chi_{\Omega}(\phi) d\Omega \\ \text{subject to} \quad & G(\chi_{\Omega}(\phi)) = \int_D \chi_{\Omega}(\phi) d\Omega - V_{\max} \leq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 F 、 G はそれぞれ目的汎関数および体積制約に関する制約汎関数を表す。また $V_{\max}$ は許容される体積の上限値、 $\chi_{\Omega}(\phi)$ は以下の式で定義される特性関数である。

$$\chi_{\Omega}(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi \geq 0 \\ 0 & \text{if } \phi < 0 \end{cases} \quad (3)$$

上述の最適化問題では、レベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ が固定設計領域 D 内の至る所で不連続となることを許容している。最適化問題を何らかの方法で正則化する必要がある。ここでは、山田らの方法⁽³³⁾に基づき、チコノフの正則化法を用いて最適化問題の正則化を行う。すなわち、上述の最適化問題の目的汎関数に、以下で定義される正則化項

$$R = \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi(\mathbf{x})|^2 d\Omega \quad (4)$$

を加え、最適化問題は以下のように定式化される。ここで、 τ は正則化の度合いを示すパラメータである。

$$\begin{aligned} \inf_{\phi} \quad & F_R(\chi_{\Omega}, \phi) = F + R \\ \text{subject to} \quad & G(\chi_{\Omega}) \leq 0, \end{aligned} \quad (5)$$

次に、この最適化問題をラグランジェ未定乗数法を用いて無制約問題に置き換える。最適化問題は以下の式で表される。

$$\inf_{\phi} \quad \bar{F}_R(\chi_{\Omega}, \phi) = F_R + \lambda G \quad (6)$$

ここで、 $\bar{F}_R$ はラグランジェアン、 λ はラグランジェ未定乗数を表す。

上式で定式化した最適化問題を解くために、仮想的な時間 t を導入し、次式に示すように、レベルセット関数の変動がラグランジェアンの変分 $\bar{F}_R'$ に比例するものと仮定し、時間発展方程式を導出する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) \bar{F}_R', \quad (7)$$

ここで、 $K(\phi) > 0$ は比例定数を表す。式 (6) を式 (7) に代入し、境界条件として、物体領域に指定されている境界にはディリクレ境界条件を与え、その他の境界には、ノイマン境界条件を与え固定設計領域外部からの干渉がないことを表現する。以上より、次式の反応拡散方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) (\bar{F}' - \tau \nabla^2 \phi) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \\ \phi = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{on } \partial D \setminus \partial D_N \\ \text{on } \partial D_N, \end{matrix} \quad (8)$$

ここで、 $\bar{F} = F + \lambda G$ とした。上式の反応拡散方程式を解くことにより、最適構造を表すレベルセット関数を求める。ここでは、文献⁽³³⁾と同様、 $\bar{F}$ の感度をトポロジー導関数⁽³⁷⁾⁽³⁸⁾として考える。詳細は文献⁽³³⁾を参照されたい。

2.2 有効体積弾性率の算出方法

はじめに、音響メタマテリアルの有効的な音響特性の算出方法について述べる。Fokin ら⁽³⁵⁾は、電磁メタマテリアル設計問題において有効透磁率と有効誘電率を求める手法として提案された Smith ら⁽³⁴⁾の定式化に基づき、音響メタマテリアルにおいて有効体積弾性率および有効質量密度の算出方法を示した。この方法では、平面音波を入射した時の反射係数と透過係数に基づき有効的な屈折率および音響インピーダンスを算出し、有効体積弾性率と有効質量密度を計算する。ここでは、対称な最適構造を得ることを目的とし、電磁メタマテリアル設計問題において、Smith ら⁽³⁴⁾の方法を拡張した方法⁽³⁶⁾に基づき、Fokin ら⁽³⁵⁾の方法を拡張した。すなわち、有効体積弾性率 K_{eff} は以下の式で求められる。

$$K_{\text{eff}} = \frac{K_0}{c \rho_0} \frac{Z}{n} \quad (9)$$

ここで、 K_0, ρ_0, c はそれぞれ、真空中の体積弾性率、質量密度および音速を表す。さらに、 Z は音響インピーダンス、 n は屈折率を表し以下の式で与えられる。

$$Z = \sqrt{\frac{(1+R_1)(1+R_2) - T_{21}^2}{(1-R_1)(1-R_2) - T_{21}^2}} \quad (10)$$

$$n = \cos^{-1} \left(\frac{\beta}{2T_{21}} \right) \frac{\lambda}{2\pi d} \quad (11)$$

さらに、 β は以下の式で与えられる。

$$\beta = 1 - R_1 R_2 + T_{21}^2. \quad (12)$$

ここで、 R_1, T_{21}, R_2 は以下の式で与えられる。

$$R_1 = \frac{\int_{\Gamma_1} (p_1 - p_1^i) p_1^i d\Gamma}{\int_{\Gamma_1} p_1^i p_1^i d\Gamma} \quad (13)$$

$$T_{21} = \frac{\int_{\Gamma_2} p_1 p_1^i d\Gamma}{\int_{\Gamma_2} p_1^i p_1^i d\Gamma} \quad (14)$$

$$R_2 = \frac{\int_{\Gamma_2} (p_2 - p_2^i) p_2^i d\Gamma}{\int_{\Gamma_2} p_2^i p_2^i d\Gamma} \quad (15)$$

ここで、 p_1 は境界 Γ_1 に音場 p_1^i を入射したときに得られる音場ベクトルで、 p_2 は境界 Γ_2 に音場 p_2^i を入射したときに得られる音場ベクトルである。また、 R_1 は境界 Γ_1 に音場 p_1^i を入射したときの境界 Γ_1 における反射係数であり、 T_{21} は境界 Γ_1 に音場 p_1^i を入射したときの境界 Γ_1 から境界 Γ_2 への透過係数、 R_2 は境界 Γ_2 に音場 p_2^i を入射したときの境界 Γ_2 における反射係数である。

なお、式 (9)-(12) の有効体積弾性率の定式化では、 R_1, T_{21} に加え R_2 を用いて、 R_1 と R_2 に対して、対称となるように定式化を行うことで、対称な最適構造が得られるよう拡張をしていることを注記する。

2.3 音響メタマテリアル設計問題

音響メタマテリアル設計問題では、メタマテリアルのユニットセルを解析領域とし、音響伝搬問題を解き、前節の方法を用いてメタマテリアルの有効特性を求める。図2に二次元問題の設計領域と境界条件を示す。設計領域の左側より音波が入射し、上下境界を周期構造となるように完全反射条件 Γ_{PRS} を用いる。また図3に三次元問題の設計領域と境界条件を示す。三次元問題の場合も同様に、周期構造となるよう上下面および前後面に完全反射条件 Γ_{PRS} を用いる。ここでは、固定設計領域の外側に外部領域を設けていることで、外部領域および固定設計領域内においてレベルセット関数で表現される物体領域および空洞領域の3種類の材料で構成される構造を対象としている。このとき支配方程式は、音場を p_1 、密度を ρ 、体積弾性率を K として、以下のヘルムホルツ方程式で与えられる。

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p_1) + \omega^2 K^{-1} p_1 = 0 \quad (16)$$

上式において、 ω は角振動数を表す。また、 k_0 は自由空間での波数を表し、 $k_0 = \omega \sqrt{\rho_0 / K_0}$ で表される。境界条件は以下の式で与えられる。

$$\mathbf{n} \cdot (\rho^{-1} \nabla p_1) + j k_0 p_1 = 2 j k_0 p_1^i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (17)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\rho^{-1} \nabla p_1) + j k_0 p_1 = 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (18)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\rho^{-1} \nabla p_1) = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\text{PRS}} \quad (19)$$

ここで、 $\mathbf{n}$ は法線ベクトル、 p_1^i は入射音場を表す。境界 Γ_2 に音場 p_2^i を入射したときの音場 p_2 は境界条件 (17) と (18) を入れ替えてヘルムホルツ方程式を解くことで得られる

2.4 有効体積弾性率最小化問題

ここでは、有効体積弾性率を最小化する最適化問題を考える。最適化問題の目的は、所望の周波数において有効体積弾性率の実部を最小化することである。しかしながら、有効体積弾性率の実部を直接最小化した場合、体積弾性率が負となる最適構造を得るのが困難な場合がある。以下、その説明を行う。図4(a)に、一般的な有効体積弾性率の周波数特性を示す。図中の K' と K'' はそれぞれ有効体積弾性率の実部と虚部を表す。図に示すように、有効体積弾性率の実部には正の共振ピークと負の共振ピークが存在し、負の共振ピークで有効体積弾性率が最小となり負の有効体積弾性率が実現可能となる。しかしながら、初期構造における正のピークの共振周波数が、負の共振ピークの周波数と最適化計算で対象とする周波数の間にある場合、すなわち図4(a)の例においては、対象周波数が正の共振ピークの共振周波数より低い場合、有効体積弾性率の実部を直接目的関数に設定して最適化計算を行うと、図4(b)に示すように、正のピークが左側に移動すれば有効体積弾性率の実部が減少するため、正の

Fig. 2 (a) Fixed design domain and boundary conditions for two-dimensional problem, (b) and its layered structure.

Fig. 3 (a) Fixed design domain and boundary conditions for three-dimensional problem, (b) and its layered structure.

Fig. 4 Typical frequency response of effective bulk modulus

ピークが左に移動する方向に最適化計算が進む。その結果、負の共振ピークの周波数が対象周波数から離れてしまうため、負の値を示す最適構造を求めることができない。そこで、文献⁽²⁸⁾の方法に基づき、二段階の最適化計算を行う。すなわち、有効体積弾性率の虚部 K'' には正のピークがないことに着目し、図 4(c) に示すように、まずステップ 1 では、有効体積弾性率の虚部 K'' の最小化を行う。この場合の最適化問題は以下のように与えられる。

$$\inf_{\phi} \quad F = K''_{\text{eff}} \quad (20)$$

$$\text{subject to} \quad G_{\chi\Omega} = \int_D \chi_{\Omega}(\phi) d\Omega - V_{\max} \leq 0 \quad (21)$$

$$a_{\chi\Omega}(p_1, \tilde{p}_1) + a(p_1, \tilde{p}_1) = l_{p_1}(\tilde{p}_1) \quad \text{for } p_1 \in U, \quad \forall \tilde{p}_1 \in U \quad (22)$$

$$a_{\chi\Omega}(p_2, \tilde{p}_2) + a(p_2, \tilde{p}_2) = l_{p_2}(\tilde{p}_2) \quad \text{for } p_2 \in U, \quad \forall \tilde{p}_2 \in U \quad (23)$$

ここで、上式の各表記は以下で与えられる。

$$a_{\chi\Omega}(p, \tilde{p}) = \int_D \rho^{-1}(\chi_{\Omega}) \nabla p \cdot \nabla \tilde{p} d\Omega - \omega^2 \int_D K^{-1}(\chi_{\Omega}) p \tilde{p} d\Omega \quad (24)$$

$$a(p, \tilde{p}) = jk_0 \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \rho^{-1} p \tilde{p} d\Gamma \quad (25)$$

$$l_{p_i}(\tilde{p}) = 2jk_0 \int_{\Gamma_i} p^i \tilde{p} d\Gamma \quad (26)$$

$$U = \{\tilde{p} \in H^1(D)\} \quad (27)$$

その後、ステップ 2 では、ステップ 1 で得られた最適構造を初期構造として、図 4(d) に示すように、有効体積弾性率の実部 K' の最小化を行う。ステップ 2 の最適化問題は以下のように記述できる。

$$\inf_{\phi} \quad F = K'_{\text{eff}} \quad (28)$$

$$\text{subject to} \quad G_{\chi\Omega} \leq 0 \quad (29)$$

$$a_{\chi\Omega}(p_1, \tilde{p}_1) + a(p_1, \tilde{p}_1) = l_{p_1}(\tilde{p}_1) \quad \text{for } p_1 \in U, \quad \forall \tilde{p}_1 \in U \quad (30)$$

$$a_{\chi\Omega}(p_2, \tilde{p}_2) + a(p_2, \tilde{p}_2) = l_{p_2}(\tilde{p}_2) \quad \text{for } p_2 \in U, \quad \forall \tilde{p}_2 \in U \quad (31)$$

なおここでは、後述の随伴変数法を用いた感度解析を弱形式で議論するため支配方程式を弱形式により記述している。

2.5 感度解析

ここでは、随伴変数法を用いた感度解析について述べる。最適化問題のラグランジェアン $\bar{F}$ を以下のように定式化する。

$$\bar{F} = F(p_1, p_2) - (a_{\chi_\Omega}(p_1, \tilde{p}_1) + a(p_1, \tilde{p}_1) - l_{p_1}(\tilde{p}_1)) - (a_{\chi_\Omega}(p_2, \tilde{p}_2) + a(p_2, \tilde{p}_2) - l_{p_2}(\tilde{p}_2)) + \lambda G_{\chi_\Omega} \quad (32)$$

ここで、 $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ はそれぞれ p_1 , p_2 に対応する随伴変数を表す。上式のラグランジェアンの変分に基づき、前節で述べた反応拡散方程式を用いてレベルセット関数を更新することで、最適構造を示すレベルセット関数を求める。ラグランジェアンの変分は、随伴変数法を用いて以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \bar{F}' = & F(p'_1, p_2) + F(p_1, p'_2) - (a_{\chi'_\Omega}(p_1, \tilde{p}_1) + a_{\chi_\Omega}(p'_1, \tilde{p}_1) + a_{\chi_\Omega}(p_1, \tilde{p}'_1) + a(p'_1, \tilde{p}_1) + a(p_1, \tilde{p}'_1) - l_{p_1}(\tilde{p}'_1)) \\ & - (a_{\chi'_\Omega}(p_2, \tilde{p}_2) + a_{\chi_\Omega}(p'_2, \tilde{p}_2) + a_{\chi_\Omega}(p_2, \tilde{p}'_2) + a(p'_2, \tilde{p}_2) + a(p_2, \tilde{p}'_2) - l_{p_2}(\tilde{p}'_2)) + \lambda G_{\chi'_\Omega} \end{aligned} \quad (33)$$

ここで、 $a_{\chi'_\Omega}$ は、 a_{χ_Ω} に対するトポロジー導関数を表わす。また、随伴変数は以下の関係式を満たす。

$$a_{\chi_\Omega}(p_1, \tilde{p}'_1) + a(p_1, \tilde{p}'_1) = l_{p_1}(\tilde{p}'_1) \quad (34)$$

$$a_{\chi_\Omega}(p_2, \tilde{p}'_2) + a(p_2, \tilde{p}'_2) = l_{p_2}(\tilde{p}'_2) \quad (35)$$

式 (34) と (35) を用いて式 (33) に代入し、さらに p'_1, p'_2 の項を消去することを考え、以下のように変形する。

$$\begin{aligned} \bar{F}' = & (F(p'_1, p_2) - a_{\chi_\Omega}(p'_1, \tilde{p}_1) - a(p'_1, \tilde{p}_1)) + (F(p_1, p'_2) - a_{\chi_\Omega}(p'_2, \tilde{p}_2) - a(p'_2, \tilde{p}_2)) \\ & - a_{\chi'_\Omega}(p_1, \tilde{p}_1) - a_{\chi'_\Omega}(p_2, \tilde{p}_2) + \lambda G_{\chi'_\Omega} \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、以下の随伴方程式を満たす随伴変数 $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ を求める。

$$a_{\chi_\Omega}(p'_1, \tilde{p}_1) + a(p'_1, \tilde{p}_1) = F(p'_1, p_2) \quad \text{for } \tilde{p}_1 \in U, \quad \forall p'_1 \in U \quad (37)$$

$$a_{\chi_\Omega}(p'_2, \tilde{p}_2) + a(p'_2, \tilde{p}_2) = F(p_1, p'_2) \quad \text{for } \tilde{p}_2 \in U, \quad \forall p'_2 \in U \quad (38)$$

結局、ラグランジェアンの変分は以下の式で求めることができる。

$$\bar{F}' = -a_{\chi'_\Omega}(p_1, \tilde{p}_1) - a_{\chi'_\Omega}(p_2, \tilde{p}_2) + \lambda G_{\chi'_\Omega} \quad (39)$$

3. 数 値 実 装 法

3.1 設計変数

レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化では、レベルセット関数を用いて設計領域内の物体領域と空洞領域を示す。本研究では、設計領域内の密度 ρ と体積弾性率 K を次式に示すようにレベルセット関数を用いて表現する。

$$\rho^{-1} = (\rho_1^{-1} - \rho_0^{-1}) \chi_\Omega(\phi) + \rho_0^{-1} \quad (40)$$

$$K^{-1} = (K_1^{-1} - K_0^{-1}) \chi_\Omega(\phi) + K_0^{-1} \quad (41)$$

ここで、 ρ_1, K_1 は物体領域の密度および体積弾性率、 ρ_0, K_0 は空洞領域の密度および体積弾性率を表す。ここでは、文献⁽²⁹⁾と同様、感度分布の連続性を確保し、最適化計算の収束性を安定化させるため、密度と体積弾性率の逆数を用いて表現する。詳細は文献⁽²⁹⁾を参照されたい。また、上式の特性関数 χ_Ω は、数値計算上は次式に示す近似したヘビサイド関数 $H(\phi)$ を用いる。

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & (\phi < -w) \\ \frac{1}{2} + \frac{\phi}{w} \left\{ \frac{15}{16} - \frac{\phi^2}{w^2} \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{16} \frac{\phi^2}{w^2} \right) \right\} & (-w \leq \phi < w) \\ 1 & (w \leq \phi) \end{cases} \quad (42)$$

上式において、 w はヘビサイド関数の遷移幅で十分小さい値を与えるものとする。

Fig. 5 Two-step approach

Fig. 6 Flowchart of optimization algorithm

3.2 最適化フローチャート

本提案手法では、二段階の最適化を行う。図5にそのフローチャートを示す。ステップ1では、まず有効体積弾性率の虚部の最小化を行う。その後ステップ2では、ステップ1で得られた最適構造を初期構造として、有効体積弾性率の実部の最小化を行う。各ステップにおける最適化計算のフローチャートを図6に示す。各ステップでは、まずレベルセット関数の初期化を行う。次に、有限要素法を用いて平衡方程式を解き、目的汎関数、制約汎関数を求める。収束判定を行い、目的汎関数が収束した場合は、最適化計算を終了し、収束しない場合は、随伴変数法を用いて感度解析を行う。その後、感度に基づき反応拡散方程式を用いてレベルセット関数を更新させ、初めのステップに戻る。

4. 数 値 例

ここでは、数値例として、二次元および三次元の有効体積弾性率最小化問題に適用し、提案手法の有効性を検討する。固定設計領域内において、レベルセット関数で表現される物体領域をゴム、空洞領域をエポキシ樹脂とし、固定設計領域の外側の領域を空気とする。ゴムとエポキシ樹脂の体積弾性率および密度を減衰を考慮した複素体積弾性率および複素密度で与える⁽³⁹⁾。ここでは、ゴムの複素体積弾性率を $K_1 = 6.25 \times 10^5(1 + j\eta)\text{Pa}$ 、複素密度を $\rho_1 = 1.3 \times 10^3(1 + j\xi)\text{kg/m}^3$ 、エポキシ樹脂の複素体積弾性率を $K_0 = 5.49 \times 10^9(1 + j\eta)\text{Pa}$ 、複素密度を $\rho_0 = 1.18 \times 10^3(1 + j\xi)\text{kg/m}^3$ 、また空気の体積弾性率を $K_{\text{air}} = 1.47 \times 10^5\text{Pa}$ 、密度を $\rho_{\text{air}} = 1.25\text{kg/m}^3$ とした。 ξ , η は減衰係数で、ここでは $\xi = -0.003$, $\eta = 0.003$ とした。式(42)に示すヘビサイド関数の遷移幅 w を 0.001 とし、固定設計領域が全て物体領域となる初期構造を用いて最適化計算を行った。

4.1 二次元設計問題

ここでは二次元設計問題に適用し提案手法の有効性を検討する。最適化計算で対象とする周波数を異なる周波数に設定した場合にも適切な最適解が得られることを確認するため2つの数値例を示す。図2に示した解析領域を $12\text{mm} \times 12\text{mm}$ 、固定設計領域を $8\text{mm} \times 8\text{mm}$ とし、解析領域全体を 120×120 の構造メッシュを用いて要素分割を行った。

4.1.1 数値例1

ここでは、対象とする周波数を 3000Hz と設定し、最適構造を求めた。図7に最適構造を示す。また図8に初期構造および最適構造の有効体積弾性率の周波数特性を示す。図より、最適化計算により、有効体積弾性率の実部の負のピークの共振周波数が対象周波数と一致し、その結果、対象周波数において有効体積弾性率の値が最小化されていることがわかる。3000Hzにおいて、初期構造と最適構造の有効体積弾性率はそれぞれ、 $2.50 \times 10^9\text{Pa}$ 、 $-1.61 \times 10^{10}\text{Pa}$ となり、最適化により、負の有効体積弾性率が得られることが確認できた。

ここで、最適構造において、位相 0° における体積変化率は、 $\Delta V/V = 2.50 \times 10^{-7}$ となり体積が増加している。

Fig. 7 Optimal configuration for 2-dimensional bulk modulus minimization problem targeting 3000Hz

Fig. 8 Frequency response of effective bulk modulus for 2-dimensional bulk modulus minimization problem targeting 3000Hz

Fig. 9 Optimal configuration for 2-dimensional bulk modulus minimization problem targeting 5000Hz

Fig. 10 Frequency response of effective bulk modulus for 2-dimensional bulk modulus minimization problem targeting 5000Hz

体積弾性率 κ の定義より、音圧 p と体積変化率 ΔV の関係は以下で与えられる。

$$p = -\kappa \frac{\Delta V}{V} \quad (43)$$

得られた最適構造では、単位大きさの音場を与えた場合に、体積変化率が正となっているため、体積弾性率 κ が負となっていることが確認できる。以下に示す数値例においても、対象とする周波数において体積変化率が正となっていることを注記する。

4.1.2 数値例 2

ここでは、対象とする周波数を 5000Hz とし最適構造を求めた。図 9 に最適構造を示す。また図 10 に、初期構造および最適構造の有効体積弾性率の周波数特性を示す。ここでも数値例 1 と同じく、体積弾性率の実部の負のピークの共振周波数が対象周波数に一致し、その結果、対象周波数での有効体積弾性率が最小化されていることが確認できる。5000Hz において、初期構造と最適構造の有効体積弾性率はそれぞれ、 $2.83 \times 10^9 \text{Pa}$ 、 $-5.24 \times 10^9 \text{Pa}$ となり、最適化により、負の有効体積弾性率が得られていることがわかる。

Fig. 11 (a)Optimal configuration and (b)its cross-section view for 3-dimensional bulk modulus minimization problem targeting 3000Hz

Fig. 12 Frequency response of effective bulk modulus for 3-dimensional bulk modulus minimization problem targeting 3000Hz

4.2 三次元設計問題

ここでは、三次元設計問題に適用し、提案手法の有効性を検証する．ここでも対象周波数を異なる周波数に設定した場合でも適切な最適解が得られることを確認するため2つの数値例を示す．図3に示した解析領域を $12\text{mm} \times 12\text{mm} \times 12\text{mm}$ 、固定設計領域を $8\text{mm} \times 8\text{mm} \times 8\text{mm}$ とし、解析領域全体を $48 \times 48 \times 48$ の構造メッシュを用いて要素分割を行った．

4.2.1 数値例1

ここでは、対象周波数を 3000Hz として最適構造を求めた．図11に最適構造およびその断面を示す．図12に初期構造および最適構造の有効体積弾性率の周波数特性を示す． 3000Hz において、初期構造と得られた最適構造の有効体積弾性率はそれぞれ $1.98 \times 10^9\text{Pa}$ 、 $-6.20 \times 10^9\text{Pa}$ となり、最適化計算により、対象周波数において有効体積弾性率が負となる最適構造が得られることが確認できた．

Fig. 13 (a)Optimal configuration and (b)its cross-section view for 3-dimensional bulk modulus minimization problem targeting 5000Hz

Fig. 14 Frequency response of effective bulk modulus for 3-dimensional bulk modulus minimization problem targeting 5000Hz

4.2.2 数値例 2

最後に、ここでは対象周波数を 5000Hz として最適構造を求めた。図 13 に最適構造およびその断面を示す。図 14 に初期構造および最適構造の有効体積弾性率の周波数特性を示す。5000Hz において、初期構造と得られた最適構造の有効体積弾性率はそれぞれ $2.12 \times 10^9 \text{Pa}$, $-1.40 \times 10^9 \text{Pa}$ となり、この場合も最適化計算により、対象周波数において有効体積弾性率が負となる最適構造が得られることが確認できた。

5. 結 言

本研究では、レベルセット法の形状表現を用いた音響メタマテリアルのトポロジー最適設計手法を提案した。本研究で得られた結果を以下に示す。

- (1) レベルセット法による形状表現と、反射係数および透過係数に基づき有効体積弾性率の算出する方法を用いて、有効体積弾性率最小化問題の定式化を行った。
- (2) 最適化問題の定式化に基づき、有効体積弾性率の虚部の最小化を行った後に実部の最適化を行う二段階の最適化手法を用いて、有限要素法により音場の解析とレベルセット関数の更新を行う音響メタマテリアル最適設計問題の最適化アルゴリズムを提案した。

(3) 数値解析例により、二次元および三次元の最適設計問題に適用し、本提案手法の有効性を検証した。いずれの場合も有効体積弾性率の負のピークの共振周波数が対象の周波数に一致し、負の有効体積弾性率を示す最適構造が得られていることが確認できた。またいずれの最適構造もグレースケールを含まない明確な最適構造が得られており、提案手法により工学的に有効な最適構造が得られることを示した。

謝 辞

本論文の第一筆者は、アイシン・エイ・ダブリュ株式会社の支援のもとに研究を実施した。本支援に深く謝意を表する。

文 献

- (1) Veselago, V. G., "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ", *Soviet Physics Uspekhi*, Vol. 10, No. 4 (1968), pp. 509–514.
- (2) Pendry, J. B., Holden, A. J., Stewart, W. J. and Youngs, I., "Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures", *Physical Review Letters*, Vol. 76, No. 25 (1996), pp. 4773–4776.
- (3) Pendry, J. B., Holden, A. J., Robbins, D. J. and Stewart, W. J., "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 47, No. 11 (1999), pp. 2075–2084.
- (4) Smith, D. R., Padilla, W. J., Vier, D. C., Nemat-Nasser, S. C. and Schultz, S., "Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity", *Physical Review Letters*, Vol. 84, No. 18 (2000), pp. 4184–4187.
- (5) Soukoulis, C. M. and Wegener, M., "Past achievements and future challenges in the development of three-dimensional photonic metamaterials", *Nature Photonics*, Vol. 5, No. 9 (2011), pp. 523–530.
- (6) Schurig, D., Mock, J. J., Justice, B. J., Cummer, S. A., Pendry, J. B., Starr, A. F. and Smith, D. R., "Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies", *Science*, Vol. 314, No. 5801 (2006), pp. 977–980.
- (7) Cai, W., Genov, D. A. and Shalaev, V. M., "Superlens based on metal-dielectric composites", *Physical Review B*, Vol. 72, No. 19 (2005), 193101.
- (8) Caloz, C., Itoh, T. and Rennings, A., "CRLH metamaterial leaky-wave and resonant antennas", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 50, No. 5 (2008), pp. 25–39.
- (9) Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y. Y., Yang, Z., Chan, C. T. and Sheng, P., "Locally resonant sonic materials", *Science*, Vol. 289, No. 5485 (2000), pp. 1734–1736.
- (10) Fang, N., Xi, D., Xu, J., Ambati, M., Srituravanich, W., Sun, C. and Zhang, X., "Ultrasonic metamaterials with negative modulus", *Nature Materials*, Vol. 5, No. 6 (2006), pp. 452–456.
- (11) Lee, S. H., Park, C. M., Seo, Y. M., Wang, Z. G. and Kim, C. K., "Acoustic metamaterial with negative modulus", *Journal of Physics: Condensed Matter*, Vol. 21, No. 17 (2009), 175704.
- (12) Huang, H. H., Sun, C. T. and Huang, G. L., "On the negative effective mass density in acoustic metamaterials", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, No. 4 (2009), pp. 610–617.
- (13) Lee, S. H., Park, C. M., Seo, Y. M., Wang, Z. G. and Kim, C. K., "Acoustic metamaterial with negative density", *Physics Letters A*, Vol. 373, No. 48 (2009), pp. 4464–4469.
- (14) Li, J. and Chan, C. T., "Double-negative acoustic metamaterial", *Physical Review E*, Vol. 70, No. 5 (2004), 055602.
- (15) Ding, Y., Liu, Z., Qiu, C. and Shi, J., "Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density", *Physical Review Letters*, Vol. 99, No. 9 (2007), 093904.
- (16) Fok, L. and Zhang, X., "Negative acoustic index metamaterial", *Physical Review B*, Vol. 83, No. 21 (2011), 214304.
- (17) Chen, H. and Chan, C. T., "Acoustic cloaking in three dimensions using acoustic metamaterials", *Applied Physics Letters*, Vol. 91, No. 18 (2007), 183518.

- (18) Hu, J., Zhou, X. and Hu, G., “A numerical method for designing acoustic cloak with arbitrary shapes”, *Computational Materials Science*, Vol. 46, No. 3 (2009), pp. 708–712.
- (19) Zhang, S., Xia, C. and Fang, N., “Broadband Acoustic Cloak for Ultrasound Waves”, *Physical Review Letters*, Vol. 106, No. 2 (2011), 024301.
- (20) Ambati, M., Fang, N., Sun, C. and Zhang, X., “Surface resonant states and superlensing in acoustic metamaterials”, *Physical Review B*, Vol. 75, No. 19 (2007), 195447.
- (21) Li, J., Fok, L., Yin, X., Bartal, G. and Zhang, X., “Experimental demonstration of an acoustic magnifying hyperlens”, *Nature Materials*, Vol. 8, No. 12 (2009), pp. 931–934.
- (22) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., “Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, No. 2 (1988), pp. 197–224.
- (23) Bendsøe, M. P., “Optimal shape design as a material distribution problem”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 1, No. 4 (1989), pp. 193–202.
- (24) Yoo, J., Kikuchi, N. and Volakis, J. L., “Structural optimization in magnetic devices by the homogenization design method”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 36, No. 3 (2000), pp. 574–580.
- (25) Dühring, M. B., Jensen, J. S., Sigmund, O., “Acoustic design by topology optimization”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 317, No. 3–5 (2008), pp. 557–575.
- (26) Yamamoto, T., Maruyama, S., Nishiwaki, S., Yoshimura, M., “Topology design of multi-material soundproof structures including poroelastic media to minimize sound pressure levels”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 17–20 (2009), pp. 1439–1455.
- (27) Diaz, A. R. and Sigmund, O., “A topology optimization method for design of negative permeability metamaterials”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 41, No. 2 (2010), pp. 163–177.
- (28) Sigmund, O., “Systematic design of metamaterials by topology optimization”, *IUTAM Symposium on Modelling Nanomaterials and Nanosystems*, R. Pyrz and J. C. Rauhe (eds.), Springer, Netherlands, Vol. 13 (2009), pp. 151–159.
- (29) Otomori, M., Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., Andkjær, J., “A topology optimization method based on the level set method for the design of negative permeability dielectric metamaterials”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 237–240 (2012), pp. 192–211.
- (30) Sigmund, O., “Morphology-based black and white filters for topology optimization”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 33, No. 4–5 (2007), pp. 401–424.
- (31) Kawamoto, A., Matsumori, T., Yamasaki, S., Nomura, T., Kondoh, T. and Nishiwaki, S., “Heaviside projection based topology optimization by a PDE-filtered scalar function”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 44, No. 1 (2011), pp. 19–24.
- (32) Wang, F., Lazarov, B. S. and Sigmund, O., “On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 43, No. 6 (2011), pp. 767–784.
- (33) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S. and Takezawa, A., “A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45–48 (2010), pp. 2876–2891.
- (34) Smith, D. R., Schultz, S., Markoš, P. and Soukoulis, C. M., “Determination of effective permittivity and permeability of metamaterials from reflection and transmission coefficients,” *Physical Review B*, Vol. 65, No. 19 (2002), 195104.
- (35) Fokin, V., Ambati, M., Sun, C. and Zhang, X., “Method for retrieving effective properties of locally resonant acoustic metamaterials”, *Physical Review B*, Vol. 76, No. 14 (2007), 144302.
- (36) Smith, D. R., Vier, D. C., Koschny, T. and Soukoulis, C. M., “Electromagnetic parameter retrieval from inhomogeneous metamaterials,” *Physical Review E*, Vol. 71, No. 3 (2005), 036617.
- (37) Allaire, G., de Gournay, F., Jouve, F. and Toader, A.-M., “Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method,” *Control and Cybernetics*, Vol. 34, No. 1 (2005), pp. 59–80.

- (38) Bonnet, M., "Inverse acoustic scattering by small-obstacle expansion of a misfit function," *Inverse Problems*, Vol. 24, No. 3 (2008), 035022.
 - (39) 山口誉夫, "多孔質材を充填した閉音場の減衰特性の解析 (モード減衰と減衰応答の高速計算法の提案)", 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 66, No. 648 (2000), pp. 2563–2569.
-