弾性体の実効的な静摩擦係数に関する設計指針*

前川 寛^{*1}, 糸魚川 文広^{*1}, 新吉 隆利^{*2}
鈴木 厚^{*2}, 田所 千治^{*3}, 中野 健^{*3}

Design Criteria on Effective Static Friction Coefficient of Elastomers

Satoru MAEGAWA, Fumihito ITOIGAWA, Takatoshi SHINYOSHI,
Atsushi SUZUKI, Chiharu TADOKORO and Ken NAKANO^{*3}^{*3} Faculty of Environment and Information Sciences, Yokohama National University
79-7 Tokiwadai, Hodogaya-ku, Yokohama-shi, Kanagawa, 240-8501 Japan

In sliding friction of elastomers, the effective static friction coefficient μ_s^{eff} observed is not necessarily equal to the inherent real one μ_s possessed by the material; usually $\mu_s^{\text{eff}} < \mu_s$ because of the elastic deformations of sliding objects and the propagation of shear fracture in the contact area. This indicates that focusing on elastic deformation of sliding objects can derive a new criterion of μ_s^{eff} for machine design. In this study, mainly through numerical simulations for a physical model assured by experiments in which measuring frictional force and observing contact area were carried out for a longitudinal line contact of polymethyl methacrylate, it is found that the stiffness ratio $\kappa = K_b^{\text{tot}}/K_c^{\text{tot}}$ (where K_b^{tot} and K_c^{tot} are the total bulk stiffness and total tangential contact stiffness of the elastic sliding object, respectively) dominates the value of μ_s^{eff} .

Key Words : Elastomer, Contact, Deformation, Sliding Friction, Frictional Vibration, Stick-Slip, Global Slip, Partial Slip, Precursor, Friction Coefficient

1. 緒 言

機械システムの摺動部に要求される摩擦特性は多種多様である。軸受や案内面などのように、低摩擦であることが求められる場合もあれば、タイヤやクラッチをはじめとする動力伝達部のように、高摩擦を維持することが必要となる場合もある。また、スティックスリップなどの摩擦振動を回避するためには、静摩擦力と動摩擦力の差をできる限り小さくすることや、動摩擦力の相対速度依存性を正にすることなどが求められる^{(1)~(3)}。このような状況の中、いかに所望の摩擦特性を実現させるかが、摺動部の設計の生命線となる。

一般に、所望の摩擦係数を得るための設計指針とは、材料の変更や表面改質または潤滑剤（基油と添加剤）の変更などのように、摺動部のインターフェイスに着目したアプローチのことを指す。これらの手法に共通することは、摺動部の真実接触面積または真実接触部の剪断強さを増減することで、インターフェイスの摩擦特性そのものを調整するという考え方にある。

一方、弾性体のすべり摩擦では、「実効的な静摩擦係数（システムに現れる見掛けの静摩擦係数）は真の静摩擦係数（インターフェイスが持つ本来の静摩擦係数）よりも低く現れる」ことが近年指摘されている^{(4)~(6)}。例えば、Maegawa ら⁽⁴⁾は、Fineberg ら^{(7)~(9)}により開発された接触面可視化手法を利用して、アクリル製のスライダとベースブロックで構成される線接触部の in-situ 観察を偏荷重下で行い、スライダを離散的にモデリングして得た数値解析との比較から、実効的な静摩擦係数を決める要因として、スライダの弾性的な内部変形

* 原稿受付 2013 年 1 月 30 日

^{*1} 正員, 名古屋工業大学 (〒466-8555 愛知県名古屋市中昭和区御器所町)^{*2} トヨタ自動車 (株) (〒471-8572 愛知県豊田市トヨタ町 1 番地)^{*3} 正員, 横浜国立大学 (〒240-8501 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7)

E-mail: nakano@ynu.ac.jp

と接触部を伝播する剪断破壊の重要性を指摘している。このことは、「インターフェイスのミクロな性質に着目した（従来の）摩擦の設計」とは別に、「バルクのマクロな変形に着目した（新たな）摩擦の設計」があり得ることを示唆している。

以上の背景を踏まえて本研究では、後者のコンセプトの是非を検討するために、アクリル製のスライダとベースブロックのすべり摩擦を対象として、実験と数値解析を行った。実験では、線接触部の可視化により剪断破壊の伝播を確認しながら、実効的な静摩擦係数に及ぼすスライダ長の影響を調べた。数値解析では、Maegawa らのモデル⁽⁴⁾の汎化性を高めた Amundsen らのモデル⁽¹⁰⁾を採用して、実効的な静摩擦係数に及ぼすスライダの弾性変形の影響を調べた。その結果、「スライダのバルク剛性と接線方向の接触剛性の比」が実効的な静摩擦係数を支配することを見出した。以後、その詳細を報告する。

2. 実験方法

2.1 試験片

試験片として、透明なアクリル（ヤング率：2.5 GPa）製のスライダと、同アクリル製のベースブロックを用いた。それらの模式図を図 1 に示す。スライダの下面には、 X 方向に沿って頂角 158 度の面取り加工が施されている。スライダの下面とベースブロックの上面は、サンドペーパーによる Y 方向の研磨により、異方的な表面粗さ（ XZ 平面で切断した断面曲線の自乗平均粗さ： $R_q = 1.30 \mu\text{m}$ ）を有する。本実験では、スライダの下面とベースブロックの上面で構成される線接触部（接触長： $L = 25 \text{ mm}$, 50 mm , 100 mm , 接触幅： 0.8 mm ）を利用した。

2.2 実験装置

実験装置の構成を図 2 に示す。本装置は、スライダとベースブロック（正面図の中央）、垂直方向負荷ユニット（正面図の右側）、接線方向負荷ユニット（正面図の左側）からなる。スライダはベースブロックの上に置かれており、ベースブロックは装置中央の鋼製のホルダで固定されている。

垂直方向負荷ユニットは、垂直荷重（ F_Z ）を計測する 2 個のロードセル（ Z ）（1 個あたりの剛性： 0.8 MN/m ）と、それらを鉛直方向に駆動する自動ステージ（ Z ）からなる。並列する 2 個のロードセルは、軸間距離を 60 mm として、上部は鋼製のブラケット、下部は鋼製の板で固定されている。同ブラケットは、傾斜ステージを介して自動ステージ（ Z ）の駆動部に固定されており、同自動ステージは、位置決め用の手動ステージ（ X ）を介して定盤に固定されている。

接線方向負荷ユニットは、接線荷重（ F_X ）を計測するロードセル（ X ）（剛性： 0.8 MN/m ）と、それを水平方向に駆動する自動ステージ（ X ）からなる。ロードセル（ X ）は、その中心軸がスライダの中心軸と一致するように、鋼製のブラケットを介して自動ステージ（ X ）の駆動部に固定されている。同自動ステージは、位置決め用の手動ステージ（ X ）を介して定盤に固定されている。

2 個のロードセル（ Z ）の下部を固定する鋼板とスライダの間には、ゴム製の板（ヤング率： 0.2 MPa , 厚さ： 10 mm ）が挟まれている。この柔軟なゴム板は、鋼板の下面とスライダの上面の形状誤差を吸収して、スライダに加わる垂直荷重分布のうねりを解消するとともに、スライダに接線荷重を加えることにより生じるすべりをスライダとベースブロックの線接触部に限定する役割を担う。

本装置は、両負荷ユニットの配置と直交して、平面レーザ光源（波長： 532 nm ）、コリメートレンズ、および高速度カメラからなる透過光学系を備えている（側面図参照）。コリメートしたレーザシート（幅： 120 mm , 厚さ： 3 mm ）を入射光として、入射角 62 度で線接触部を照射する。この入射角は、アクリルと空気の界面での全反射角（ 42 度）よりも大きいので、スライダとベースブロックの真実接触部では入射光が透過して、非接触部では全反射する。従って、線接触部からの透過光を時空間計測することにより、真実接触面積の時空間変化を得ることができる。

2.3 実験手順

まず、スライダとベースブロックを洗剤で洗浄した後、エタノール中で超音波洗浄して乾燥させた。次に、ベースブロックをホルダに固定して、その上にスライダを垂直に置き、自動ステージ（ Z ）を Z 負方向に駆動

Fig. 1 Slider and base block; slider length $L = 25, 50$, or 100 mm

Fig. 2 Experimental apparatus

して、スライダに $F_z = 400$ N の垂直荷重を加えた。ただし、2 個のロードセル (Z) の計測値がともに 200 N となるように、傾斜ステージを用いてブラケットの角度を調節した。垂直荷重を加えてから 200 秒間静置した後、自動ステージ (X) を X 正方向に速度 $V = 0.1$ mm/s で駆動して、スライダに接線荷重 F_x を加えた。同時に、3 個のロードセルからの信号を AD 変換して、サンプリング速度 500 Hz で記録した。

ロードセルによる力計測と同期して、線接触部からの透過光を高速度カメラで撮影した。撮影面積は、線接触部の全域を網羅するように、100 mm (X) $\times$ 0.8 mm (Y) とした。ただし、撮影画像の画素数は、1000 ピクセル (X) $\times$ 4 ピクセル (Y) とした。従って、1 ピクセルあたりの撮影面積は、0.1 mm (X) $\times$ 0.2 mm (Y) に相当する。また、各画素が有する光強度の分解能は 256 階調である。なお、すべての実験は温度 25 $^{\circ}$ C および相対湿度 30 % の室内環境下で行った。

3. 実験結果

3.1 典型的な実験結果

スライダ長を $L = 100$ mm とした場合の実験結果を図 3 に示す。上段は、ロードセル (X) が計測した F_x の時間変化を表す。中段は、各時刻 t における撮影画像 (1000 ピクセル (X) $\times$ 4 ピクセル (Y)) を Y 方向に平均して、縦長な線画像 (1000 ピクセル (X) $\times$ 1 ピクセル (Y)) を得た後、それらを横に連結して得た透過光強度マップ $I(X, t)$ である。ただし、透過光強度の時空間変化を際立たせるために、各点での $I(X, t)$ を $I(X, 0)$ で規格化して、その値を RGB カラー 256 階調で表してある。下段は、透過光強度の総和の時間変化 $I_{\text{tot}}(t)$ を $I_{\text{tot}}(0)$ で規格化して示したものである。

まず、ほぼ定常状態とみなせる $t = 2.7$ s 以降では、 F_x は線形的な増加と急激な低下を繰り返しており、低

Fig. 3 Experimental results; temporal change in tangential load F_X (top), temporal-spatial change in intensity $I(X,t)/I(X,0)$ of transmitted light from line contact (middle), and temporal change in total intensity $I_{tot}(t)/I_{tot}(0)$ of transmitted light (bottom); arrow: precursor and broken line: global slip; $L = 100$ mm

速なすべり摩擦に典型的な鋸歯波状のスティックスリップが発生していることがわかる⁽³⁾。 F_X に数十ニュートン程度の急激な低下が現れる瞬間（図中の破線）には、中段の透過光強度マップにおいて、接触部後縁（ $X = 0$ mm）と前縁（ $X = 100$ mm）を結ぶ筋が現れている。これは、固着した真実接触部の剪断破壊、すなわち局所すべり（ミクロスケールでの固着すべり遷移）が接触部全域に伝播して、巨視すべり（マクロスケールでの固着すべり遷移）が現れたことを示している⁽⁷⁾。また、同じタイミングで下段の I_{tot} が低下していることは、マクロな意味での静摩擦から動摩擦への遷移において、真実接触面積が瞬間的に減少することを意味している。

一方、過渡状態とみなせる $t = 2.7$ s 以前では、上段の F_X と下段の I_{tot} において、9 回の急激な低下（図中の矢印）が同時に認められる。ただし、 F_X の低下幅は回を重ねるごとに成長するが、最大でも数ニュートン程度であり、巨視すべりでのイベントと比較すると、規模は 1 桁以上小さい。（これを前兆現象と呼ぶ。）前兆現象が生じるとき、中段の透過光強度マップには、接触部後縁（ $X = 0$ mm）から前縁（ $X = 100$ mm）に向けて途中まで伸びる 9 本の筋が認められる。これらの筋の長さは回を重ねるごとに成長するとともに、透過光強度の減少領域（赤色から黄色に変化する領域）もまた前縁側へと拡大している。

このような一連の前兆現象のメカニズムは、断続的に発生する部分すべりであると考えられている⁽⁴⁾⁽⁶⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。接線荷重の増加にともない、固着した真実接触部に作用する剪断力が接触部後縁付近で増大し、接触部後縁から開始した局所すべりが線接触部の途中まで瞬間的に伝播したものと考えられる。なお、サンプリング速度を 100 kHz とした高速度撮影により、その伝播速度が 1000 m/s 程度（すなわち、レイリー波速度と同程度）であることを確認した。

3・2 実効的な摩擦係数に及ぼすスライダ長の影響

接線力 F_X の時間変化に及ぼすスライダ長 L の影響を図 4 に示す。 F_X に現れる鋸歯波状のスティックスリップ

Fig. 4 Experimental results; effect of slider length L on temporal change in tangential load F_X

ブの振幅は、 L の増加にともない明確に減少している。スティックスリップの振幅の変化は、少なくとも実効的な静摩擦係数 μ_s^{eff} と実効的な動摩擦係数 μ_k^{eff} のいずれか一方の値に影響を及ぼす。

そこで、同一条件での実験を 5 回繰り返して、静摩擦から動摩擦への遷移の瞬間における F_X の極大値（鋸歯状波形の頂点）の平均を F_Z で除すことにより μ_s^{eff} を算出したところ、 $L = 25 \text{ mm}$, 50 mm , 100 mm に対して、それぞれ $\mu_s^{\text{eff}} = 0.549 \pm 0.004$, 0.531 ± 0.003 , 0.518 ± 0.005 であった。一方、最初の静摩擦から動摩擦への遷移が生じた後の定常的な鋸歯状波形における F_X の時間平均を F_Z で除すことにより μ_k^{eff} を算出したところ、いずれのスライダの場合も $\mu_k^{\text{eff}} = 0.470 \pm 0.003$ となった。従って、実効的な動摩擦係数はスライダ長によらず一定であるのに対して、実効的な静摩擦係数はスライダ長と負の相関があることがわかる。

4. 数値解析方法

4.1 解析モデルと運動方程式

実効的な摩擦係数に及ぼすスライダのバルクの変形の影響を数値的に調べるために、Amundsen ら⁽¹⁰⁾により提案された解析モデルを用いた。これは、凝着摩擦により生じるスライダの弾性変形に加えて、接線方向の接触剛性を考慮したすべり摩擦のモデルであり、先に Maegawa ら⁽⁴⁾が観察した前兆現象の特徴をよく再現することが知られている。

同モデルを図 5 に示す。 N 個のブロック（質量： m ）を $N - 1$ 個のばね（剛性： k ）とダッシュポット（減衰係数： c ）で直列に連結してスライダを表し、それに接する剛平面でベースブロックを表している。スライダの左端に配したばね（剛性： K ）はロードセルを表し、その左端を一定速度 V で右方向に駆動して、スライダに接線荷重 F_X を加える。なお、各ブロックは、接線方向の接触剛性を表すばね（剛性： k_c ）を介して剛平面と接触する。各ブロックが支える垂直荷重を w とし、各接触点には、剛平面との相対速度が零のとき静摩擦力、相対速度が非零のとき動摩擦力が作用する。

Fig. 5 Analytical model

左から i 番目のブロックの位置を x_i (ただし、すべてのばねを自然長とした初期状態での位置を原点 $x_i = 0$) とすると、各ブロックの運動方程式は以下で与えられる。

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = K(Vt - x_1) + k(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_1 & \text{for } i = 1 \\ m\ddot{x}_i = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + c(\dot{x}_{i+1} - 2\dot{x}_i + \dot{x}_{i-1}) + f_i & \text{for } 2 \leq i \leq N-1 \\ m\ddot{x}_N = -k(x_N - x_{N-1}) - c(\dot{x}_N - \dot{x}_{N-1}) + f_N & \text{for } i = N \end{cases} \quad (1)$$

ただし、各接触点に働く接線力（摩擦力） f_i は、左から i 番目の接触点の位置を y_i (ただし、すべてのばねを自然長とした初期状態での位置を原点 $y_i = 0$) として、アモントン・クーロン則に基づき以下で与える。

$$f_i = \begin{cases} -k_c(x_i - y_i) & \text{when } \dot{y}_i = 0 \text{ and } -\mu_s w \leq -k_c(x_i - y_i) \leq \mu_s w \\ -\mu_k w & \text{when } \dot{y}_i > 0 \\ \mu_k w & \text{when } \dot{y}_i < 0 \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 μ_s は（各接触点に作用する）真の静摩擦係数、 μ_k は真の動摩擦係数を表し、 $\mu_s > \mu_k$ とする。

4・2 計算条件

運動方程式の数値解法にはルンゲ・クッタ法を用いた。諸パラメータの値は以下の関係に基づき定めた。

$$m = \frac{M}{N} \quad (3)$$

$$k = (N-1)K_b^{\text{tot}} = \frac{(N-1)ES}{L} \quad (4)$$

$$k_c = \frac{K_c^{\text{tot}}}{N} \quad (5)$$

$$c = \sqrt{0.1mk} \quad (6)$$

$$w = \frac{F_z}{N} \quad (7)$$

ただし、 M はスライダの質量、 K_b^{tot} はスライダのバルク剛性、 S は X 軸と垂直な平面におけるスライダの断面積、 K_c^{tot} は接線方向の接触剛性の総和を表す。減衰係数 c は、離散化により生じる計算誤差を抑えるために、Amundsen らの報告⁽¹⁰⁾を踏まえて式(6)のように設定した。パラメータの基準値は、実験系にあわせて、 $L = 100 \text{ mm}$, $S = 200 \text{ mm}^2$, $E = 2.5 \text{ GPa}$, $M/LS = 1.2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $K_c^{\text{tot}} = 1000 \text{ MN/m}$, $K = 0.8 \text{ MN/m}$, $F_z = 400 \text{ N}$,

Fig. 6 Numerical results; temporal change in tangential load F_X (upper) and temporal-spatial map of local slip (lower); arrow: precursor and broken line: global slip; $L = 100$ mm, $S = 200$ mm², $E = 2.5$ GPa, $M/LS = 1.2 \times 10^3$ kg/m³, $K_c^{\text{tot}} = 1000$ MN/m, $K = 0.8$ MN/m, $F_Z = 400$ N, $V = 0.1$ mm/s, $\mu_s = 1.0$, $\mu_k = 0.5$, and $N = 400$

$V = 0.1$ mm/s とした. (このときバルク剛性は $K_b^{\text{tot}} = 5$ MN/m となる.) なお, 上記の接触剛性 K_c^{tot} の値は, 垂直荷重 400 N でベースブロックに接触させたスライダを (すべりが生じない程度に) 打撃して, 接線方向の固有角振動数 ω を計測し, $K + K_c^{\text{tot}} = M\omega^2$ の関係⁽¹¹⁾ より定めた. 各接触点に作用する真の静摩擦係数は, $\mu_s = 1.0$ と $\mu_k = 0.5$ を基準値とした. ブロックの総数 N は, 単位長さあたりのブロック数が $N/L = 4$ mm⁻¹ となるように定めた. なお, すべてのばねが自然長 ($x_i = y_i = 0$) での静止状態を基準の初期条件とした.

5. 数値解析結果

5.1 典型的な計算結果

上記の基準値を用いた場合の計算結果を図 6 に示す. 上段は F_X の時間変化, 下段は, 縦軸に規格化された接触点番号 i/N , 横軸に時刻 t をとり, スリップ状態にある接触点に黒点をプロットして得た図である. 巨視すべり (図中の破線) に先立ち, 5 回の前兆現象 (図中の矢印) が発生し, 引き続き鋸歯波状のスティックスリップが発生するというように, 図 3 に示した実験結果が定性的によく再現されている.

ここで注目すべきは, 垂直荷重 $F_Z = 400$ N, 真の静摩擦係数 $\mu_s = 1$ での計算結果にもかかわらず, 図 6 に現れている F_X の極大値 (最大静摩擦力) の平均が 212 N となっている点である. これは, 剛なスライダを仮定した場合の最大静摩擦力 ($\mu_s F_Z = 400$ N) の 53% にしか満たない. 従って, スライダの弾性変形をとまうすべり摩擦では, インターフェイスに作用する真の静摩擦係数 μ_s とシステムに現れる実効的な静摩擦係数 μ_s^{eff} は必ずしも一致しないことがわかる. なお, 実効的な動摩擦係数 μ_k^{eff} は, 以後の計算結果を含む本稿の全条件で, 真の動摩擦係数 μ_k と一致した.

5.2 接線荷重の時間変化に及ぼすバルク剛性と接触剛性の影響

バルク剛性 K_b^{tot} と接触剛性 K_c^{tot} の値を変えて同様の計算を行った. その結果を図 7 に示す. ただし, K_b^{tot} の値の変更は, ヤング率 E とスライダ断面積 S を基準値のまま, スライダ長を $L = 100$ mm (このとき $K_b^{\text{tot}} = 5$ MN/m), 50 mm (このとき $K_b^{\text{tot}} = 10$ MN/m), または 25 mm (このとき $K_b^{\text{tot}} = 20$ MN/m) とした.

図 7 より, スティックスリップの振幅は, K_b^{tot} と K_c^{tot} の両者に依存することがわかる. さらに, μ_k^{eff} は全条件で $\mu_k^{\text{eff}} = \mu_k = 0.5$ であったことを考慮すると, 同図(a)より μ_s^{eff} は K_b^{tot} と正の相関を持ち, 同図(b)より μ_s^{eff} は K_c^{tot} と負の相関を持つことがわかる. なお, K_b^{tot} は L^{-1} に比例するので, 同図(a)に現れている傾向は, 図 4

(a) Effect of total bulk stiffness K_b^{tot} (b) Effect of total tangential contact stiffness K_c^{tot}

Fig. 7 Numerical results; effects of total bulk stiffness K_b^{tot} (under $K_c^{\text{tot}} = 1000 \text{ MN/m}$) and total tangential contact stiffness K_c^{tot} (under $K_b^{\text{tot}} = 5 \text{ MN/m}$) on temporal change in tangential load F_X ; $S = 200 \text{ mm}^2$, $E = 2.5 \text{ GPa}$, $M/LS = 1.2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $K = 0.8 \text{ MN/m}$, $F_Z = 400 \text{ N}$, $V = 0.1 \text{ mm/s}$, $\mu_s = 1.0$, and $\mu_k = 0.5$

の実験結果と定性的に一致している。以上の結果から、スライダの弾性変形をともしうすべり摩擦では、実効的な静摩擦係数は、インターフェイスに作用する真の静摩擦係数のみで決まるのではなく、スライダの内部変形を決めるバルク剛性と接触剛性に依存することがわかる。

6. 考 察

6.1 剛性比の導入

以上に示したように、Amundsen らのモデル (図 5) は弾性体のすべり摩擦の特徴をよく再現できている。そこで、以後は同解析モデルに基づき、実効的な静摩擦係数 μ_s^{eff} を支配するパラメータを考察して、最終的に μ_s^{eff} の設計式を導く。

まず、図 7 に示した計算結果に基づき、実効的な摩擦係数の差 ($\mu_s^{\text{eff}} - \mu_k^{\text{eff}}$) とバルク剛性 (K_b^{tot}) および接触剛性 (K_c^{tot}) の関係を図 8 にまとめた。(ただし、 K_b^{tot} の値の変更にあたっては、ヤング率 E を基準値のまま、スライダ長を $L = 25 \text{ mm}$, 50 mm , 100 mm , スライダ断面積を $S = 50 \text{ mm}^2$, 100 mm^2 , 200 mm^2 とした。) 同図の両対数グラフ上に認められる直線関係から、 $\mu_s^{\text{eff}} - \mu_k^{\text{eff}}$ と K_b^{tot} および K_c^{tot} の間に冪乗則が認められる。

ここで、図 7 に示した近似曲線がほぼ平行かつ等間隔であることに着目して、剛性比 κ :

$$\kappa = \frac{K_b^{\text{tot}}}{K_c^{\text{tot}}} \quad (8)$$

を導入する。図 9 は、縦軸に $\mu_s^{\text{eff}} - \mu_k^{\text{eff}}$ 、横軸に κ をとり、図 8 に示した計算値を 1 枚の両対数グラフ上にま

(a) Effect of total bulk stiffness K_b^{tot} (b) Effect of total tangential contact stiffness K_c^{tot}

Fig. 8 Numerical results; effects of total bulk stiffness K_b^{tot} and total tangential contact stiffness K_c^{tot} on $\mu_s^{\text{eff}} - \mu_k^{\text{eff}}$; $E = 2.5$ GPa, $M/LS = 1.2 \times 10^3$ kg/m³, $K = 0.8$ MN/m, $F_Z = 400$ N, $V = 0.1$ mm/s, $\mu_s = 1.0$, and $\mu_k = 0.5$

Fig. 9 Numerical results; relationship between $\mu_s^{\text{eff}} - \mu_k^{\text{eff}}$ and stiffness ratio κ ; solid line: fitting curve (slope: 0.37)

とめたものである。すべての値が一直線上にスケールされていることから、 $\mu_s^{\text{eff}} - \mu_k^{\text{eff}}$ と κ の間に次の関係を認めることができる。

$$\mu_s^{\text{eff}} - \mu_k^{\text{eff}} \propto \kappa^\beta \quad (9)$$

ただし、 β は定数 ($\beta = 0.37$) である。式(9)より、 μ_s^{eff} に及ぼす K_b^{tot} と K_c^{tot} の影響は、剛性比 κ の影響としてまとめられることがわかる。

6・2 剛性比が実効的な静摩擦係数を決めるメカニズム

式(8)で定義される剛性比 κ は、式(4)と(5)を用いることにより、次のように変形することができる。

$$\kappa = \frac{K_b^{\text{tot}}}{K_c^{\text{tot}}} = \frac{ES}{LNk_c} = \left(\frac{l_0}{L} \right)^2 \quad (10)$$

(a) $\kappa = 0.01$ (b) $\kappa = 0.08$

Fig. 10 Numerical results; temporal change of tangential load F_X and snapshots of profile of f_i/w for different values of stiffness ratio $\kappa = 0.01$ and 0.08 ; $S = 200 \text{ mm}^2$, $E = 2.5 \text{ GPa}$, $M/LS = 1.2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $K = 0.8 \text{ MN/m}$, $F_Z = 400 \text{ N}$, $V = 0.1 \text{ mm/s}$, $\mu_s = 2.0$, and $\mu_k = 0.5$

ここで、 l_0 は Amundsen ら⁽¹⁰⁾により導入された長さの次元を持つ量：

$$l_0 = \sqrt{\frac{LES}{Nk_c}} \quad (11)$$

であり、平衡状態にある系の全接点を下面に固定したまま F_X を準静的に加えるとき、 $l_0/L \ll 1$ （すなわち $\kappa \ll 1$ ）を満たす条件下において、スライダの左端から指数関数的に減少する f_i のプロファイルを表す緩和長を表す。

図 10 は、 $\kappa = 0.01$ および 0.08 について、 F_X の時間変化と f_i/w のプロファイルのスナップショットを示す。ただし、ここでは $\mu_s = 2.0$ および $\mu_k = 0.5$ のもと、すべてのブロックと接点が平衡状態にある仮想的な巨視すべりでの内部変形：

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = \frac{1}{2}(i-1)(i-2N)\frac{\mu_k w}{k} \\ y_i = x_i - \frac{\mu_k w}{k_c} \end{array} \right. \quad (12)$$

Fig. 11 Numerical results; relationship between effective static friction coefficient μ_s^{eff} and stiffness ratio κ ; solid line: Eq. (15) for $\alpha = 0.72$, $\beta = 0.37$, and $\gamma = 1.06$

をブロックと接触点の初期変位として与え、初速度はすべて零とした。(このとき結果的に前兆現象が発生せず、初期状態から最初の巨視すべりまでの間、 f_i のプロファイルがなめらかになり、現象の本質を把握するのに適した例題となる。)

図 10 に示した $\kappa = 0.01$ および 0.08 のいずれの場合も、初期状態では $f_i/w = \mu_k = 0.5$ の一様なプロファイルを示しており (スナップショット 1), F_X の増加とともに左端の値 f_l/w が増加して、指数関数的に減少するプロファイルが現れる (スナップショット 2). 左端の値が $f_l/w = \mu_s = 2.0$ に達すると (スナップショット 3), 左端の接触点に生じる固着すべり遷移をきっかけとして、左端から右端へ剪断破壊が伝播して、全接触点が一瞬時にスリップ状態となり、巨視すべりが現れる (スナップショット 4).

ここで、 $\kappa = 0.01$ と 0.08 のスナップショット 3 を比較すると、緩和長は前者の方が小さく、 f_i/w のプロファイルが左側に偏在していることがわかる。また、巨視すべりの直前までは準静的な状況とみなすことができるので、スナップショット 3 では f_i の総和が F_X に等しく、 F_X は f_i/w のプロファイルの面積 (図中の塗りつぶした部分の面積) に比例する。以上を考慮すると、 $\kappa = 0.01$ での μ_s^{eff} と $\kappa = 0.08$ での μ_s^{eff} の値が異なるメカニズムの本質は、 f_i のプロファイルの偏りにあることがわかる。すなわち、剛性比 κ を小さくすると、式(10)に従い緩和長 l_0 が小さくなり、 f_i のプロファイルが偏在化して、その総和を減じる効果を持つ。それが結果的には実効的な最大静摩擦力を減じて、 μ_s^{eff} を低下させる効果を持つ。

なお、剛なスライダの場合には、巨視すべりの直前において、全接触点が $f_i/w = \mu_s = 2.0$ となり、この状況に限り、 $\mu_s^{\text{eff}} = \mu_s$ となる。一方、スライダが弾性変形する場合には、一般に巨視すべりの直前で $f_i/w < \mu_s = 2.0$ となる接触点が存在するので、必然的に $\mu_s^{\text{eff}} < \mu_s$ となり、実効的な静摩擦係数は真の静摩擦係数よりも低く現れる。

6・3 実効的な静摩擦係数の設計式

実効的な摩擦係数は、バルクの変形を特徴づける剛性比 κ だけでなく、真の摩擦係数にも依存すると予想される。そこで、先に式(9)を得たように、両対数グラフ上において、縦軸に実効的な摩擦係数の差 $\mu_s^{\text{eff}} - \mu_k^{\text{eff}}$ 、横軸に真の摩擦係数の差 $\mu_s - \mu_k$ をとって両者の関係を調べたところ、次の関係式を得た。

$$\mu_s^{\text{eff}} - \mu_k^{\text{eff}} \propto (\mu_s - \mu_k)^\gamma \quad (13)$$

ただし、 γ は定数 ($\gamma = 1.06$) である。

Fig. 12 Experimental results; relationship between $\mu_s^{\text{eff}} - \mu_k^{\text{eff}}$ and $L^{-\beta}$ ($\beta = 0.37$); solid line: fitting curve with a slope of unity

以上に得られた式(9)と(13)をまとめると、次の関係式が得られる。

$$\mu_s^{\text{eff}} - \mu_k^{\text{eff}} = \alpha \kappa^\beta (\mu_s - \mu_k)^\gamma \quad (14)$$

ただし、 α は定数である。さらに、真の動摩擦係数と実効的な動摩擦係数が一致したことを考慮すると、実効的な静摩擦係数を与える次の設計式を最終的に得る。

$$\mu_s^{\text{eff}} = \mu_k + \alpha \kappa^\beta (\mu_s - \mu_k)^\gamma \quad (15)$$

図 11 は、 $\kappa \ll 1$ の範囲で、スライダの剛性を決めるパラメータ (L , S , K_c^{tot}) と接触点に働く真の静摩擦係数 (μ_s) の値をそれぞれ変えて、合計 60 条件での実効的な静摩擦係数 (μ_s^{eff}) の値を計算し、 μ_s^{eff} と κ の関係をまとめたものである。ただし、図中の曲線は、式(15) (ただし、 $\alpha = 0.72$, $\beta = 0.37$, $\gamma = 1.06$) を表す。いくらかのばらつきはあるものの、すべての計算結果が曲線の近くに位置していることから、少なくとも今回の計算条件の範囲では、式(15)の妥当性が認められる。

また、式(4)より K_b^{tot} が L^{-1} に比例することと、(詳細は割愛するが) 実験的に定めた K_c^{tot} が L によらなかったことを考慮すると、 κ は L^{-1} に比例すると考えてよい。そこで、実験的に得られた $\mu_s^{\text{eff}} - \mu_k^{\text{eff}}$ を縦軸、 $L^{-\beta}$ を横軸にとって整理すると、図 12 が得られる。実験的に得た 3 点の値は、式(9)および式(14)が示すとおり、傾き 1 の直線付近に位置することから、本考察を通して得た μ_s^{eff} の設計式の妥当性を支持している。

なお、駆動速度 V を 0.1 mm/s から 10 mm/s まで変化させて同様の実験を行ったところ、 μ_s^{eff} は V によらず一定であった。これは、本研究で対象としたアクリル製のスライダとベースブロックのすべり摩擦では、摩擦力の駆動速度依存性を生む内部減衰の効果 (= 広義のヒステリシス摩擦) に比べて凝着摩擦が支配的であったことを意味する。しかし、鋼球とゴム平板のすべり摩擦など、内部減衰を無視することができない場合には、このたび得た設計式(15)に修正が必要であると考えられる。

また、垂直荷重 F_Z を 100 N から 400 N まで変化させて同様の実験を行ったところ、 μ_s^{eff} は F_Z に対して負の依存性を示した。(同様の結果は、David らの実験⁽⁵⁾においても観察されている。) これらの実験事実は、 K_c^{tot} が F_Z に比例する⁽¹²⁾ことに起因していると考えられる。(なぜなら、式(8)より κ は K_c^{tot} に反比例するので、 κ は F_Z に反比例する。この関係を式(15)に代入すれば、 μ_s^{eff} が F_Z に対して負の依存性が現れることを説明できる。) 今後の詳細な検討は必要だが、このたび得た設計式(15)は、接線方向の接触剛性の変化を通して、実効的な静摩擦係数の垂直荷重依存性⁽¹³⁾をある程度まで表現していると考えられる。

7. 結 言

アクリル製のスライダとベースブロックのすべり摩擦を対象とした実験と数値解析を通して、スライダの弾性変形に着目した静摩擦係数の設計指針を検討した。その結果、実効的な静摩擦係数を決める要因として、スライダの弾性的な内部変形と接触部を伝播する剪断破壊の重要性を改めて確認するとともに、実効的な静摩擦係数の値を支配する因子として、スライダのバルク剛性と接線方向の接触剛性の比の存在を見出した。

本検討を通して最終的に得た設計式(15)には、所望の摩擦係数を得るための指針について、冒頭に述べたふたつのコンセプトが含まれている。すなわち、真の摩擦係数 (μ_s と μ_k) からのアプローチは「インターフェースのミクロな性質に着目した摩擦の設計」に相当し、剛性比 (κ) からのアプローチは「バルクのマクロな変形に着目した摩擦の設計」に相当する。これらふたつのコンセプトを併用することにより、機械システムの摺動部に必要となる実効的な静摩擦係数の設計が、従来よりも柔軟になることが期待される。

文 献

- (1) Nakano, K., “Two dimensionless parameters controlling the occurrence of stick-slip motion in a 1-DOF system with Coulomb friction”, *Tribology Letters*, Vol. 24, No. 2 (2006), pp. 91–98.
- (2) Nakano, K., and Maegawa, S., “Safety-design criteria of sliding systems for preventing friction-induced vibration”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 324, No. 3–5 (2009), pp. 539–555.
- (3) Nakano, K., and Maegawa, S., “Occurrence limit of stick-slip: dimensionless analysis for fundamental design of robust stable systems”, *Lubrication Science*, Vol. 22, No. 1 (2010), pp. 1–18.
- (4) Maegawa, S., Suzuki, A., and Nakano, K., “Precursors of global slip in a longitudinal line contact under non-uniform normal loading”, *Tribology Letters*, Vol. 38, No. 3 (2010), pp. 313–323.
- (5) David, O.B., and Fineberg, J., “Static friction coefficient is not a material constant”, *Physical Review Letters*, Vol. 106, No. 25 (2011), 254301.
- (6) Trømborg, J., Scheibert, J., Amundsen, D.S., Thøgersen, K., and Sørenssen, A.M., “Transition from static to kinetic friction: insights from a 2D model”, *Physical Review Letters*, Vol. 107, No. 7 (2011), 074301.
- (7) Rubinstein, S.M., Cohen, G., and Fineberg, J., “Detachment fronts and the onset of dynamic friction”, *Nature*, Vol. 430, No. 7003 (2004), pp. 1005–1009.
- (8) Rubinstein, S.M., Shay, M., Cohen, G., and Fineberg, J., “Crack-like processes governing the onset of frictional slip”, *International Journal of Fracture*, Vol. 140, No. 1–4 (2006), pp. 201–212.
- (9) Rubinstein, S.M., Cohen, G., and Fineberg, J., “Dynamics of precursors to frictional sliding”, *Physical Review Letters*, Vol. 98, No. 22 (2007), 226103.
- (10) Amundsen, D.S., Scheibert, J., Thøgersen, K., Trømborg, J., and Sørenssen, A.M., “1D model of precursors to frictional stick-slip motion allowing for robust comparison with experiments”, *Tribology Letters*, Vol. 45, No. 2 (2012), pp. 357–369.
- (11) Nakano, K., and Maegawa, S., “Stick-slip in sliding systems with tangential contact compliance”, *Tribology International*, Vol. 42, No. 11–12 (2010), pp. 1771–1780.
- (12) Berthoud, P., and Baumberger, T., “Shear stiffness of a solid-solid multicontact interface”, *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 454, No. 1974 (1998), pp. 1615–1634.
- (13) Otsuki, M., and Matsukawa, H., “Systematic breakdown of Amontons’ law of friction for an elastic object locally obeying Amontons’ law”, *Scientific Reports*, Vol. 3 (2013), 1586.