LuGre モデルに基づく時変外乱オブザーバを使用した摩擦補償*

星野 大貴^{*1}, 石川 潤^{*2}

Friction Compensation Using Time Variant Disturbance Observer Based on the LuGre Model

Daiki HOSHINO^{*1} and Jun ISHIKAWA^{*1} Tokyo Denki Univ. Dept. of Robotics and Mechatronics
5, Senjuasahi-cho, Adachi-ku, Tokyo 120-8551, Japan

This paper proposes a time variant disturbance observer based on the LuGre friction model for friction compensation. The LuGre model is a dynamic friction model that can express nonlinear characteristics. In the proposed method, an ideal model of a controlled plant without friction is augmented by adding the LuGre model, and the augmented model is used to construct a disturbance observer to estimate friction. Observer gains are derived every sampling period by solving the discrete-time Ricatti equation after locally linearizing the nonlinear term as a function of velocity in the LuGre model. Thus, the observer gains are to be a function of velocity, and the observer becomes time variant. LuGre model parameters used in the controller design have been identified by preliminary experiments using a linear stage driven by a ball screw with an AC motor. In the identification process, a least square method is used so as to minimize the difference between the real friction and the friction generated by the LuGre model. To show the validity of the proposed method, the friction compensation performance of the proposed disturbance observer was compared with that of an existing the type-1 disturbance observer by experiment. The experimental results showed that the proposed disturbance observer can eliminate influence of the friction and is effective to improve positioning accuracy.

Key Words : LuGre Model, Friction Compensation, Disturbance Observer, Positioning Control

1. はじめに

近年, NC 工作機械やハードディスク装置などの高性能なメカトロニクスシステムでは, 位置決め高速化および高精度化のニーズが急速に高まっている. 例えば, NC 工作機械では, 生産性や製品の加工精度の向上を実現するために, ハードディスク装置では, より短時間でヘッドを目標地点に移動させることや, より高い面記憶密度を達成するために, 位置決め制御の高速・高精度化が必要である. しかし, 高速かつ高精度な位置決め制御を実現するためには, 摩擦, 機械共振, センサノイズなど解決しなければならない問題が多くある. とくに摩擦は, Åström らの論文⁽¹⁾⁽²⁾に示されるように, 制御対象に対して好ましくないリミットサイクルを生じさせることや, モデルベースな制御手法に誤差を生じさせるなど位置決め精度の向上を阻害する大きな要因の一つとなっている. この問題を解決するために, 様々な摩擦モデルに基づいた摩擦補償を行う手法が提案されてきている⁽³⁾⁻⁽⁷⁾.

摩擦は, 速度に応じて変化するヒステリシス特性や Stribeck 効果など動的かつ非線形な性質を持っている. 静止摩擦は対象とする物体が静止しているとき, その物体に加わる力に比例して増加するが, Stribeck 効果は対象とする物体が静止している状態から動作し始めた直後に, 摩擦が一時的に減少するという動的な現象のことである. このような現象を説明するために, 摩擦補償に利用される摩擦モデルは動的なモデルが一般的である. 非線形摩擦特性を数学モデルで表現するための研究は古くから行われている. Dahl は, 位置依存のヒステリシス特性を表現することができる摩擦モデルを提案している⁽⁸⁾. 小泉らは, 転がり摩擦の特性解析に基づいた摩擦モデル

* 原稿受付 2012 年 10 月 18 日

^{*1} 東京電機大学 未来科学部 (〒120-8551 東京都足立区千住旭町 5 番)^{*2} 正員, 東京電機大学 未来科学部

E-mail: ishihawa@fr.dendai.ac.jp

を提案している⁽⁹⁾。Åström らは、Dahl の摩擦モデルを拡張した摩擦モデルである LuGre モデルを提案している。一般に、摩擦現象には、対象の物体が静止している状態のスティックモードと、動いている状態のスリップモードという特性が異なる 2 つのモードが存在するが、LuGre モデルでは、それらのモードの連続的な切り替えや、速度に応じて変化するヒステリシス特性、Stribeck 効果などの非線形摩擦特性の表現が可能である⁽¹⁾⁽²⁾。このような LuGre モデルの特長は、モードの切り替えを含まないモデルベースの摩擦補償により高速・高精度な位置決め制御を実現するために有効である。例えば、Freidovich らは LuGre モデルに基づく摩擦補償器を提案し、リアプノフ安定理論を利用して、その安定性を示している⁽¹⁰⁾。この文献(10)では、まず確定的な制御器の設計手法に焦点をあて、モデルパラメータの変動は考慮せずにノミナル値での検討を行っている。一方で、非線形な摩擦モデルのパラメータを正確に同定することは難しい場合も多く、経時変化への対応なども考慮した場合、摩擦補償の一つの実用上有効な制御手法として適応制御があり、数多くの報告がなされている。例えば、文献(11)が適応制御の摩擦補償への応用に関する事例の解説としては詳しい。LuGre モデルに関するものでは、文献(6)では LuGre モデルの一部のパラメータを既知とした場合に対する適応制御の手法が提案され、また、文献(12)では動的摩擦補償を考慮に入れた適応型 H_∞ 制御系の一設計手法が提案されている。また、文献(13)では、LuGre モデルを改良し、Stribeck 効果を 1 次の非線形差分方程式でモデル化し、適応制御を行う手法が報告されている。

本稿では、LuGre モデルに基づいた摩擦補償器の一設計法を提案する。提案する摩擦補償器は、LuGre モデルに基づく外乱オブザーバである⁽¹⁴⁾。すなわち、オブザーバのベースモデルとして LuGre モデルを採用し、これを離散時間の時変外乱オブザーバとして実装する一手法を提案する。そして、複数の移動距離に対して位置決め実験を行い、摩擦のダイナミクスを単純なステップ外乱とする 1 型の外乱オブザーバを用いた制御系との性能比較を通して、その有効性を示す。ここで、比較の対象に 1 型の外乱オブザーバを用いた理由は、これが摩擦補償の手法としては最も基本的でよく知られたものの一つであり、これと性能比較を行うことで、第三者に提案手法の性能を客観的に提示するためである。以下、2 章では、摩擦補償器を設計するために使用する LuGre モデルと制御対象であるボールねじで駆動される一軸直動ステージのモデリングについて説明する。そして、LuGre モデルパラメータを同定する一手法を述べ、予備実験より LuGre モデルパラメータを同定した結果をまとめる。3 章では、提案する LuGre モデルに基づく時変外乱オブザーバの設計方法について、時変の制御対象の離散化を中心に説明する⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾。4 章では、最適制御理論を利用して、3 章で設計した LuGre モデルに基づく時変外乱オブザーバを使用した 2 自由度位置決め制御系の設計方法を述べる。5 章では、オブザーバとして、摩擦を推定しない一般的な状態オブザーバを使用した場合、1 型外乱オブザーバを使用した場合、および提案した LuGre モデルに基づく時変外乱オブザーバを使用した場合のそれぞれに対して、3 種類の 2 自由度位置決め制御系を実装し、提案手法の有効性を検証した結果についてまとめる。

2. LuGre モデルおよび制御対象のモデリング

2・1 LuGre モデル

通常、物体の接触面は平滑ではないので、摩擦が発生する。LuGre モデルは、図 1 のように物体の接触面を剛毛の集まりと考え、剛毛の剛性と粘性により摩擦をモデル化している。モデル中ではこの剛毛をバネ・ダンパ系で表現する。LuGre モデルのパラメータおよび変数の定義を表 1 に示す。

LuGre モデルにより生成される摩擦 F_L は

$$F_L = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v \quad (1)$$

で与えられる。ただし、 z は剛毛の変位であり、以下のダイナミクスを有している。

$$\dot{z} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \quad (2)$$

$$g(v) = F_C + (F_S - F_C) e^{-\left| \frac{v}{v_s} \right|} \quad (3)$$

ここで、式 (3) の $g(v)$ はクーロン摩擦と Stribeck 効果を表している。また、式 (1) の粘性摩擦を表す $\sigma_2 v$ は線形であるため、制御対象モデルに明に考慮して補償することが可能である。したがって、以下では提案する外乱オブザーバが補償の対象とする摩擦として

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} \quad (4)$$

で与えられる項のみを考える。ここで、式 (4) は $\dot{z}$ の項を含むので、これを消去するために式 (2) を用いれば摩擦 F は

$$F = \sigma_1 v + \left(\sigma_0 - \sigma_0 \sigma_1 \frac{|v|}{g(v)} \right) z \quad (5)$$

と表現することもできる。

Object contacting with ground Contact surface is modeled by bristles Bristles are described by stiffness and damping

Fig. 1 Schematic explanation of the LuGre model.

Fig. 2 Linear stage with ball screw and AC motor.

Fig. 3 Simplified model of linear stage.

Table 1 Definition of parameters and variables of the LuGre model.

Definition	Symbol	Value/Unit
Bristle stiffness	σ_0	See Table 2.
Bristle damping	σ_1	
Viscous friction coefficient	σ_2	
Coulomb friction force	F_c	
Static friction force	F_s	
Stribeck velocity	v_s	
Torque constant of AC motor	K_a	$5.300 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m/V}$
Torque/force conversion gain	K_t	$8.545 \times 10^2 \text{ N/(N} \cdot \text{m)}$
Mass of system	m	3.270 kg
Position of mass	p	m
Velocity of mass	v	m/s
Bristle deformation	z	m

2・2 制御対象モデル

本稿で考える制御対象は、図 2 に示すボールねじで駆動される一軸直動ステージであり、摩擦の影響を受ける。回転動力源には AC モータを利用しており、エンコーダを用いて AC モータの回転角度を計測している。ここでは、この制御対象を等価な並進質点系に変換し、図 3 のようなモデルとして考える。図 3 中に用いられているパラメータと変数は表 1 に示している。図 3 の並進質点系の運動方程式は、

$$m\ddot{p} = K_t \cdot K_a \cdot u - F - \sigma_2 v \quad (6)$$

となり、その状態空間表現は、状態ベクトルを $[p \ v \ z]^T$ とし、式 (5) を用いて式 (6) 中の摩擦 F を消去すれば、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m} & -\frac{\sigma_0 - \sigma_0 \sigma_1 \alpha(v)}{m} \\ 0 & 1 & -\sigma_0 \alpha(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_t \cdot K_a}{m} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (7)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v \\ z \end{bmatrix} \quad (8)$$

となる．ここで，

$$\alpha(v) = \frac{|v|}{g(v)} \quad (9)$$

であり， u は指令電圧である．

2・3 LuGre モデルパラメータの同定

本節では，LuGre モデルパラメータを実験的な手法で同定する方法について説明し，その実験結果について述べる．さらに，実験により求めたパラメータの妥当性について検証する．

2・3・1 LuGre モデルパラメータの同定実験

ここでは，LuGre モデルパラメータを求めるための同定実験の手順について述べる．以下で具体的な手順を述べるが，おおよその流れとしては，まず，位置決め制御時に発生する実摩擦 F_{real} を取得する．その実摩擦 F_{real} と推定摩擦 F_{est} との誤差の二乗和を評価関数とし，その評価関数が最小になるように LuGre モデルパラメータを導出するというものである．具体的には以下の手順による．

<手順 1：位置決め制御時に発生する実摩擦の計測>

一般的な学習制御を用いて滑らかな目標軌道にステージの実位置をほぼ完全に追従させたときの制御入力 u_{ex} ，およびステージの実位置軌道 p_r を記録する．移動距離に対するばらつきを考慮してパラメータを同定するために，移動距離がエンコーダのカウント値で 2000（約 1 cm），6000（約 3 cm），8000（約 4 cm）パルスの 3 種類とし，それぞれにおいて，データを記録する．一方で，シミュレータ上で摩擦のない理想状態の制御対象に対して，先ほど記録した実位置軌道 p_r を目標軌道として与え，同様にして，シミュレータ上の制御対象の位置が目標軌道に完全に追従したときの制御入力 u_{sim} を求める．これら二つの制御入力 u_{ex} と u_{sim} を用いると，実摩擦 F_{real} は，

$$F_{real} = K_t K_a (u_{ex} - u_{sim}) \quad (10)$$

で与えられる．ただし，制御入力の次元は電圧であるため，AC モータのトルク定数 K_a と，AC モータの発生トルクから発生力までの変換ゲイン K_t を乗じることによって，力次元に変換している．

<手順 2：評価関数を最小にする LuGre モデルパラメータの導出>

評価関数 J_{para} を

$$J_{para} = \sum_{i=0}^N \left\{ (F_{real2000}(i) - F_{est2000}(i))^2 + (F_{real6000}(i) - F_{est6000}(i))^2 + (F_{real8000}(i) - F_{est8000}(i))^2 \right\} \quad (11)$$

と与える．ここで， $F_{real2000}$ ， $F_{est2000}$ は，移動距離が 2000 パルスのときの実摩擦と推定摩擦であり， $F_{real6000}$ ， $F_{est6000}$ ，および $F_{real8000}$ ， $F_{est8000}$ は，それぞれ移動距離が 6000 パルスおよび 8000 パルスのときの実摩擦と推定摩擦である．また，推定摩擦は，同定のために変化させたパラメータに対して，LuGre モデルを用いて計算により求めるもの

である．評価関数 J_{para} を最小とする LuGre モデルパラメータは，数値的解析ツールを用いて計算した．具体的には式 (11) の評価関数を最小にするために，MATLAB®の最適化関数の一つである `fminsearch` 関数を使用した⁽¹⁷⁾．

2・3・2 同定した LuGre モデルパラメータの検証

以上の手順に従って，同定した LuGre モデルパラメータを表 2 に，また，式 (10) で求めた実摩擦 F_{real} と同定したパラメータにより計算した摩擦の比較結果を図 4～図 6 に，摩擦のヒステリシス特性を図 7 に示す．図 4～図 7 の青色の実線は実摩擦，赤色の破線は LuGre モデルより生成された摩擦である．図 4～図 6 はそれぞれ，移動距離が 2000，6000，8000 パルスの際の実摩擦と推定摩擦の比較結果である．図 4～図 6 の結果より，摩擦に対する LuGre モデルより生成された摩擦の適合率を計算する．ここで用いた適合率は

$$Fit = \left(1 - \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (\hat{y}(k) - y(k))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})^2}} \right) \times 100 [\%] \quad (12)$$

で定義されるものである．式 (12) の $y(k)$ は真の出力，すなわち実摩擦であり， $\hat{y}(k)$ はモデル出力，すなわち LuGre モデルによる計算結果である．なお， $\bar{y}$ は真の出力の平均値である．式 (12) に基づき計算した移動距離が 2000，6000，8000 パルスの際の適合率はそれぞれ，56.4 %，43.3 %，23.3 %であった．図 4～図 6 の比較結果から，同定したパラメータを使用した LuGre モデルは，実機に作用した摩擦と近い時間応答の特徴を表現できていることが確認できた．また，図 7 のヒステリシス特性の比較結果より，求めたパラメータを使用した LuGre モデルは，摩擦の非線形ばね特性などに起因するヒステリシス特性を表現できている．得られた適合率は非常に高いものとはならなかったが，後述の実験結果にも示されるように，表 2 の同定結果に基づく LuGre モデルを，オブザーバを構成するベースとして使用することで，オブザーバのフィードバック帯域では補償が難しい移動開始時の速い摩擦の変化に対応することが可能となる．また，適合率を下けている一つの理由である比較的遅い摩擦の挙動については，推定誤差を漸近的に 0 とするようにフィードバックがかかるため定常偏差などの問題は生じない．以上の考察より，表 2 の同定結果を用いて以降の実験などは行うこととした．なお，環境温度の変化や機構系の経年劣化などで，LuGre モデルのパラメータに変化があった場合はパラメータの同定が再度必要となるが，今回の実験条件（移動距離や速度，室温の変化）の範囲では，表 2 の同定結果を共通で使用しても提案手法の有効性は認められた．また，大きなパラメータの変化に対応するため，適応制御の手法を提案手法にあわせて活用することは，今後の課題の一つである．

Table 2 Parameter of the LuGre model.

Parameter	value
σ_0	4.662×10^4 N/m
σ_1	5.640×10^2 kg/s
σ_2	93.09 kg/s
F_C	2.353 N
F_S	11.77 N
v_S	9.144×10^{-2} m/s

Fig. 4 Comparison of real and modeled friction (2000 pulse).

Fig. 5 Comparison of real and modeled friction (6000 pulse).

Fig. 6 Comparison of real and modeled friction (8000 pulse).

Fig. 7 Hysteresis characteristic for friction.

3. LuGre モデルに基づく時変外乱オブザーバ

3・1 連続時間の LuGre モデルに基づく時変外乱オブザーバ⁽¹⁴⁾

本節では、次節の離散時間での議論の準備として、LuGre モデルに基づく時変外乱オブザーバについて、まず、連続時間に関する文献(14)の結果を簡単に振り返る。連続時間では、外乱オブザーバ (DOB: Disturbance Observer) は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \\ \hat{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_{1m} + \sigma_{2m}}{m} & -\frac{\sigma_{0m} - \sigma_{0m}\sigma_{1m}\alpha(\hat{v})}{m} \\ 0 & 1 & -\sigma_{0m}\alpha(\hat{v}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_t \cdot K_a \\ m \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} k_{L1}(\hat{v}) \\ k_{L2}(\hat{v}) \\ k_{L3}(\hat{v}) \end{bmatrix} (p - \hat{p}) \\ &:= \mathbf{A}_L(\hat{v}) \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \\ \hat{z} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_L u + \mathbf{K}_L(\hat{v})(p - \hat{p}) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \\ &:= \mathbf{C}_L \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{v} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

のように与えられる⁽¹⁴⁾. ここで, $\mathbf{K}_L(\hat{\mathbf{v}}) := [k_{L1}(\hat{\mathbf{v}}) \ k_{L2}(\hat{\mathbf{v}}) \ k_{L3}(\hat{\mathbf{v}})]^T$ は時変のオブザーバゲインである. また, 下付き文字 m はパラメータが同定した値であることを表しており, 記号 $\hat{\cdot}$ は推定値であることを表している. LuGre モデルに基づく時変外乱オブザーバ (以下では, 時変 DOB と呼ぶ) の設計では, 式 (13) の非線形項 $\alpha(\hat{\mathbf{v}})$ がサンプリング時刻ごとに定数であると仮定する. すなわち, 状態方程式が瞬時には線形時不変と考え, 定常カルマンフィルタの枠組みより, 重み R_L と $\mathbf{Q}_L$ を設計パラメータとして, リカッチ方程式

$$\mathbf{Q}_L + \mathbf{A}_L \mathbf{P}_L(\hat{\mathbf{v}}) + \mathbf{P}_L(\hat{\mathbf{v}}) \mathbf{A}_L^T - \mathbf{P}_L(\hat{\mathbf{v}}) \mathbf{C}_L^T R_L^{-1} \mathbf{C}_L \mathbf{P}_L(\hat{\mathbf{v}}) = \mathbf{O} \quad (15)$$

の正定対称解 $\mathbf{P}_L(\hat{\mathbf{v}})$ を用いて,

$$\mathbf{K}_L(\hat{\mathbf{v}}) = \mathbf{P}_L(\hat{\mathbf{v}}) \mathbf{C}_L^T R_L^{-1} \quad (16)$$

のようにオブザーバゲインを決定していく. その結果, 状態に依存した時変のオブザーバゲインが $\mathbf{K}_L(\hat{\mathbf{v}}) = [k_{L1}(\hat{\mathbf{v}}) \ k_{L2}(\hat{\mathbf{v}}) \ k_{L3}(\hat{\mathbf{v}})]^T$ のように導出される. ただし, 定常カルマンフィルタの設計法は, 実際のシステムノイズおよび観測ノイズの性質に基づく本来の設計法ではなく, 推定状態および観測出力に適切に重みを与えて安定なオブザーバゲインを導出する設計法として使用する.

3・2 離散時間の LuGre モデルに基づく時変外乱オブザーバ

次に, 実際に使用する離散時間の時変 DOB を導出する⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾. 前節の式 (13) の右辺第 1 項および第 2 項は, 時不変部分と時変部分に分けることができるので, オブザーバのベースとなるモデルを時不変部分と時変部分に別々に分けて離散化し, 離散化後にもう一度統合し, 離散時間のオブザーバゲインをそのモデルに対して設計する. 時不変部分は, その状態ベクトルの推定値を $\hat{\mathbf{x}}_m = [\hat{p} \ \hat{\mathbf{v}}]^T$ とすると,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\sigma_{2m}}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_t \cdot K_a}{m} \end{bmatrix} u \quad (17)$$

であり, 以下では,

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}_m = \mathbf{A}_m \hat{\mathbf{x}}_m + \mathbf{B}_m u \quad (18)$$

と表記する. 式 (18) の離散時間状態方程式は, その状態ベクトルの推定値を $\hat{\mathbf{x}}_{md} = [\hat{p}_d(k) \ \hat{\mathbf{v}}_d(k)]^T$ とすると,

$$\hat{\mathbf{x}}_{md}(k+1) = \mathbf{A}_{md} \hat{\mathbf{x}}_{md}(k) + \mathbf{B}_{md} u_d(k) \quad (19)$$

で得られる. ただし,

$$\mathbf{A}_{md} = e^{\mathbf{A}_m T_s} \quad (20)$$

$$\mathbf{B}_{md} = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_m \tau} \mathbf{B}_m d\tau \quad (21)$$

であり, T_s はサンプリング時間, k は k 番目のサンプリングを示すための時間インデックスである.

一方で, 式 (13) の時変部分のダイナミクスは, 式 (2) によって与えられ, それを離散化すれば

$$\begin{aligned}
\hat{z}_d(k+1) &= e^{-\sigma_{0m}\alpha_d(\hat{v}_d(k))T_s} \hat{z}_d(k) - \frac{1}{\sigma_0\alpha_d(\hat{v}_d(k))} \left(e^{-\sigma_0\alpha_d(\hat{v}_d(k))T_s} - 1 \right) \hat{v}_d(k) \\
&= e^{-\sigma_{0m} \frac{|\hat{v}_d(k)|}{g(\hat{v}_d(k))} T_s} \hat{z}_d(k) - \frac{g(\hat{v}_d(k))}{\sigma_0|\hat{v}_d(k)|} \left(e^{-\sigma_0 \frac{|\hat{v}_d(k)|}{g(\hat{v}_d(k))} T_s} - 1 \right) \hat{v}_d(k)
\end{aligned} \quad (22)$$

なる離散時間システムが得られる。ただし、ここでは式 (9) の関係より $\alpha_d(\hat{v}_d(k)) := |\hat{v}_d(k)|/g(\hat{v}_d(k))$ という形で式を変形している。したがって、離散時間の時変 DOB は、その推定値を $\hat{\mathbf{x}}_{Ld}(k) = [\hat{p}_d(k) \ \hat{v}_d(k) \ \hat{z}_d(k)]^T$ とし、式 (19) と式 (22) を統合すると、

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{p}_d(k+1) \\ \hat{v}_d(k+1) \\ \hat{z}_d(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{md} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{B}_{mgd}\sigma_{1m} \end{bmatrix} \vdots -\mathbf{B}_{mgd}(\sigma_{0m} - \sigma_{0m}\sigma_{1m}\alpha(\hat{v}_d(k))) \\ 0 & -\frac{g(\hat{v}_d(k))}{\sigma_{0m}|\hat{v}_d(k)|} \left(e^{-\sigma_{0m} \frac{|\hat{v}_d(k)|}{g(\hat{v}_d(k))} T_s} - 1 \right) \vdots e^{-\sigma_{0m} \frac{|\hat{v}_d(k)|}{g(\hat{v}_d(k))} T_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_d(k) \\ \hat{v}_d(k) \\ \hat{z}_d(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{md} \\ 0 \end{bmatrix} u_d(k) \\
&\quad + \begin{bmatrix} k_{Ld1}(\hat{v}_d(k)) \\ k_{Ld2}(\hat{v}_d(k)) \\ k_{Ld3}(\hat{v}_d(k)) \end{bmatrix} (p_d(k) - \hat{p}_d(k))
\end{aligned} \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_d(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_d(k) \\ \hat{v}_d(k) \\ \hat{z}_d(k) \end{bmatrix} \quad (24)$$

と導出される。以下では、式 (23) および式 (24) を

$$\hat{\mathbf{x}}_{Ld}(k+1) = \mathbf{A}_{Ld}(\hat{v}_d(k))\hat{\mathbf{x}}_{Ld}(k) + \mathbf{B}_{Ld}u_d(k) + \mathbf{K}_{Ld}(\hat{v}_d(k))e_d(k) \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_d(k) = \mathbf{C}_{Ld}\hat{\mathbf{x}}_{Ld}(k) \quad (26)$$

と表記する。ここで、式 (23) の $\mathbf{B}_{mgd}$ は、連続時間の入力行列

$$\mathbf{B}_{mg} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{bmatrix} \quad (27)$$

を離散化したものであり、

$$\mathbf{B}_{mgd} = \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_m\tau} \mathbf{B}_{mg} d\tau \quad (28)$$

で与えられる。式 (23) より推定される各状態から、摩擦の推定値は

$$\hat{F}_d(k) = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{1m} & \sigma_{0m} - \sigma_{0m}\sigma_{1m}\alpha(\hat{v}_d(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_d(k) \\ \hat{v}_d(k) \\ \hat{z}_d(k) \end{bmatrix} \quad (29)$$

のように計算できる。なお、時変のオブザーバゲインは、連続時間の場合と同様の手順で、設計している。すなわち、式 (13) の第 3 項の連続時間のオブザーバゲインによるフィードバック項は、離散時間のオブザーバゲインによるものになることに注意されたい。その時変の離散時間のオブザーバゲインは、

$$\mathbf{K}_{Ld}(\hat{\mathbf{v}}_d(k)) = \mathbf{A}_{Ld} \mathbf{P}_{Ld}(\hat{\mathbf{v}}_d(k)) \mathbf{C}_{Ld}^T \left\{ \left(\mathbf{R}_{Ld} + \mathbf{C}_{Ld} \mathbf{P}_{Ld}(\hat{\mathbf{v}}_d(k)) \mathbf{C}_{Ld}^T \right)^{-1} \right\}^T \quad (30)$$

で与えられる．ここで， $\mathbf{P}_{Ld}(\hat{\mathbf{v}}_d(k))$ は離散時間のリカッチ方程式

$$\mathbf{Q}_{Ld} + \mathbf{A}_{Ld} \mathbf{P}_{Ld}(\hat{\mathbf{v}}_d(k)) \mathbf{A}_{Ld}^T - \mathbf{A}_{Ld} \mathbf{P}_{Ld}(\hat{\mathbf{v}}_d(k)) \mathbf{C}_{Ld}^T \left(\mathbf{R}_{Ld} + \mathbf{C}_{Ld} \mathbf{P}_{Ld}(\hat{\mathbf{v}}_d(k)) \mathbf{C}_{Ld}^T \right)^{-1} \mathbf{C}_{Ld} \mathbf{P}_{Ld} \mathbf{A}_{Ld}^T - \mathbf{P}_{Ld}(\hat{\mathbf{v}}_d(k)) = \mathbf{0} \quad (31)$$

の解である．ただし， $\mathbf{R}_{Ld}$ と $\mathbf{Q}_{Ld}$ はそれぞれ，推定状態と観測出力に対する重みである．式(30)の時変オブザーバゲインは，サンプリング時間ごとに変化する式(31)の離散時間のリカッチ方程式を解き，その解 $\mathbf{P}_{Ld}(\hat{\mathbf{v}}_d(k))$ を用いて求めている．

また，式(23)は， $\alpha(\hat{\mathbf{v}}_d(k)) = \sigma_{0m} / \sigma_{0m} \sigma_{1m}$ のときに不可観測となるため，リカッチ方程式を解けない．そのため，不可観測点近傍では，オブザーバゲインを補間して用いることにした．補間している区間は，任意の位置に極を配置できないが，その区間において，オブザーバの極は安定領域に配置されている．

4. LuGre モデルに基づく時変外乱オブザーバを使用した 2 自由度位置決め制御系の設計

本章では，3・2節で述べた離散時間の時変 DOB を使用した 2 自由度位置決め制御系を設計する．その制御系の構成を図 8 に示す．ただし， $\mathbf{r}_d(k)$ は $\mathbf{r}_d(k) = [r_{pd}(k) \ r_{vd}(k)]^T$ なる 2 次元の目標軌道であり， $r_{pd}(k)$ は目標位置軌道， $r_{vd}(k)$ は目標速度軌道， $u_{fd}(k)$ はフィードフォワード制御入力， $\mathbf{F}_{md}$ は状態フィードバックゲイン， f_g は力の次元の推定摩擦を入力の次元である電圧に変換するゲインである．また，ブロックを結ぶ線は，細線がスカラー信号，太線がベクトル信号を示している．図 8 の制御系は，制御対象，および離散時間の時変 DOB，状態フィードバックコントローラによって構成されている．

ここで，状態フィードバックコントローラの設計に用いる制御対象の離散時間モデルは，粘性摩擦 $\sigma_2 v$ のみを持ち，摩擦 F を含まないモデルであり，その状態方程式のシステム行列および入力行列は，それぞれ式(20)と式(21)で与えられる．この制御対象の離散時間モデルに対して，2 次形式評価関数

$$J_{fd} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \hat{\mathbf{x}}_{md}^T(k) \mathbf{Q}_{fd} \hat{\mathbf{x}}_{md}(k) + R_{fd} u_d^2(k) \right\} \quad (32)$$

を最小にするように状態フィードバックゲイン $\mathbf{F}_{md}$ を設計する．ただし， $\mathbf{Q}_{fd}$ ， R_{fd} はそれぞれ，状態と入力に対する重みである．状態フィードバックゲイン $\mathbf{F}_{md}$ は，離散時間のリカッチ方程式

$$\mathbf{Q}_{fd} + \mathbf{A}_{md}^T \mathbf{P}_{fd}(k) \mathbf{A}_{md} - \mathbf{A}_{md}^T \mathbf{P}_{fd}(k) \mathbf{B}_{md} \left(\mathbf{R}_{fd} + \mathbf{B}_{md}^T \mathbf{P}_{fd}(k) \mathbf{B}_{md} \right)^{-1} \mathbf{B}_{md}^T \mathbf{P}_{fd} \mathbf{A}_{md} - \mathbf{P}_{fd}(k) = \mathbf{0} \quad (33)$$

を満たす正定行列 $\mathbf{P}_{fd}$ を利用して

$$\mathbf{F}_{md} = \left(\mathbf{R}_{fd} + \mathbf{B}_{md}^T \mathbf{P}_{fd} \mathbf{B}_{md} \right)^{-1} \mathbf{B}_{md}^T \mathbf{P}_{fd} \mathbf{A}_{md} \quad (34)$$

と与えられる．最終的に，制御則は，

$$u_{fb}(k) = \mathbf{F}_{md}(\mathbf{r}_d(k) - \hat{\mathbf{x}}_{md}(k)) \quad (35)$$

となる．

目標軌道は，図 9 に示されるように，離散化した制御対象の数値モデルに対して状態フィードバック制御により構成される軌道追従型制御系から生成されている．すなわち，この軌道追従型制御系にジャークを最小にする 5 次関数を使用して生成した目標軌道 $\mathbf{r}(k) = [r_p(k) \ r_v(k)]^T$ を与え，得られた制御対象の数値モデルの位置と速度

を 2 自由度位置決め制御系の目標軌道 $r_d(k)$ とし, また, 制御入力をフィードフォワード制御入力 $u_{ff}(k)$ として使用している.

Fig. 8 Two DOF positioning control system using time variant DOB based on the LuGre model.

Fig. 9 Reference trajectory generator.

5. 位置決め制御実験

離散時間の時変 DOB に基づく摩擦補償制御の有効性を検証するために 2 自由度位置決め制御系を実装し, 摩擦補償なしの場合, 摩擦補償を行う場合のそれぞれについて実験を行い, その結果を比較する.

5・1 位置決め制御系の構成

実験に使用する 2 自由度位置決め制御系は, 従来手法を含めて 3 種類である. 1 つ目はオブザーバとして, 一般的な状態オブザーバ (2 次) を使用し, 摩擦補償を行わないものである. 2 つ目は 1 型の外乱オブザーバ (以下, 1 型 DOB と呼ぶ) を使用して摩擦を推定し, 補償する機構を有するものである. 1 型 DOB は広く一般的に使用される摩擦補償器の一つであるため, 提案手法の比較対象とした. 3 つ目は 3・2 節で設計した時変 DOB を使用して摩擦を推定, 補償する機構を有するものであり, 4 章で設計した制御系 (図 8) である.

2 次の状態オブザーバは式 (19) より,

$$\hat{\mathbf{x}}_{md}(k+1) = \mathbf{A}_{md}\hat{\mathbf{x}}_{md}(k) + \mathbf{B}_{md}u_d(k) + \mathbf{K}_{od}e_d \quad (36)$$

と構成される. ここで, $\mathbf{K}_{od}$ はオブザーバゲインである. 1 型 DOB は, 制御対象にステップ状の外乱が加わることを仮定し, 積分器を付加した外乱オブザーバであり, ステップ状の外乱であれば定常偏差なく推定することができる⁽¹⁸⁾.

2 次の状態オブザーバを使用した場合, および 1 型 DOB を使用した場合の 2 自由度位置決め制御系の構成をそれぞれ図 10, 図 11 に示す. 状態オブザーバおよび 1 型 DOB のオブザーバゲインは, 離散時間のリカッチ方程式を利用して, 定常カルマンフィルタの枠組みで導出する. それぞれの状態フィードバックコントローラは, 4 章に示した設計方法と同様に, 最適制御理論を利用して設計しており, 各状態に対するフィードバックゲインは同一のものをを用いている.

5・2 実験条件

制御対象は, 図 2 のボールねじ駆動の一軸直動ステージであり, その装置構成を図 12 に示す. DSP (Digital Signal Processor) を用いて 3 種類の制御系を実装する. サンプル時間は 1 ms である. LuGre モデルパラメータは表 2 の値を使用する. 状態フィードバックゲインを設計するための重み, および 2 次の状態オブザーバ, 1 型 DOB, 時変 DOB のそれぞれのオブザーバゲインを設計するための重みを表 3 に示す. 表 3 の重みを用いて算出した各ゲインを表 4 に示す. 表 4 の k_{d1} , k_{d2} , k_{d3} はオブザーバゲインを, f_{md1} , f_{md2} は状態フィードバックゲインを表している. また, 閉ループ系の極, および 2 次の状態オブザーバの極, 1 型 DOB の極を表 5 に示す. 1 型 DOB に関しては, 好ましくない振動が生じない範囲で追従誤差ができるだけ小さくなるように調整した. 目標軌道は, エンコーダのカウント値で, 0.1 秒間に 2000 パルス (約 1 cm), または 6000 パルス (約 3 cm), 8000 パルス (約 4 cm) を移動するものであり, 0.4 秒間の静止時間があり, その後, 0.1 秒間で 0 パルスに戻ってくる軌道である.

5・3 実験結果

提案する摩擦補償器の有効性を検証するために, 5・2 節に記した実験条件のもと, 5・1 節で示した 3 種類の 2 自由度位置決め制御系を使用して位置決め制御実験を行った. 移動距離が 2000 パルスのときに関して, 摩擦補償なしの場合, 1 型 DOB を使用した場合, 時変 DOB を使用した場合のそれぞれの実験結果を図 13~図 15 に示す. 図 13~図 15 の各応答は, それぞれ(a)目標軌道 (青実線) とステージの位置軌道 (赤一点鎖線), (b)追従誤差, (c)推定摩擦, (d)追従誤差の拡大図となっている. ただし, 図 13 は摩擦補償なしの場合の実験結果のため, 推定摩擦の波形はなく, 追従誤差の拡大図も載せていない. また, 表 5 には, 追従誤差を定量的に評価するため, その二乗平均平方根 (RMS : Root Mean Square) をまとめた. ここで, 二乗平均平方根 e_{rms} は

$$e_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k)} \quad (37)$$

と定義される. ただし, $e(k)$ は k 番目のサンプリング時における追従誤差である.

図 13 の結果より, 摩擦補償なしの場合は積分補償もないために定常偏差が残る, 追従誤差の最大値が約 150 パルスとなっている. 図 14 に見るように, 1 型 DOB を使用した場合, 追従誤差の最大値は ± 40 パルス程度であったが, 摩擦を補償することによって, 定常偏差は改善されている. 図 14(d)では, 次の位置決めが開始されるまでに 1 パルスの定常偏差を解消できていないが, これは 1 型 DOB の原理が応答の遅い積分動作に基づいているためである (十分に時間が経過すれば定常偏差は 0 となる). 図 15 の時変 DOB を使用した場合の実験結果からは, 追従誤差が最大でも ± 20 パルス以内に収まっており, 定常偏差も残っていないことがわかる. また, 表 5 の追従誤差の RMS 値より, 提案した時変 DOB を使用した場合は 1 型 DOB を使用した場合に比べて, この例では, 追従誤差を約 65 %改善することができている.

移動距離が 6000 パルスと 8000 パルスのときの実験結果に関しては, 摩擦補償なしの場合, および 1 型 DOB を使用した場合, 時変 DOB を使用した場合の追従誤差のみを示した. 6000 パルスのときの各手法での追従誤差

を, それぞれ図 16(a)~(c)に, 8000 パルスあたりの結果を同様に図 17(a)~(c)に示した. また, それぞれの追従誤差の RMS 値については, 表 5 にまとめた. 6000 パルスおよび 8000 パルスのときの実験結果に関しても時変 DOB を使用した場合は, 1 型 DOB を使用した場合に比べ, 追従誤差を低減することができていることが確認できた. 表 5 の追従誤差の RMS 値より, 提案した時変 DOB を使用した場合は 1 型 DOB を使用した場合に比べて, 移動距離が 6000 パルスや 8000 パルスのように変化しても追従誤差を改善できていることが確認された.

Fig. 10 Two DOF positioning control system without friction compensation.

Fig. 11 Two DOF positioning control system using type-1 DOB.

Fig. 12 Experimental setup.

(a) Position

(b) Tracking error

Fig. 13 Time response of two DOF control system without friction compensation (2000 pulse).

Table 3 The weighting matrices.

Controller and Observer	Weighting	
	Q	R
State feedback controller	$\text{diag}[2 \times 10^6 \quad 3]$	0.3
State observer	$\text{diag}[1 \times 10^{-2} \quad 1]$	0.3
Type-1 DOB	$\text{diag}[1 \times 10^{-2} \quad 1 \quad 1 \times 10^9]$	0.3
Time variant DOB	$\text{diag}[1 \times 10^{-3} \quad 1 \times 10^{-2} \quad 1 \times 10^2]$	1

Table 4 Design parameters of controller and observer.

Description	State observer	Type-1 DOB	Time variant DOB
Gain k_{d1}	1.689×10^{-1}	4.639×10^{-1}	Function of $\hat{v}_d(k)$
Gain k_{d2}	3.685×10^{-1}	85.92	
Gain k_{d3}	—	-4.539×10^4	
Gain f_{md1}	2.335×10^3		
Gain f_{md2}	2.087×10^1		

Table 5 Poles of controller and observer.

Controller and Observer	Poles
Closed loop system	$0.8906 \pm j 0.0961$
State observer	0.8336, 0.9789
Type-1 DOB	$0.7745, 0.8715 \pm j 0.1545$

Fig. 14 Time response of two DOF control system with type-1 DOB (2000 pulse).

Fig. 15 Time response of two DOF control system with time variant DOB (2000 pulse).

Table 6 Root mean square (RMS) for tracking error.

Moving distance	RMS		
	Without friction compensation	Type-1 DOB	Time variant DOB
2000 pulse	142	12.7	4.41
6000 pulse	66.8	25.1	7.94
8000 pulse	67.7	29.8	12.7

Fig. 16 Time response of two DOF control system: tracking error (6000 pulse).

Fig. 17 Time response of two DOF control system: tracking error (8000 pulse).

6. おわりに

本稿では、摩擦モデルの一つである LuGre モデルを使用した時変の摩擦推定オブザーバの一構成法について提案した。オブザーバの設計に際しては、予備実験を実施して対象とする実験装置の実摩擦を取得し、LuGre モデルのパラメータを同定した。この同定したパラメータを用いた LuGre モデルは、実摩擦の特徴を表現できていることを実験により確認した。さらに、提案した LuGre モデルに基づく時変外乱オブザーバを使用した 2 自由度位置決め制御系について、従来手法を用いて設計した 2 自由度位置決め制御系との比較実験を行い、その性能を評価した。実験結果から、提案手法の時変 DOB を使用した場合は、従来手法である 1 型 DOB を使用した場合に比べて、移動距離を変化させたいずれの場合（2000 パルス、6000 パルス、8000 パルス）においても、位置決め制御時の追従誤差の RMS 値を改善することができ、その有効性を確認した。

文 献

- (1) De Wit, C. C., Olsson, H., Åström, K. J., and Lischinsky, P., "A New Model for Control of System with Friction", *IEEE Transactions on Automatic Control* (1995), Vol.40, No.3, pp.419-425.
- (2) Åström, K. J., and De Wit, C. C., "Revisiting the LuGre Friction Model", *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 28, Issue 6 (2008), pp.101-114.
- (3) Ito, K., Maebashi, W., Yamamoto, M., Iwasaki, M., and Matsui, N., "Fast and Precise Positioning by Sequential Adaptive Feedforward Compensation for Disturbance", *Proc. of the 11th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control* (2010), pp.19-23.

- (4) Asaumi, H., and Fujimoto, H., "Proposal on nonlinear friction compensation based on variable natural length spring model", *Proc. of the SICE Annual Conference* (2008), pp.2393-2398.
- (5) Iwasaki, M., Kawafuku, M., and Hirai, H., "2DOF control-based fast and precise positioning using disturbance observer", *Proc. 32nd Annu. IEEE IECON* (2006), pp.5234-5239.
- (6) De Wit, C. C., and Lischinsky, P., "Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model", *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, Vol.11, No.1 (1997), pp.65-80.
- (7) 竹村 征, 藤本 博志, "NC 工作機械用ボールねじ駆動ステージにおけるサンプル点間応答を考慮した転がり摩擦補償", 平成 24 年電気学会産業計測制御研究会, IIC-12-007 (2012), pp.35-40.
- (8) Dahl, P., "A solid friction model", The Aerospace Corporation, El Segundo, CA, Tech. Rep. TOR-0158(3107-18)-1 (1968).
- (9) Koizumi, T., and Kuroda, O., "Analysis of Damped Vibration of a System with Rolling Friction: Rolling Friction Depends on the Displacement", *Journal of Japanese Society of Tribologists*, Vol. 35, No.6 (1989), pp.435-439.
- (10) Freidovich, L., Robertsson, A., Shiriaev, A., and Johansson, R., "LuGre-Model based Friction Compensation", *Proc. of the IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol.18, No.1 (2010), pp.194-200.
- (11) 佐藤和也, "ロバスト適応制御法を用いた位置決め制御～入力部の非線形特性の補償について～", 計測と制御, Vol.48, No.8 (2009), pp.652-657.
- (12) 佐藤和也, 鶴田和寛, 正司啓人, "繰返し動作を考慮に入れたリニアスライダの適応型摩擦補償制御", 電気学会論文誌D (産業応用部門誌), Vol. 125, No. 11 (2005), pp.1022-1029.
- (13) Martinez-Rosas, J. C., and Alvarez-Icaza, L., "Adaptive compensation of dynamic friction in an industrial robot", *Proc. of the IEEE International Conference on Control Applications* (2008), pp.1145-1150.
- (14) Ishikawa, J., Tei, S., Hoshino, D., Izutsu, M., and Kamamichi, N., "Friction Compensation Based on the LuGre Friction Model", *SICE Annual Conference* (2010), Taiwan, pp.9-12.
- (15) 星野 大貴, 釜道 紀浩, 石川 潤, "LuGre モデルに基づく摩擦補償制御 —実験による基本性能評価—", 平成 23 年電気学会産業計測制御研究会, IIC-11-169 (2011), pp.77-82.
- (16) Hoshino, D., Kamamichi, N., and Ishikawa, J., "Friction Compensation Using Time Variant Disturbance Observer Based on the LuGre Model", *Proc. of the 12th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control* (2012).
- (17) "fminsearch", MathWorks, <http://www.mathworks.co.jp/jp/help/matlab/ref/fminsearch.html> (参照日 2012 年 10 月)
- (18) Nakao, M., Ohnishi, K., and Miyachi, K., "A robust decentralize joint control based on interference estimation", *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation* (1987), pp.326-331.