粘性流体中の三次元振動物体に作用する付加質量の数値解析* (手法の提案と簡単な例への応用)

下原 秀基^{*1}, 辻 貴志^{*2}, 北本 智也^{*2}
谷川 博哉^{*3}, 平田 勝哉^{*4}

Numerical Analysis for the Added Mass of Oscillating Three-Dimensional Object in Viscous Fluid (A Proposed Method and Applications to Simple Geometries)

Hideki SHIMOHARA, Takashi TSUJI, Tomoya KITAMOTO, Hirochika TANIGAWA
and Katsuya HIRATA^{*4}

^{*4} Department of Mechanical Engineering, Doshisha University
Kyoto 610-0321, Japan

In many fluid-structure-interaction problems, the added mass, or the virtual mass, is one of important interests. In the present study, we propose a simple and efficient method to specify fluid-force coefficients of an oscillating object in fluid. In this method, we consider incompressible-and-viscous fluid under the assumption of an infinitesimal oscillation amplitude of a three-dimensional object, and properly modify the Navier-Stokes equations into linear equations, namely, the Brinkman equations. The solving method is based on a discrete singularity method. In order to confirm the method's effectivity and validity, we compute a sphere and a short cylinder, comparing our computations to theories and experiments which show good agreement.

Key Words : Fluid Force, Numerical Analysis, Added Mass, Virtual Mass, Discrete Singularity Method

1. 序

流体中に物体があり、かつ、流体または物体の一方あるいは両方が加速運動を行う状況を考えることは、実用上有用である。このような状況下で物体が受ける流体力の内、加速度に比例するものは、非粘性の仮定の下で付加質量 (added mass) 力あるいは仮想質量 (virtual mass) 力として知られている。特に、物体密度が流体密度に比べて同等もしくは小さいとき、何らかの加速運動を論じるには付加質量が無視できない。例えば、波浪に伴う周期外力を受ける海洋構造物や液中の振動物体、気泡の運動はもとより、飛行船等の軽量構造の設計においてさえ、付加質量の評価が求められる。

この様に、付加質量力の評価は工学上重要であり、よって、現在までその基礎研究として、主にさまざまな断面形状の二次元物体に関する研究が試みられている。理想流体に関しては、Patton⁽¹⁾が静止流体中で振動する様々な形状の物体 (いくつかの三次元物体を含む) に作用する付加質量の解析解を、実験値と共にまとめている。また、Dalton & Helfinstine⁽²⁾や矢野と大江⁽³⁾により、理想流体中で振動する複雑形状物体についての近似計算法が提案されている。一方、粘性流体に関しては、Chen⁽⁴⁾が、非圧縮性粘性流体中において微小振幅で振動する円柱等の (二次元) 柱状物体の流体力を解析的に求めている。また、Scolan & Faltinsen⁽⁵⁾は Vortex-in-Cell Method を用いて、Zheng & Dalton⁽⁶⁾は渦度

* 原稿受付 2013 年 2 月 19 日

^{*1} 正員, 同志社国際中・高等学校 (〒610-0321 京都府京田辺市多々羅都谷 60-1)

^{*2} 同志社大学大学院 工学研究科 機械工学専攻 (〒610-0321 京都府京田辺市多々羅都谷 1-3)

^{*3} 正員, 舞鶴工業高等専門学校 (〒625-8511 京都府舞鶴市宇白屋 234)

^{*4} 正員, 同志社大学 理工学部 (〒610-0321 京都府京田辺市多々羅都谷 1-3)

E-mail: khirata@mail.doshisha.ac.jp

と流れ関数に基づく Navier-Stokes 方程式を有限差分法 Finite Difference Method (以降, FDM と呼ぶ) により解いて, 粘性振動流体中に置かれた柱状物体 (円柱や角柱) に働く力を数値解析的に求めている. 一方, 計測精度上困難な点が多いが, Patton と同様, 実験的アプローチも試みられている. Keulegan & Carpenter⁽⁷⁾ は, 海洋構造物を対象とし, 振動流中の円柱に作用する力を求めている. 彼らは, 物体に作用する振動方向の力を Morison⁽⁸⁾ の式に従って抗力と慣性力に分解し, 抗力係数 C_D と慣性力係数 C_M を Keulegan-Carpenter 数 KC により整理している. Bearman *et al.*⁽⁹⁾ は, U チューブ容器を用いて作り出された振動流中で, 柱状物体の角の影響について調べている. ここで, 振動流体中の静止物体に働く流体力は, 静止流体中の振動物体に働く流体力に, Floude-Krylov 力を考慮することにより変換される (Meneghini & Bearman⁽¹⁰⁾, Chakrabarti⁽¹¹⁾). なお, Zheng & Dalton は, Bearman *et al.* と Sclan & Falinsen の実験データとの比較も行っている. しかし, C_D も C_M も共に充分な一致を示していない. 最近, 著者らは, 非圧縮性粘性流体中で微小振幅で正弦振動する二次元物体を考え, 離散特異点法 Discrete Singularity Method (以降, DSM と呼ぶ) に基づく流体力係数の簡便な高速計算法を提案している⁽¹²⁾. そして, DSM を様々な柱状物体へ適用する際の数値的特性を調べている⁽¹³⁾. 具体的には, DSM を典型的な特異形状, つまり, 鋭い角を有する柱状物体に適用する際の数値的特性と数値精度を議論している. 更に, Navier-Stokes 方程式を FDM により数値解析し, 円柱と正方形柱の周囲流れを求め, DSM と FDM の比較に基づき, DSM の有効性と適用限界を提案している. また, DSM により, 鋭い角を持つ様々な基本的柱状物体 (つまり, 様々な断面形状を持つ矩形柱と菱形柱) の付加質量を明らかにしている.

しかし, 以上は専ら二次元物体を対象としており, 三次元物体については, 工学的重要性が高いにも拘らず, わずかな研究がなされているのみである. 例えば, 理想流体に関しては Lamb (1932)⁽¹⁴⁾ が, 粘性流体に関しては Stokes (1851)⁽¹⁵⁾ が, それぞれ, 球に作用する付加質量を解析的に求めている. Landau & Lifshitz (1987)⁽¹⁶⁾ は, その高振動数近似も示している. また, 井上と佐藤 (1985)⁽¹⁷⁾ が, トーション・ペンデュラム法を用いた実験で, 球と円柱の付加質量を計測している.

本研究では, 著者らが二次元物体に対して提案した解析法を三次元物体に拡張する. つまり, 非圧縮性粘性流体中で微小振幅で正弦振動する三次元物体の流体力を, DSM によって求める. そこでは, 微小振幅振動の仮定の下で, Navier-Stokes 方程式を線形近似して得られる Brinkman 方程式を利用する. 先の二次元問題では, 複素平面を考えると解析手法に複素関数を導入することが可能であった. 一方, 今回の三次元問題ではそのような複素関数の導入はできないので, Tsai⁽¹⁸⁾ が提案した Brinkman 方程式の三次元基本解を特異点とし, DSM に基づく数値解析法を提案する. 本解析法は, 以上のような支配方程式の線形近似により, FDM や FEM (有限要素法 Finite Element Method) などの領域法と比べるとはるかに効率的/高速かつ簡便に解を得ることができる. よって, 有限振幅振動問題に本解析法を直接適用することは出来ないが, 有限振幅振動問題の内でも物体形状や流体粘性の影響の予備評価には本解析法は有益であろう. 更に, 提案した解析法を用いて基本的三次元物体の一つである球に関して, 本解析法を適用する際の数値的特性や数値精度を議論する. その後, 本解析法の計算結果を, Lamb のポテンシャル理論値, および, Stokes による粘性理論値, 井上と佐藤の実験値と比較し, 本解析法の有効性を示す. また, 本解析法を, 井上と佐藤と同様な短円柱に適用し, その流体力を明らかにする.

2. 主な記号

A	: 物体の変位振動振幅
$c_p, c_{j,m}$	: 離散特異点法における複素定数
$\mathbf{F}$	: 物体に作用する流体力, (F_x, F_y, F_z)
$\mathbf{H}$	: Chen の定義に基づく無次元化流体力, (H_x, H_y, H_z)
i	: 虚数単位, $\equiv \sqrt{-1}$
L	: 代表長さ
M	: 特異点の総数
N	: 制御点の総数
$\mathbf{n}$	: 物体表面の外向き法線ベクトル, (n_x, n_y, n_z)
p	: 圧力
Re, Im	: 実部, 虚部

S	: 運動 Reynolds 数, $\equiv \rho \omega L^2 / \mu$
$\mathbf{T}$	: 応力テンソル [τ_{lm}]
t	: 時間
$\mathbf{u}$	: 速度ベクトル $(u, v, w) = (u_1, u_2, u_3)$
δ_{ij}	: Kronecker のデルタ
λ	: $\lambda \equiv (i\rho\omega\mu)^{1/2}$
μ	: 粘性係数
ρ	: 流体密度
ω	: 角振動数
ξ_m	: m 番目の特異点の位置
η_n	: n 番目の制御点の位置

上つき添え字

' : 変動成分の振幅

下つき添え字

- 1, 2, 3 : x 方向成分, y 方向成分, z 方向成分
 m, n : 整数
 i, j, k : 1 または 2, 3

3. 解析手法

3・1 解析モデルと支配パラメータ

図 1 に, 解析モデルを示す. 非圧縮性粘性流体中で三次元物体が, x 軸方向に変位 $x = A \sin(\omega t)$ で振動する. よって, y 軸と z 軸は振動直角方向となる. この場合, 支配パラメータは, 運動 Reynolds 数 $S \equiv \omega L^2 / \nu$ と Keulegan-Carpenter 数 $KC \equiv 2\pi A / L$ である. ここで, A は振動振幅, L は代表長さ, ν は動粘度である. 本研究では, 微小振幅近似で線形近似を行うので, $KC = 0$ である. なお, ストークス数 (あるいは, 周波数パラメータ) $\beta^{(19)}$ とウォーマスリー数 Wo は, それぞれ, $S/2\pi$ と $S^{1/2}$ とに等しい. 本研究では, 具体例として, 球と円柱についての計算を行っているが, L はそれぞれ球直径 (円柱の場合は, 後述する等価球直径) とする.

Fig. 1 Model: an oscillating 3D object in stationary fluid.

Fig. 2 An analytical model of DSM for a sphere.

3・2 支配方程式の線形近似

図1に示す三次元物体周囲の非圧縮性粘性流れの支配方程式は、Navier-Stokes 方程式と連続の式、

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

と

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

である。ここに、 p と $\mathbf{u}$ は、それぞれ、圧力と速度ベクトルである。

三次元物体が静止流体中を微小振幅振動するものとする。この仮定下で、支配方程式の非線形項を無視して線形近似し、線形化 Navier-Stokes 方程式と連続の式を得る。更に、 i を虚数単位とし、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}' e^{i\omega t} = (u' e^{i\omega t}, v' e^{i\omega t}, w' e^{i\omega t})$, $p = p' e^{i\omega t}$ と置くと、支配方程式は次のようになる。

$$\nabla p' = \mu \nabla^2 \mathbf{u}' - \mu \lambda^2 \mathbf{u}' \quad (3)$$

と

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0. \quad (4)$$

ここで、式(3)は、Brinkman 方程式である。また、 $\lambda \equiv (i\rho\omega/\mu)^{1/2}$ 。上つき添字“'”は、変動振幅成分の(片)振幅を示す。

3・3 離散特異点法

本研究では、三次元物体を対象とした離散特異点法 DSM^{(3), (12), (13), (20)-(23)}を提案する。基本解として、Tsai⁽¹⁸⁾が提案した三次元 Brinkman 方程式の解析解を考える。以下の速度振幅ベクトルが、三次元 Brinkman 方程式の基本解である。

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} \\ u'_{21} & u'_{22} & u'_{23} \\ u'_{31} & u'_{32} & u'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここに、 c_1, c_2, c_3 は複素定数である。また、行列の各成分は、

$$u'_{ij} = \frac{\delta_{ij} [-1 + (1 + \lambda r + \lambda^2 r^2) e^{-\lambda r}]}{4\pi\lambda^2 \mu r^3} + \frac{d_i d_j [3 - (3 + 3\lambda r + \lambda^2 r^2) e^{-\lambda r}]}{4\pi\lambda^2 \mu r^5} \quad (6)$$

である (Tsai⁽¹⁸⁾を参照)。なお、 i と j は、1 または 2, 3 である。 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 $r = (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)^{1/2}$ である。 (d_1, d_2, d_3) は、特異点位置 $\xi(s_1, s_2, s_3)$ に対して、 $(d_1, d_2, d_3) \equiv (x - s_1, y - s_2, z - s_3)$ と与えられる。よって、特異点位置を原点と考える時は、 $(d_1, d_2, d_3) = (x, y, z)$ である。

DSM では、三次元物体の内部に M 個の特異点すなわち Brinkmanlet を離散的に配置し、物体表面上に N 個の制御点すなわち拘束点を離散的に配置する。図2に、球について、特異点 (Singularity) と制御点 (Control point) の配置の模式図を示す。なお、4章で後述する様に、DSM では、物体形状や S に応じて、特異点を適切に配置することにより、計算精度や数値安定性が向上する^{(3), (12), (20)-(23)}。逆に、不適切な特異点配置は計算を不安定にし、その計算結果も信頼性に欠ける。本研究では、適切な特異点の配置を調べるため、図2に示す様に、半径 $R_\eta (= L/2)$ の球表面上に制御点を、半径 R_ξ の仮想球面上に特異点を、それぞれ M 個配置し、両者の比 R_ξ/R_η をパラメータとして、適切な特異点配置を調査する。なお、具体的な配置については、 z 方向に等間隔の x - y 平面を考え、各平面上に同数の制御点を周方向

に等間隔に置くものとする。また、特異点は、各制御点と原点との間に一個を配置する。

制御点における滑り無し (non-slip) 条件下で、式(3)と式(4)を数値的に解く。具体的には、表面上に配置した制御点での non-slip 条件は、

$$u'(\eta_n) = 1.0, \quad v'(\eta_n) = 0 \quad \text{and} \quad w'(\eta_n) = 0 \quad (\text{at } n = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

の $3N$ 個である。ここに、 η_n は n 番目制御点の位置であり、 N は制御点の総数である。また、 η_n の位置での u' は、次の通りである (Tsai⁽¹⁸⁾を参照)。

$$\begin{pmatrix} u'(\eta_n) \\ v'(\eta_n) \\ w'(\eta_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^M u'_{11}(\eta_n - \xi_m) c_{1,m} + \sum_{m=1}^M u'_{12}(\eta_n - \xi_m) c_{2,m} + \sum_{m=1}^M u'_{13}(\eta_n - \xi_m) c_{3,m} \\ \sum_{m=1}^M u'_{21}(\eta_n - \xi_m) c_{1,m} + \sum_{m=1}^M u'_{22}(\eta_n - \xi_m) c_{2,m} + \sum_{m=1}^M u'_{23}(\eta_n - \xi_m) c_{3,m} \\ \sum_{m=1}^M u'_{31}(\eta_n - \xi_m) c_{1,m} + \sum_{m=1}^M u'_{32}(\eta_n - \xi_m) c_{2,m} + \sum_{m=1}^M u'_{33}(\eta_n - \xi_m) c_{3,m} \end{pmatrix} \quad (\text{at } n = 1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

ここに、 ξ_m は m 番目の特異点の位置である。 $3M$ 個の未知定数 $c_{j,m}$ ($j = 1, 2 \text{ or } 3; m = 1, 2, \dots \text{ or } M$) を求めるために、もし、 $M < N$ ならば最小二乗法で解く必要がある。本研究では $M = N$ とするので、直接、Gauss 消去法で解く。

3・4 流体力

三次元物体に作用する流体力 $\mathbf{F}$ は次のようになる。

$$\mathbf{F} = \oint_s \mathbf{T} d\mathbf{s} = \oint_s \mathbf{T} \mathbf{n} d\mathbf{s} \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は物体表面の外向き法線ベクトルであり、 $\mathbf{T}$ は応力テンソルである。本研究では、 x 軸方向に微小振幅振動するので、もし x 軸に関して対称な物体を扱う限りは、流れは x 軸に対して対称となり、 y と z 軸方向の流体力は共に 0 となり、 $\mathbf{F}$ の x 軸方向成分 F_x のみを考えればよい。 $\mathbf{T}\mathbf{n}$ の x 軸方向成分は、

$$\tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \quad (10)$$

と表される。ここで、Tsai⁽¹⁸⁾によると、式(10)中の応力テンソルの三成分は、

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{111} & \tau_{112} & \tau_{113} \\ \tau_{121} & \tau_{122} & \tau_{123} \\ \tau_{131} & \tau_{132} & \tau_{133} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

である。ここに、

$$\begin{aligned} \tau_{ijk} = & \frac{\delta_{ij}d_k[6-\lambda^2r^2-(6+6\lambda r+2\lambda^2r^2)e^{-\lambda r}]}{4\pi\lambda^2r^5} \\ & + \frac{(\delta_{ij}d_j+\delta_{jk}d_i)[6-(6+6\lambda r+3\lambda^2r^2+\lambda^3r^3)e^{-\lambda r}]}{4\pi\lambda^2r^5} \\ & + \frac{d_id_jd_k[-15+(15+15\lambda r+6\lambda^2r^2+\lambda^3r^3)e^{-\lambda r}]}{2\pi\lambda^2r^7} \end{aligned} \quad (12)$$

である。なお、 i と j , k は、1 または 2, 3 である。

次に、流体力を無次元化する。本研究では、 x 軸に関して対称な物体のみを取り扱うため、 F_x のみを考える。この時、無次元化した流体力 H_x は次のように表される (Chen⁽⁴⁾を参照)。

$$H_x = \frac{F_x}{\rho V i A \omega^2 e^{i\omega t}} = \frac{\oint_s \{\tau_{1j} n_j\} ds}{\rho V i A \omega^2 e^{i\omega t}} \quad (13)$$

ここで、 V は物体の体積である。また、 H_x の実数部分 $\text{Re}(H_x)$ は付加質量力係数、 H_x の虚数部分 $-\text{Im}(H_x)$ は減衰力係数である。

4. 結果と考察

本解析法の有効性を確認するため、本解析法を球に適用し、その計算結果を理論や実験と比較する。なお、今回計算した運動 Reynolds 数 S の範囲は、 $S=10-10000$ である。

最初に、 $S=20$ での計算を考える。図 3 は、 $S=20$ での R_ξ/R_η に対する $\text{Re}(H_x)$ と $-\text{Im}(H_x)$ を示す。特異点数 M (= 制御点数 N) = 912 での結果である。ここに、 R_ξ は原点と特異点間の距離、 R_η は原点と制御点間の距離である。DSM は、複雑な物体形状にも簡便に適用できるが、その為に特異点と制御点の配置や個数 M に自由度が大きい。それらの配置は、計算の効率や精度、安定性に影響を及ぼす。また、最適な配置は、採用した基本解の種類にも依存する。本研究では、よりふさわしい配置を探る為、 $M=N$ かつ特異点と制御点を同一放射線状に置く (図 2 を参照) との制限下で配置パラメータ R_ξ/R_η に注目する。図 3 に示すように、 R_ξ/R_η の増加につれて、 $\text{Re}(H_x)$ は 1.88 (Stokes 解は 1.92) に、 $-\text{Im}(H_x)$ は 2.26 (Stokes 解は 2.32) に発散していたものが収束する。(ただし、 $R_\xi/R_\eta > 0.9$ では、解が収束値から離れる傾向を示す。) 結果として、 $R_\xi/R_\eta = 0.7-0.9$ の範囲内での計算結果は適切なものと判断できそうである。次に、 $M(=N)$ の影響を確認する。図 4 は、 $M=456$ と 684, 912 での結果を $M=912$ での収束値 ($R_\xi/R_\eta \approx 0.8$ での $|H_x|$) との相対誤差 e として表し、 e を R_ξ/R_η に対して示す。ここに、 e は、次式にて定義する。

$$e = \frac{\left| |H_x| - |H_x|_{M=912} \right|}{|H_x|_{M=912}} \quad (14)$$

図からは、 $M=456$ や 684 においても、 $R_\xi/R_\eta = 0.7-0.9$ の範囲内では、 H_x は、 $M=912$ での収束値とほぼ一致することが分かる。具体的には、 e は $M=456$ でも 684 でも 5% 以下になる。よって、 $M \geq 456$ にて得られた計算結果は適切なものと考えられる。(より厳密に見ると、適切な R_ξ/R_η の範囲は、 M の増加につれて、狭くなりがちである。このことは、適切範囲の上限値 ($R_\xi/R_\eta \approx 0.9$) よりも、下限値 ($R_\xi/R_\eta \approx 0.7$) で、顕著である。また、適切範囲内であっても $M=456$ 程度では、 e は大きくなりがちであるが、 $M \geq 684$ では十分な計算精度を示す。)

同様に、 $S=2000$ での計算を考える。図5は、 $S=2000$ での R_g/R_η に対する $\text{Re}(H_x)$ と $-\text{Im}(H_x)$ を示す。特異点数は $M(=N)=912$ である。図5に示すように、 R_g/R_η の増加につれて、 $\text{Re}(H_x)$ は0.63 (Stokes 解は0.63) に、 $-\text{Im}(H_x)$ は0.15 (Stokes 解は0.15) に収束する。(ただし、図3と同様、 $R_g/R_\eta > 0.8$ では解が不安定になり、さらに大きな R_g/R_η では解が発散傾向を示す。) 結果として、図5でも、 $R_g/R_\eta = 0.6-0.8$ の範囲内での計算結果は適切なものと判断できそうである。次に、 $M(=N)$ の影響を確認する。図6は、図4と同様、 $M=456$ と684, 912における $M=912$ での収束値との相対誤差 e を、 R_g/R_η に対して示す。図6でも、 e は $M=684$ と912において $R_g/R_\eta = 0.6-0.8$ の範囲内では5%以下になる。よって、 $M \geq 684$ にて得られた計算結果は適当なものと考えられる。(厳密は、適切な R_g/R_η の範囲は、図4と対照に、 M の増加につれて、広くなりがちである。更に、図4とは対照的に、このことは、適切範囲の下限值($R_g/R_\eta \approx 0.6$)よりも、上限値($R_g/R_\eta = 0.8$)で、顕著である。また、適切範囲内であっても、 $M=456$ 程度では e は大きくなりがちである。更に、図4と図6の比較からは、 S の増加に伴い、適切な R_g/R_η の範囲はより低い値に移ることも分かる。)

図7と図8は、図3と図4と同様、 $S=20$ での結果である。また、図9と図10は、図5と図6と同様、 $S=2000$ での結果である。より詳しく述べると、図7と図9はともに、 R_g/R_η に対する $\text{Re}(H_x)$ と $-\text{Im}(H_x)$ を示す。特異点数 $M(=$ 制御点数 $N)=912$ での結果である。図8と図10はともに、 $M=456$ と684, 912での結果を $M=912$ での収束値との相対誤差 e として表し、 e を R_g/R_η に対して示す。ただし、図7-10は倍精度計算(8バイト実数)の結果であり、この点が単精度計算(4バイト実数)の結果である図3-6との唯一の違いである。

$S=20$ については、図7に示すように、 $R_g/R_\eta = 0.4-0.9$ の範囲で、 $\text{Re}(H_x)$ と $-\text{Im}(H_x)$ はともにStokes 解に収束する。(ただし、 $R_g/R_\eta > 0.9$ では、解が不安定になり発散傾向を示す。) 結果として、 $R_g/R_\eta = 0.4-0.9$ の範囲内での計算結果は適切なものと判断できそうである。次に、 $M(=N)$ の影響を確認する。図8からは、 $M=456$ や684においても、 $R_g/R_\eta = 0.4-0.9$ の範囲内では、 H_x は、 $M=912$ での収束値とほぼ一致することが分かる。

$S=2000$ については、図9に示すように、 $R_g/R_\eta = 0.4-0.8$ の範囲で、 $\text{Re}(H_x)$ と $-\text{Im}(H_x)$ はともにStokes 解に収束する。(ただし、図7と同様、 $R_g/R_\eta > 0.8$ では解が不安定になり、さらに大きな R_g/R_η では解が発散傾向を示す。) 結果として、図9でも、 $R_g/R_\eta = 0.4-0.8$ の範囲内での計算結果は適切なものと判断できそうである。次に、 $M(=N)$ の影響を確認する。図10は、図8と同様、 $M=456$ と684, 912における $M=912$ での収束値との相対誤差 e を、 R_g/R_η に対して示す。図10でも、 e は $M=684$ と912において $R_g/R_\eta = 0.4-0.8$ の範囲内では5%以下になる。よって、 $M \geq 684$ にて得られた計算結果は適当なものと考えられる。(厳密は、適切な R_g/R_η の範囲は、図6と同様に、 M の増加につれて、広くなりがちである。また、図6と対照的に、 $R_g/R_\eta < 0.7$ では、 $M=456$ 程度でも e は十分に小さな値を示す。)

倍精度計算(図7-10)と単精度計算(図3-6)の比較からは、たとえ R_g/R_η が小さくても精度の向上により十分な結果が得られること、及び、 R_g/R_η が大きいたまは精度の向上がほとんど影響を及ぼさないことがわかる。この事実は、 R_g/R_η の適切範囲の下限値が、実計算による桁落ちに強く支配されていることを示唆する。単精度計算では、この下限値は S の減少に伴い増加する。(つまり、 S の減少に伴い、特異点は制御点から遠く離れることが許されない。) 一般に、 S の減少すなわち粘性の増加に伴い、各特異点の影響空間がより広がることを考慮すると、この下限値に及ぼす S の影響も、下限値が桁落ちに支配されていることとよく辻褃が合う。なお、 R_g/R_η の適切範囲の上限値が、 S の減少に伴い増加すること(つまり、 S の減少に伴い、特異点は制御点により近づくことが許されること)は、粘性の増加に伴う特異点の影響空間の増大に関係すると解釈できそうである。事実、この上限値に及ぼす S の影響には、単精度計算と倍精度計算の差がほとんど見られない。更に、 $S=2000$ にて顕著な M の増加に伴うこの上限値の増加も、上の解釈を支持する。なぜならば、 R_g/R_η が一定の条件下での M の増加は、隣接する制御点の距離に対する特異点と制御点間距離の相対値の増大をもたらすからである。

図11に、 $S=10-10000$ での計算結果をまとめる。すなわち、付加質量力係数 $\text{Re}(H_x)$ と減衰力係数 $-\text{Im}(H_x)$ を、 S に対して示す。なお、図中の矢印は $S=\infty$ でのポテンシャル理論解⁽¹⁴⁾を、実線は粘性流体の理論解^{(15)&(16)}を示す。また、図中の中実印は実験結果⁽¹⁷⁾である。図からは、 $\text{Re}(H_x)$ が S の増加に連れて、単調に減少しつつ、ある値へと漸近する傾向を示すことが分かる。ここで、本計算結果を理論および実験と比較すると、よい一致が確認できる。すなわち、粘性理論解も実験値も共に、本計算結果とよく一致する。更に、本計算結果の漸近値は、ポテンシャル理論解に近い。一方、 $-\text{Im}(H_x)$ は、 S の増加に連れて、同様に単調減少はするが、 $S=\infty$ では零に近づく。この傾向は、ポテンシャル理論において、 $-\text{Im}(H_x)=0$ となることとよく整合する。

最後に、本解析法を工学的には重要であるが⁽¹⁷⁾解析の難しい短円柱に適用した結果を示す。図12は、その解析モデルであり、アスペクト比 $h/d=1$ の短円柱が、 x 軸方向に変位 $x=A\sin(\omega t)$ で振動する。ここに、 h と d は、それぞれ円

柱高さと円柱直径であり、等価球直径 $d_e \equiv (6V/\pi)^{1/3} = (3d^2h/2)^{1/3}$ を L とみなす。図 13 は、特異点と制御点の空間配置の概略を示す。制御点は円柱表面上に配置する。同一の x - y 平面上では制御点はお互いに $2\pi/60$ rad の等間隔を保つ。円柱の縁近くでは、制御点間の距離が徐々に小さくなる。特異点は円柱内部に配置する。特異点と制御点の距離は、隣り合う制御点との距離との比がほぼ等しくなるように決定する。なお、特異点と制御点の配置法は自由度が大きく、それらの配置は、計算の効率や精度、安定性に影響を及ぼすことは、先に述べた通りである。最適な配置法の確立については、今後の課題である。

図 14 に、 $S = 20$ – 4000 での計算結果 ($M = N = 2100$) をまとめる。すなわち、 $\text{Re}(H_x)$ と $-\text{Im}(H_x)$ を、 S に対して示す。なお、図中の中実印は実験結果⁽¹⁷⁾である。また、参考のため、球の結果も点線と破線にて示す。図からは、短円柱が定性的には球と同様の結果を示すことが分かる。すなわち、 $\text{Re}(H_x)$ は、 S の増加に連れて、単調に減少しつつ、ある値へと漸近する。一方、 $-\text{Im}(H_x)$ は、 S の増加に連れて、同様に単調減少はするが、 $S = \infty$ では零に近づく。もちろん、この傾向は、ポテンシャル理論において、 $-\text{Im}(H_x) = 0$ となることとよく整合する。定量的視点からは、短円柱の $\text{Re}(H_x)$ と $-\text{Im}(H_x)$ は共に、 S によらず、球よりも大きい値を示す。なお、 $\text{Re}(H_x)$ について、実験結果⁽¹⁷⁾も報告されているが、本解析結果と良好な一致を示す。(ただし、厳密には、本解析結果は実験結果よりも特に大きな S において、僅かではあるが小さな値を示しがちである。その説明には、本解析法で採用した微小振幅近似や実験での支持法などの影響評価を詳しく検討すべきと思われる。)

Fig. 3 H_x as a function of R_ξ/R_η for a sphere at $S = 20$ and $M (=N) = 912$.

Fig. 4 Relative error e against R_ξ/R_η for a sphere at $S = 20$ and $M (=N) = 456$ – 912 .

Fig. 5 H_x as a function of R_ξ/R_η for a sphere at $S = 2000$ and $M (=N) = 912$.

Fig. 6 Relative error e against R_ξ/R_η for a sphere at $S = 2000$ and $M (=N) = 456$ – 912 .

5. 跋

非圧縮性粘性流体中を微小振幅で正弦振動する任意形状の三次元物体の流体力を，支配方程式を線形近似することにより高速 ($M = 10^3$ 程度の計算であれば，卓上 PC にて数分程度である) かつ簡便に求める数値解析法を提案した．本手法を基本的三次元物体である球に適用し，その流体力を S の関数として明らかにした．そして，その結果をポテンシャル理論や粘性流体理論，実験と比較し，本手法の有効性を確認した．更に，本手法を解析解が得られていないが工学的に重要な基本的三次元物体である短円柱に適用し，その流体力も S の関数として明らかにすることにより，本手法の有用性を示した．

なお，幾何学的対称性のない複雑な一般形状物体について，最適な配置法を確立することは，残された課題の一つである．最終的には，系統立った配置の指針を明らかにすることが望まれるが，例えば形状ごとに適切な配置法を調べるとしても本解析法の計算量は十分に小さい (図 3 の全結果を得る為に，通常の卓上 PC にて数時間程度の計算である)．

Fig. 7 H_x as a function of R_ξ/R_η for a sphere at $S = 20$ and $M (= N) = 912$ (by double-precision real numbers).

Fig. 8 Relative error e against R_ξ/R_η for a sphere at $S = 20$ and $M (= N) = 456-912$ (by double-precision real numbers).

Fig. 9 H_x as a function of R_ξ/R_η for a sphere at $S = 2000$ and $M (= N) = 912$ (by double-precision real numbers).

Fig. 10 Relative error e against R_ξ/R_η for a sphere at $S = 2000$ and $M (= N) = 456-912$ (by double-precision real numbers).

 Fig. 11 H_x as a function of kinetic Reynolds number S for a sphere.

 Fig. 12 Model: an oscillating circular cylinder with an aspect rate $h/d = 1$ in stationary fluid.

 Fig. 13 An analytical model of DSM for a circular cylinder with $h/d = 1$.

 Fig. 14 H_x as a function of kinetic Reynolds number S for a circular cylinder with an aspect rate $h/d = 1$.

文献

- (1) Patton, K. T., "Tables of hydrodynamic mass factors for translational motion," *ASME Paper*, No. 65-WA/UNT-2 (1965), pp. 1–7.
- (2) Dalton, C. and Helfinstine, R. A., "Potential flow past a group of circular cylinders," *Transactions of ASME, Ser. D*, Vol. 934, (1971), pp. 636–642.
- (3) 矢野秀雄, 大江正展, "二次元物体の付加質量係数の近似計算法 (二次元ポテンシャル理論)", 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 52, No. 554 (1992), pp. 111–116.
- (4) Chen, S. S., *Flow-Induced Vibration of Circular Cylindrical Structures* (1987), Hemisphere, New York, pp. 30–35.
- (5) Socolan, Y. M. and Faltinsen, O. M., "Numerical studies of separated flow from bodies with sharp corners by the vortex in cell method," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 8 (1994), pp. 201–230.
- (6) Zheng, W. and Dalton, C., "Numerical prediction of force on rectangular cylinders in oscillating viscous flow," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 13 (1999), pp. 225–249.
- (7) Keulegan, G. H. and Carpenter, L. H., "Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid," *Journal of Research of National Bureau of Standards*, Vol. 60 (1958), pp. 423–440.
- (8) Morison, J. R., O'Brien, M. O., Johnson, J. W. and Schaaf, S. A., "The force exerted by surface waves on piles," *Petroleum Transactions of American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers*, Vol. 189 (1950), pp. 149–157.
- (9) Bearman, P. W., Graham, J. M. R., Obasaju, E. D. and Drossopoulos, G. M., "The influence of corner radius on the forces experienced by cylindrical bluff bodies in oscillatory flow," *Applied Ocean Research*, Vol. 6 (1984), pp. 83–89.
- (10) Meneghini, J. R. and Bearman, P. W., "Numerical-simulation of high amplitude oscillatory flow about a circular-cylinder," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 9 (1995), pp. 435–455.
- (11) Chakrabarti, S., *Handbook of Offshore Engineering*, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam (2005), pp. 158–160.
- (12) 下原秀基, 平田勝哉, "離散特異点法による二次元物体の付加質量係数の計算法", 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 66, No. 664 (2000), pp. 1061–1066.
- (13) 下原秀基, 菊川真吾, 八島基衛, 辻貴志, 平田勝哉, "粘性流体中の振動物体に作用する付加質量に関する数値解析", 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 77, No. 782 (2011), pp. 1904–1919.
- (14) Lamb, H., *Hydrodynamics, 6th Ed.*, Dover Publications, New York (1932), p. 738.
- (15) Stokes, G. G., "On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums", *Cambridge Philosophical Transactions*, Vol. IX, pt. 2 (1851), pp. 8–106.
- (16) Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics, 2nd Ed.*, Pergamon Press, Oxford (1987), p. 89.
- (17) 井上悟, 佐藤修, "円柱体および円筒体の付加質量", 日本水産学会誌, Vol. 51, No. 12 (1985), pp. 1997–2006.
- (18) C. C. Tsai, "Solutions of slow Brinkman flows using the method of fundamental solutions", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 56 (2008), pp. 927–940.
- (19) Sarpkaya, T., "On the parameter $\beta = Re/KC = D^2/\nu T$," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 21 (2005), pp. 435–440.
- (20) Yano, H., Hirata, K. and Komori, M., "An approximate method for the drags of two-dimensional obstacles at low Reynolds numbers," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63 (1996), pp. 990–996.
- (21) 谷川博哉, 平田勝哉, 杉本貴邦, 吉田季史, "離散特異点法によるスロッシングの数値シミュレーション", 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 66, No. 645 (2000), pp. 1300–1310.
- (22) 谷川博哉, 北野達也, 舟木治郎, 平田勝哉, "基本的多角形断面柱容器内のスロッシングモードと有限振幅効果", 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 69, No. 684 (2003), pp. 1854–1861.
- (23) 平田勝哉, 谷川博哉, 山本真大, 中島徹, 舟木治郎, "正多角形容器のスロッシングモードについて (第 1 報, 包括的分類法)", 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 74, No. 748 (2008), pp. 2485–2493.