変厚円筒殻容器の軸対称振動*

鈴木勝義**, 近野正伸***
Katsuyoshi SUZUKI, Masanobu KONNO小沢田正***, 高橋伸**
Tadashi KOSAWADA, Shin TAKAHASHI**Key Words:** Vibration, Axisymmetric Vibrations, Vessel, Variable Thickness, Natural Frequency, Mode Shape.

1. 緒 言

円筒殻と円板の接統系の振動については、高橋ら⁽¹⁾⁽²⁾による円板と円筒の結合系の振動、平野⁽³⁾による円筒殻容器の軸対称振動などがある。しかし、これらはいずれも古典理論を用いて解析されており、しかもすべて一様厚の場合を扱っている。著者ら⁽⁴⁾は最近、厚さが軸方向に変化する円筒殻の軸対称振動を Mirsky⁽⁵⁾の厚肉円筒殻理論を用いて解析し、その振動特性を明らかにした。しかし、厚肉円筒殻と他の弾性体との接統系の軸対称振動についてはまだ解析されておらず、その振動特性も明らかにされていない。

このような点から、本報告では、上下端に変厚ミンドリン円板のふたのついた変厚厚肉円筒殻容器（以後簡単に容器と呼ぶ）の軸対称振動を解析する。解析方法としては、変厚ミンドリン円板の軸対称振動のラグランジュアン（中央面の伸縮も考慮）および変厚厚肉円筒殻の軸対称振動のラグランジュアンをそれぞれ境界値（境界における変位、傾斜）で表し、さらに接統点における連続条件および境界条件を考慮して容器のラグランジュアンを未定境界値の二次形式で求め、未定境界値に関するラグランジュアンの極小条件から振動数方程式を求める方法である。数値計算によって、円板および円筒部の厚さの変化、円筒部の長さの変化その他のパラメータの固有振動数や振動モードに及ぼす影響を明らかにしている。

2. 境界値で表した円筒殻の軸対称振動のラグランジュアン

円筒殻の中央面の半径を R 、長さを $2l$ とし、円筒殻の中心 O を原点として、円筒殻の中央横断面上に角座標 θ をとり、母線方向に x' 軸、半径方向中心向きに

z 軸をとる（図1参照）。 $x = x'/R$ 、 $\mu = l/R$ とし、円筒殻の中央横断面上における板厚を h_0 、任意点の板厚を $h(x)$ とし、 $h = h_0\phi$ とする。 p' 、 t を円振動数、時間として、 x 、 θ 、 z 方向変位を

$$R(u + zu_0/R) \sin p't$$

$$R(v + zv_0/R) \sin p't, R w \sin p't$$

とする。軸対称振動の1周期間のラグランジュアン、振動方程式、境界条件および厚さが $\phi(x) = 1 + \gamma x^2$ で変化する場合の振動方程式の解は、文献(4)で既に求められており、ここではそれらをそのまま用いることにする。文献(4)の式番号を〔〕で示すことにし、式〔5〕を考慮して、式〔2〕を部分積分するとラグランジュアンは次のようになる。

$$\begin{aligned} -L_0/\pi D_0 = & \left[\beta \phi \left\{ \frac{du}{dx} + (2\zeta - 1)w \right\} \right. \\ & - \phi^3 \frac{du_0}{dx} \Big] u + \left\{ k' \zeta \beta \phi \left(\frac{dw}{dx} + u_0 \right) \right\} w \\ & + \left\{ \phi^3 \left(-\frac{du}{dx} + \frac{du_0}{dx} \right) \right\} u_0 \Big|_{-\mu}^{\mu} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここで、 E 、 k' 、 ν 、 γ/g はそれぞれ、縦弾性係数、せん断修正係数、ポアソン比、密度を表し、 D_0 、 ζ 、 α_0 、 β は板の曲げ剛性、ポアソン比に関する量、無次元振動数および半径と厚さの比を表す量で次式で表さ

図1 座 標

* 昭和55年10月25日 東北支部仙台地方講演会において講演，原稿受付 昭和56年1月19日。

** 正員，山形大学工学部（〒992 米沢市城南 4-3-16）。

*** 学生員，山形大学大学院。

れる。

$$D_0 = Eh_0^3/12(1-\nu^2), \quad \zeta = (1-\nu)/2, \quad \alpha_0^4 = \gamma h_0 p'^2 R^4 / g D_0, \quad \beta = 12 R^2 / h_0^2 \dots\dots\dots (2)$$

振動方程式の一般解は、 λ_p, λ_p^* を積分定数として、次の様に表される。

$$u = \sum_{p=1}^3 (\lambda_p u_p + \lambda_p^* u_p^*), \quad w = \sum_{p=1}^3 (\lambda_p w_p + \lambda_p^* w_p^*), \quad u_0 = \sum_{p=1}^3 (\lambda_p u_{0p} + \lambda_p^* u_{0p}^*) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $(u_p, w_p, u_{0p}), (u_p^*, w_p^*, u_{0p}^*)$ は $\Phi(x) = 1 + \eta x^2$ として文献(4)で求められた級数解で、 u_p は x の奇関数、 w_p は x の偶関数、 u_{0p} は x の奇関数で表される対称振動の解とし、 u_p^* は x の偶関数、 w_p^* は x の奇関数、 u_{0p}^* は x の偶関数で表される反対称振動の解とする。

境界値を次のようにおく(複号同順)。

$$u|_{x=\pm\mu} = \pm a_0 + a_0^*, \quad w|_{x=\pm\mu} = b_0 \pm b_0^*, \quad u_0|_{x=\pm\mu} = \pm c_0 + c_0^* \dots\dots\dots (4)$$

式(3)を式(4)に代入し、 $u_1(\mu), u_2(\mu), \dots$ などを簡単に、 $u_1, u_2, \dots$ などで表すと、積分定数は次のように求められる。

$$\lambda_p = (-1)^{p+1} (a_0 \Delta_{1p} - b_0 \Delta_{2p} + c_0 \Delta_{3p}) / \Delta_0 \quad (p=1 \sim 3) \dots\dots\dots (5)$$

ここに、

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_{01} & u_{02} & u_{03} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

Δ_{pq} は Δ_0 の p 行めと q 列めの要素を除いた 2 行 2 列の行列式である。また、 $\Delta_0, (\Delta_{pq})_{p,q=1 \sim 3}$ で $(u_p, w_p, u_{0p})_{p=1 \sim 3}$ のかわり $(u_p^*, w_p^*, u_{0p}^*)_{p=1 \sim 3}$ を用いた式を $\Delta_0^*, (\Delta_{pq}^*)_{p,q=1 \sim 3}$ とすると、 λ_p^* は、 λ_p で $a_0, b_0, c_0, \Delta_0, \Delta_{pq}$ のかわり、 $a_0^*, b_0^*, c_0^*, \Delta_0^*, \Delta_{pq}^*$ を用いた式で表される。

式(1)に式(4)~(6)を代入すると、ラグランジュアンは、境界値の二次形式で表されて、次のようになる。

$$\begin{aligned} -L_c / \pi D_0 &= -(L_c S + L_c A) / \pi D_0 \\ &= 2(a_0^2 F_1 + b_0^2 F_2 + c_0^2 F_3 + a_0 b_0 F_4 + a_0 c_0 F_5 + b_0 c_0 F_6) / \Delta_0 \\ &\quad + 2(a_0^*{}^2 F_1^* + b_0^*{}^2 F_2^* + c_0^*{}^2 F_3^* + a_0^* b_0^* F_4^* + a_0^* c_0^* F_5^* + b_0^* c_0^* F_6^*) / \Delta_0^* \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \beta \Phi t_1 - \Phi^3 t_4, & F_2 &= k' \zeta \beta \Phi t_5, & F_3 &= \Phi^3 (t_6 - t_3) \\ F_4 &= \beta \Phi \{t_2 + (2\zeta - 1)\Delta_0\} - \Phi^3 t_5 + k' \zeta \beta \Phi t_7 \\ F_5 &= \beta \Phi t_8 - \Phi^3 (t_6 + t_1 - t_4), & F_6 &= k' \zeta \beta \Phi (\Delta_0 + t_9) + \Phi^3 (t_5 - t_2) \\ t_p &= \sum_{q=1}^3 (-1)^{p+q} \frac{du_q}{dx} \Delta_{pq} \quad (p=1 \sim 3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

また、 $t_4 \sim t_6$ は $t_1 \sim t_3$ の du_q/dx を du_{0q}/dx ($q=1 \sim 3$) にそれぞれ変えた式、 $t_7 \sim t_9$ は $t_1 \sim t_3$ の du_q/dx を dw_q/dx ($q=1 \sim 3$) にそれぞれ変えた式である。 $t_1 \sim t_9$ の $du_q/dx, du_{0q}/dx, dw_q/dx, \Delta_{pq}$ を $du_q^*/dx, du_{0q}^*/dx, dw_q^*/dx, \Delta_{pq}^*$ ($p, q=1 \sim 3$) にそれぞれ変えた式をそれぞれ $t_1^*, \dots, t_9^*$ とすると、 $F_1^*, \dots, F_6^*$ は $F_1, \dots, F_6$ で、 $t_1 \sim t_9$ を $t_1^* \sim t_9^*$ に、 Δ_0 を Δ_0^* にそれぞれ変えた式で表される。

3. 中央面の伸縮を考慮した変厚ミンドリン円板の軸対称振動

板厚が半径方向に直線的に変化する円板の軸対称振動を考える。図2に示すように、円板の外半径を $\bar{R}$ 、内半径を $k\bar{R}$ 、円板の中央面上に極座標 $(\bar{R}r, \bar{\theta})$ をとり、 $\bar{z}$ 軸を面に垂直にとる。円板の中心 ($r=0$) における板厚を $\bar{h}_0$ 、任意点での板厚を $\bar{h}(r)$ とする。 $\bar{p}', \bar{t}$ を円振動数、時間とし、周期を $\bar{\tau}'$ とする。また、 $\bar{\gamma}/g, \bar{E}, \bar{\nu}$ を密度、縦弾性係数、ポアソン比とする。 $r, \bar{\theta}, \bar{z}$ 方向変位を $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ として次のようにおく。

図2 変厚円板

$$\bar{U}/\bar{R} = \left(U + \frac{\bar{z}}{\bar{R}} U_0 \right) \sin \bar{p}' \bar{t}, \quad \bar{V}/\bar{R} = \left(V + \frac{\bar{z}}{\bar{R}} V_0 \right) \sin \bar{p}' \bar{t}, \quad \bar{W}/\bar{R} = W \sin \bar{p}' \bar{t} \quad \dots\dots\dots (9)$$

任意点 $(\bar{R}r, \bar{\theta}, \bar{z})$ における $r, \bar{\theta}, \bar{z}$ 方向の垂直ひずみ, せん断ひずみを $\bar{\epsilon}_r, \bar{\epsilon}_{\bar{\theta}}, \bar{\epsilon}_{\bar{z}}, \bar{\gamma}_{r\bar{\theta}}, \bar{\gamma}_{\bar{\theta}\bar{z}}, \bar{\gamma}_{\bar{z}r}$ とすると,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\epsilon}_r &= \frac{\partial \bar{U}}{\bar{R} \partial r}, & \bar{\epsilon}_{\bar{\theta}} &= \frac{\bar{U}}{\bar{R} r}, & \bar{\epsilon}_{\bar{z}} &= \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}}, & \bar{\gamma}_{r\bar{\theta}} &= \frac{\partial \bar{V}}{\bar{R} \partial r} - \frac{\bar{V}}{\bar{R} r} \\ \bar{\gamma}_{\bar{\theta}\bar{z}} &= \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}}, & \bar{\gamma}_{\bar{z}r} &= \frac{\partial \bar{W}}{\bar{R} \partial r} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

垂直応力は平面応力とし, せん断応力はフックの法則に従うものとする (ただし, $\bar{k}'$ はせん断修正係数)

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \frac{\bar{E}(\bar{\epsilon}_r + \nu \bar{\epsilon}_{\bar{\theta}})}{1 - \nu^2}, & \bar{\sigma}_{\bar{\theta}} &= \frac{\bar{E}(\bar{\epsilon}_{\bar{\theta}} + \nu \bar{\epsilon}_r)}{1 - \nu^2}, & \bar{\sigma}_{\bar{z}} &= 0 \\ \bar{\tau}_{r\bar{\theta}} &= \frac{\bar{E} \bar{\gamma}_{r\bar{\theta}}}{2(1 + \nu)}, & \bar{\tau}_{\bar{\theta}\bar{z}} &= \frac{\bar{k}' \bar{E} \bar{\gamma}_{\bar{\theta}\bar{z}}}{2(1 + \nu)}, & \bar{\tau}_{\bar{z}r} &= \frac{\bar{k}' \bar{E} \bar{\gamma}_{\bar{z}r}}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

円板の振動の一周期のラグランジュアン L_P を次のように定義する.

$$\begin{aligned} L_P = & \left(\frac{2}{\bar{c}'} \right) \frac{1}{2} \int_0^{\bar{c}'} \int_{-\bar{h}/2}^{\bar{h}/2} \int_0^{2\pi} \int_k \left[\frac{\bar{\gamma}}{g} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}} \right)^2 \right\} - (\bar{\sigma}_r \bar{\epsilon}_r + \bar{\sigma}_{\bar{\theta}} \bar{\epsilon}_{\bar{\theta}} \right. \\ & \left. + \bar{\sigma}_{\bar{z}} \bar{\epsilon}_{\bar{z}} + \bar{\tau}_{r\bar{\theta}} \bar{\gamma}_{r\bar{\theta}} + \bar{\tau}_{\bar{\theta}\bar{z}} \bar{\gamma}_{\bar{\theta}\bar{z}} + \bar{\tau}_{\bar{z}r} \bar{\gamma}_{\bar{z}r} \right] \bar{R}^2 r dr d\bar{\theta} d\bar{z} d\bar{t} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

式 (9)~(11) を式 (12) に代入すると,

$$\begin{aligned} L_P = & \pi \int_k \left[\bar{D}_1 U_0^2 + \bar{D}_2 W^2 - \bar{D} \left\{ \left(\frac{dU_0}{dr} \right)^2 + \left(\frac{U_0}{r} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{U_0}{r} \right) \left(\frac{dU_0}{dr} \right) \right\} \right. \\ & \left. - \bar{D}_3 \left(U_0 + \frac{dW}{dr} \right)^2 + \bar{D}_2 U^2 - \bar{D}_4 \left\{ \left(\frac{dU}{dr} \right)^2 + \left(\frac{U}{r} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{U}{r} \right) \left(\frac{dU}{dr} \right) \right\} \right] r dr \\ & + \pi \int_k \left[(\bar{D}_1 - \bar{D}_3) V_0^2 - \frac{1}{2} (1 - \nu) \bar{D} \left(\frac{dV_0}{dr} - \frac{V_0}{r} \right)^2 + \bar{D}_2 V^2 - \bar{D}_5 \left(-\frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} \right)^2 \right] r dr \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \bar{D}_1 &= \bar{\gamma} \bar{h}^3 \bar{p}'^2 \bar{R}^2 / 12g, & \bar{D}_2 &= \bar{\gamma} \bar{h} \bar{p}'^2 \bar{R}^4 / g, & \bar{D}_3 &= \bar{k}' \bar{E} \bar{h} \bar{R}^2 / 2(1 + \nu) \\ \bar{D}_4 &= \bar{E} \bar{h} \bar{R}^2 / (1 - \nu^2), & \bar{D}_5 &= \bar{E} \bar{h} \bar{R}^2 / 2(1 + \nu), & \bar{D} &= \bar{E} \bar{h}^3 / 12(1 - \nu^2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

式 (13) の右辺の第 2 番めの積分項は, ねじり振動に関する項で, 以後これは省略して考える.

さて, 厚さが半径方向に直線的に変化するものとして次のようにおく.

$$\bar{h} = \bar{h}_0 (1 - \bar{\gamma} r) = \bar{h}_0 \phi(r) \quad \dots\dots\dots (15)$$

ラグランジュアンの停留条件, $\delta L_P = 0$ を求めるため, L_P の第 1 変分 δL_P を求めると,

$$\begin{aligned} \delta L_P = & 2\pi \int_k \bar{D} \bar{E}_1 \delta U_0 r dr + 2\pi \int_k \bar{D}_3 \bar{E}_2 \delta W r dr + 2\pi \int_k \bar{D}_4 \bar{E}_3 \delta U r dr \\ & - 2\pi \left[\bar{D} r \left(\frac{dU_0}{dr} + \nu \frac{U_0}{r} \right) \delta U_0 + \bar{D}_3 r \left(U_0 + \frac{dW}{dr} \right) \delta W + \bar{D}_4 r \left(\frac{dU}{dr} + \nu \frac{U}{r} \right) \delta U \right]_k \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_1 &= r \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{U_0}{r} \right) + 3 \left(1 + \phi^{-1} r \frac{d\phi}{dr} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{U_0}{r} \right) + \frac{1 - \nu}{2} \left\{ (\bar{\alpha}^4 - \bar{\beta} \phi^{-2}) r \right. \\ & \quad \left. + \frac{6(1 + \nu)}{1 - \nu} \phi^{-1} \frac{d\phi}{dr} \right\} \frac{U_0}{r} - \frac{1 - \nu}{2} \bar{\beta} \phi^{-2} \frac{dW}{dr} \\ \bar{E}_2 &= r \frac{d}{dr} \left(\frac{U_0}{r} \right) + \left(2 + \phi^{-1} r \frac{d\phi}{dr} \right) \frac{U_0}{r} + \frac{d^2 W}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \phi^{-1} \frac{d\phi}{dr} \right) \frac{dW}{dr} + \bar{\alpha}'^4 W \\ \bar{E}_3 &= r \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{U}{r} \right) + \left(3 + r \frac{d\phi}{dr} \phi^{-1} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{U}{r} \right) + (1 + \nu) \phi^{-1} \frac{d\phi}{dr} \left(\frac{U}{r} \right) + \bar{\alpha}''^4 U \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

オイラー方程式 (振動方程式) は

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \bar{E}_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

式 (18) で $\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = 0$ は曲げ振動の振動方程式, $\bar{E}_3 = 0$ は面内振動の振動方程式である. なお, $\bar{\alpha}, \bar{\alpha}', \bar{\alpha}''$ は無次元振動数, $\bar{\beta}$ は半径と厚さとの比を表すパラメータ, $\bar{\zeta}$ はポアソン比に関する量でそれぞれ次のように表される.

$\bar{\alpha}^* = 2(1+\bar{\nu})\bar{\gamma}\bar{R}^2\bar{p}'^2/\bar{E}g$, $\bar{\alpha}'^* = \bar{\alpha}^*/\bar{k}'$, $\bar{\alpha}''^* = \bar{\zeta}\bar{\alpha}^*$, $\bar{\beta} = 12\bar{k}'\bar{R}^2/\bar{h}_0^2$, $\bar{\zeta} = (1-\bar{\nu})/2$ (19)
 ここで、振動方程式 (18) を解くため、 ϕ^{-1} , ϕ^{-2} を次のように r のべき級数に展開する。

$$\phi^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\eta}^n r^n, \quad \phi^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \bar{\eta}^n r^n \text{(20)}$$

このとき振動方程式の解は次のように求まる。

(i) 曲げ振動に対して ($\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = 0$)

第 1, 2 の解

$$U_0/r = \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^m, \quad W = \sum_{m=0}^{\infty} B_m r^m \text{(21)}$$

$$\left. \begin{aligned} A_0, B_0: \text{任意定数} \quad B_1=0, \quad B_2=-\frac{1}{4}(2A_0+\bar{\alpha}'^*B_0), \quad A_1=\bar{\eta}(1+\bar{\nu})A_0 \\ A_2=(1/8)[\{3\bar{\eta}^2(1+\bar{\nu})+(1-\bar{\nu})(\bar{\beta}-\bar{\alpha}'^*)/2\}A_0+3\bar{\eta}(2+\bar{\nu})A_1+(1-\bar{\nu})\bar{\beta}B_2] \\ A_m=-f_m/\{m(m+2)\}, \quad B_m=-g_m/m^2 \quad (m \geq 3) \\ f_m=-3 \sum_{q=0}^{m-1} (q+1+\bar{\nu})\bar{\eta}^{m-q}A_q + \frac{(1-\bar{\nu})\bar{\alpha}'^*}{2}A_{m-2} - \frac{(1-\bar{\nu})\bar{\beta}}{2} \left\{ \sum_{q=0}^{m-2} (m \right. \\ \left. -1-q)A_q\bar{\eta}^{m-2-q} + \sum_{q=0}^m q(m+1-q)B_q\bar{\eta}^{m-q} \right\} \\ g_m=-\sum_{q=0}^{m-1} qB_q\bar{\eta}^{m-q} + \bar{\alpha}'^*B_{m-2} + mA_{m-2} - \sum_{q=0}^{m-3} A_q\bar{\eta}^{m-q-2} \end{aligned} \right\} \text{(22)}$$

第 3, 4 の解

$$U_0/r = (\log r) \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^m + \sum_{m=0}^{\infty} A_m' r^{m-2}, \quad W = (\log r) \sum_{m=0}^{\infty} B_m r^m + \sum_{m=0}^{\infty} B_m' r^m \text{(23)}$$

A_m, B_m は式 (22) の A_m, B_m と同じ係数。

また,

$$\left. \begin{aligned} A_0' = \{\bar{\beta}B_0 - 4A_0/(1-\bar{\nu})\}/\{\bar{\alpha}'^* - \bar{\beta} + 6\bar{\eta}^2(1-3\bar{\nu})\}, \quad A_1' = 3\bar{\eta}(1-\bar{\nu})A_0' \\ A_2' = 0, \quad B_0' = 0, \quad B_1' = \bar{\eta}(B_0 + (3\bar{\nu}-2)A_0'), \quad B_2' = \{2\bar{\eta}^2(B_0 + A_0') - A_0 - 4B_2\}/4 \\ A_m' = -(f_{1m} + f_m')/\{m(m-2)\}, \quad B_m' = -(g_{1m} + g_m')/m^2 \quad (m \geq 3) \\ f_{1m} = 2(m-1)A_{m-2} - 3 \sum_{q=0}^{m-3} \bar{\eta}^{m-2-q}A_q - \frac{(1-\bar{\nu})\bar{\beta}}{2} \sum_{q=0}^{m-2} (m-1-q)\bar{\eta}^{m-2-q}B_q \\ f_m' = -3 \sum_{q=0}^{m-1} (q-1+\bar{\nu})\bar{\eta}^{m-q}A_q' + \frac{(1-\bar{\nu})\bar{\alpha}'^*}{2}A_{m-2}' - \frac{(1-\bar{\nu})\bar{\beta}}{2} \left\{ \sum_{q=0}^{m-2} (m-1 \right. \\ \left. -q)A_q'\bar{\eta}^{m-2-q} + \sum_{q=0}^{m-2} q(m-1-q)\bar{\eta}^{m-2-q}B_q' \right\} \\ g_{1m} = 2mB_m - \sum_{q=0}^{m-1} B_q\bar{\eta}^{m-q} + A_{m-2} \\ g_m' = mA_m' - \sum_{q=0}^{m-1} A_q'\bar{\eta}^{m-q} - \sum_{q=0}^{m-1} qB_q'\bar{\eta}^{m-q} + \bar{\alpha}'^*B_{m-2}' \end{aligned} \right\} \text{(24)}$$

(ii) 面内振動に対して ($\bar{E}_3 = 0$)

第 1 の解

$$U/r = \sum_{m=0}^{\infty} C_m r^m \text{(25)}$$

$$\left. \begin{aligned} C_0: \text{任意定数}, \quad C_1 = (1/3)C_0(1+\bar{\nu})\bar{\eta}, \quad C_m = -h_m/\{m(m+2)\} \quad (m \geq 2) \\ h_m = -\sum_{q=0}^{m-1} (q+1+\bar{\nu})C_q\bar{\eta}^{m-q} + \bar{\alpha}''^*C_{m-2} \end{aligned} \right\} \text{(26)}$$

第 2 の解

$$U/r = (\log r) \sum_{m=0}^{\infty} C_m r^m + \sum_{m=0}^{\infty} C_m' r^{m-2} \text{(27)}$$

C_m は式 (26) の C_m と同じ係数である。

また,

$$\left. \begin{aligned} C_0' &= -2C_0 / \{(1-\bar{\nu})^2 \bar{\eta}^2 + \bar{\alpha}''^4\}, & C_1' &= -2(1-\bar{\nu}) \bar{\eta} C_0 / \{(1-\bar{\nu})^2 \bar{\eta}^2 + \bar{\alpha}''^4\} \\ C_2' &= 0, & C_m' &= -h_m' / m(m-2) \quad (m \geq 3) \\ h_m' &= 2(m-1)C_{m-2} - \sum_{q=0}^{m-3} C_q \bar{\eta}^{m-q-2} - \sum_{q=0}^{m-1} (q-1+\bar{\nu}) C_q' \bar{\eta}^{m-q} + \bar{\alpha}''^4 C_{m-2}' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

4. 境界値で表した円板のラグランジュアン

振動方程式 (18) を考慮して、式 (13) を部分積分すると、積分項は消失して、

$$\left. \begin{aligned} L_P &= L_{P0} + L_{PI} \\ -L_{P0}/\pi &= \left| \bar{D}r \left(\frac{dU_0}{dr} + \frac{\bar{\nu}U_0}{r} \right) U_0 + \bar{D}_3 r \left(U_0 + \frac{dW}{dr} \right) W \right|_k^1 \\ -L_{PI}/\pi &= \left| \bar{D}_4 r \left(\frac{dU}{dr} + \frac{\bar{\nu}U}{r} \right) U \right|_k^1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

L_{P0} は曲げ振動の、 L_{PI} は面内振動のラグランジュアンである。式 (21) より求まる 2 組の独立な解を (U_{01}, W_1) (U_{02}, W_2) 、式 (23) より求まる 2 組の独立な解を (U_{03}, W_3) (U_{04}, W_4) 、また式 (25)、(27) より求まる独立な解をそれぞれ U_1, U_2 とし、積分定数を $\bar{\lambda}_1 \sim \bar{\lambda}_6$ とすると、振動方程式の一般解は次のように与えられる。

有孔円板の場合

$$U_0 = \sum_{q=1}^4 \bar{\lambda}_q U_{0q}, \quad W = \sum_{q=1}^4 \bar{\lambda}_q W_q, \quad U = \sum_{q=1}^2 \bar{\lambda}_{q+4} U_q \dots\dots\dots (30)$$

穴なし円板の場合

$$U_0 = \sum_{q=1}^2 \bar{\lambda}_q U_{0q}, \quad W = \sum_{q=1}^2 \bar{\lambda}_q W_q, \quad U = \bar{\lambda}_5 U_1 \dots\dots\dots (31)$$

以後有孔円板として話を進める。なお、穴なし円板の場合は、以後の説明で、 $r=k$ における境界値を取り除いて考えれば良い。

境界値を円板の内外周で次のようにおく。

$$U_0|_{r=1} = \bar{a}_0, \quad W|_{r=1} = \bar{b}_0, \quad U_0|_{r=k} = \bar{c}_0, \quad W|_{r=k} = \bar{d}_0, \quad U|_{r=1} = \bar{e}_0, \quad U|_{r=k} = \bar{f}_0 \dots\dots\dots (32)$$

式 (30) を式 (32) に代入して積分定数を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_p &= (-1)^{p+1} (\bar{a}_0 \Delta_{1pa} - \bar{b}_0 \Delta_{2pa} + \bar{c}_0 \Delta_{3pa} - \bar{d}_0 \Delta_{4pa}) / \Delta_{0a} \quad (p=1 \sim 4) \\ \bar{\lambda}_{q+4} &= (-1)^q \{ \bar{e}_0 U_q(k) - \bar{f}_0 U_q(1) \} / \Delta_{0b} \quad (q=1, 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

ここに、

$$\Delta_{0a} = \begin{vmatrix} U_{01}(1) & U_{02}(1) & U_{03}(1) & U_{04}(1) \\ W_1(1) & W_2(1) & W_3(1) & W_4(1) \\ U_{01}(k) & U_{02}(k) & U_{03}(k) & U_{04}(k) \\ W_1(k) & W_2(k) & W_3(k) & W_4(k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{0b} = \begin{vmatrix} U_1(1) & U_2(1) \\ U_1(k) & U_2(k) \end{vmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

また、 Δ_{pqa} は Δ_{0a} の p 行めと q 列めの要素を取り除いた 3 行 3 列の行列式である。

式 (29) に式 (32)~(34) を代入すると、円板のラグランジュアンは境界値の二次形式で表されて、次のようになる。

$$\begin{aligned} -L_{P0}/\pi \bar{D}_0 &= (\bar{a}_0^2 G_1 + \bar{b}_0^2 G_2 + \bar{c}_0^2 G_3 + \bar{d}_0^2 G_4 + \bar{a}_0 \bar{b}_0 G_5 + \bar{a}_0 \bar{c}_0 G_6 + \bar{a}_0 \bar{d}_0 G_7 \\ &\quad + \bar{b}_0 \bar{c}_0 G_8 + \bar{b}_0 \bar{d}_0 G_9 + \bar{c}_0 \bar{d}_0 G_{10}) / \Delta_{0a} \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} G_1 &= \phi^3(1)(S_1 + \bar{\nu} \Delta_{0a}), & G_2 &= \bar{\zeta} \bar{\beta} \phi(1) S_{10}, & G_3 &= -\phi^3(k) k \left(S_7 + \bar{\nu} \frac{\Delta_{0a}}{k} \right) \\ G_4 &= -\bar{\zeta} \bar{\beta} \phi(k) k S_{18}, & G_5 &= S_2 \phi^3(1) + (\Delta_{0a} + S_9) \bar{\zeta} \bar{\beta} \phi(1) \\ G_6 &= S_3 \phi^3(1) - S_5 \phi^3(k) k, & G_7 &= S_4 \phi^3(1) - S_{13} \bar{\zeta} \bar{\beta} \phi(k) k \\ G_8 &= S_{11} \bar{\zeta} \bar{\beta} \phi(1) - S_6 \phi^3(k) k, & G_9 &= S_{12} \bar{\zeta} \bar{\beta} \phi(1) - S_{14} \bar{\zeta} \bar{\beta} \phi(k) k \\ G_{10} &= -S_8 \phi^3(k) k - (\Delta_{0a} + S_{15}) \bar{\zeta} \bar{\beta} \phi(k) k \\ S_p &= (-1)^{p+1} \left[\frac{dU_{01}(1)}{dr} \Delta_{p1a} - \frac{dU_{02}(1)}{dr} \Delta_{p2a} + \frac{dU_{03}(1)}{dr} \Delta_{p3a} - \frac{dU_{04}(1)}{dr} \Delta_{p4a} \right] \quad (p=1 \sim 4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

また $S_5 \sim S_8$ は, $S_1 \sim S_4$ で $U_{0p}(1)$ を $U_{0p}(k)$ に変えた式,

$S_9 \sim S_{12}$ は, $S_1 \sim S_4$ で $U_{0p}(1)$ を $W_p(1)$ に変えた式,

$S_{13} \sim S_{16}$ は, $S_1 \sim S_4$ で $U_{0p}(1)$ を $W_p(k)$ にそれぞれ変えた式である ($p=1 \sim 4$).

$$-L_{p1}/\pi \bar{D}_0 = (\bar{e}_0^2 H_1 + \bar{f}_0^2 H_2 + \bar{e}_0 \bar{f}_0 H_3) / \Delta_{00} \dots\dots\dots (37)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \bar{\beta}' \phi(1) (S_{17} + \bar{v} \Delta_{00}), & H_2 &= -\bar{\beta}' \phi(k) k \left(S_{20} + \frac{\bar{v}}{k} \Delta_{00} \right) \\ H_3 &= \bar{\beta}' \{ \phi(1) S_{18} - \phi(k) k S_{19} \}, & \bar{\beta}' &= \bar{\beta} / k', & \bar{D}_0 &= E \bar{h}_0^3 / 12 (1 - \bar{v}^2), & \bar{D}_4 &= \bar{D}_0 \bar{\beta}' \phi(r) \\ S_{17} &= U_2(k) \frac{dU_1(1)}{dr} - U_1(k) \frac{dU_2(1)}{dr}, & S_{18} &= U_1(1) \frac{dU_2(1)}{dr} - U_2(1) \frac{dU_1(1)}{dr} \\ S_{19} &= U_2(k) \frac{dU_1(k)}{dr} - U_1(k) \frac{dU_2(k)}{dr}, & S_{20} &= U_1(1) \frac{dU_2(k)}{dr} - U_2(1) \frac{dU_1(k)}{dr} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

例えば円板の内外周を固定にした曲げ振動では, すべての境界値 $\bar{a}_0, \bar{b}_0, \bar{c}_0, \bar{d}_0$ が零になり, 振動数方程式は

$$\Delta_{0a} = 0 \dots\dots\dots (39)$$

また, 内周固定, 外周自由の場合は境界値 $\bar{a}_0, \bar{b}_0$ が任意で $\bar{c}_0 = \bar{d}_0 = 0$ であるから, ラグランジュアンの極小条件 $\partial L_{p0} / \partial (\bar{a}_0, \bar{b}_0) = 0$ より,

振動数方程式は

$$4G_1 G_2 - G_3^2 = 0 \dots\dots\dots (40)$$

また, 円板の面内振動で, 内周固定, 外周固定の場合は

$$\Delta_{0b} = 0 \dots\dots\dots (41)$$

内周固定, 外周自由の場合は

$$H_1 = 0 \dots\dots\dots (42)$$

5. 変厚容器の軸対称振動

円筒の両端に同一寸法の変厚円板のふたを付けた変厚容器の軸対称振動を考える。ふたとして, 同心円板を考え外周に沿って円筒と接続しているものとする。また, 円筒と円板とは同一材質とし, 両者の板厚比を $\kappa = \bar{h}_0 / h_0$ とする。円板の境界値を次の様におきかえる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_0 &= \pm \bar{a}_0' + \bar{a}_0^{*'}, & \bar{b}_0 &= \pm \bar{b}_0' + \bar{b}_0^{*'}, & \bar{c}_0 &= \pm \bar{c}_0' + \bar{c}_0^{*'} \\ \bar{d}_0 &= \pm \bar{d}_0' + \bar{d}_0^{*'}, & \bar{e}_0 &= \bar{e}_0' \pm \bar{e}_0^{*'}, & \bar{f}_0 &= \bar{f}_0' \pm \bar{f}_0^{*'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

ここで, 複号の+は, 上円板に対応し, -は下円板に対応する。円筒と円板の連続条件は上端 ($x = \mu$) 及び下端 ($x = -\mu$) で同じで,

$$W = u, \quad U = -w, \quad U_a = u_0 \dots\dots\dots (44)$$

式 (4), (32), (43), (44) を用いることにより両者の境界値間には, 次の関係が成立する。

$$\bar{a}_0' = c_0, \quad \bar{b}_0' = a_0, \quad \bar{e}_0' = -b_0, \quad \bar{a}_0^{*'} = c_0^*, \quad \bar{b}_0^{*'} = a_0^*, \quad \bar{e}_0^{*'} = -b_0^* \dots\dots\dots (45)$$

容器のラグランジュアン L は, 円筒のラグランジュアンと上下両円板のラグランジュアンの和で表される。式 (7), (35), (37) のラグランジュアンを用いて,

$$L = L_S + L_A \dots\dots\dots (46)$$

ここに,

$$\begin{aligned} -L_S / 2\pi D_0 &= a_0^2 \left(\frac{F_1}{\Delta_0} + \frac{\kappa^3 G_2}{\Delta_{0a}} \right) + b_0^2 \left(\frac{F_2}{\Delta_0} + \frac{\kappa^3 H_1}{\Delta_{0b}} \right) + c_0^2 \left(\frac{F_3}{\Delta_0} + \frac{\kappa^3 G_1}{\Delta_{0a}} \right) \\ &+ a_0 b_0 \frac{F_4}{\Delta_0} + a_0 c_0 \left(\frac{F_5}{\Delta_0} + \frac{\kappa^3 G_5}{\Delta_{0a}} \right) + b_0 c_0 \frac{F_6}{\Delta_0} + \bar{c}_0'^2 \frac{\kappa^3 G_3}{\Delta_{0a}} + \bar{d}_0'^2 \frac{\kappa^3 G_4}{\Delta_{0a}} \\ &+ a_0 \bar{c}_0' \frac{\kappa^3 G_3}{\Delta_{0a}} + c_0 \bar{d}_0' \frac{\kappa^3 G_7}{\Delta_{0a}} + c_0 \bar{e}_0' \frac{\kappa^3 G_8}{\Delta_{0a}} + a_0 \bar{d}_0' \frac{\kappa^3 G_9}{\Delta_{0a}} + \bar{e}_0' \bar{d}_0' \frac{\kappa^3 G_{10}}{\Delta_{0a}} \\ &+ \bar{f}_0'^2 \frac{\kappa^3 H_2}{\Delta_{0b}} - b_0 \bar{f}_0' \frac{\kappa^3 H_3}{\Delta_{0b}} \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

$-L_A / 2\pi D_0$ は式 (47) で $a_0, b_0, c_0, \bar{c}_0', \bar{d}_0', \bar{f}_0', \Delta_0, F_1 \sim F_6$ をそれぞれ $a_0^*, b_0^*, c_0^*, \bar{c}_0^{*'}, \bar{d}_0^{*'}, \bar{f}_0^{*'}$,

Δ_0^* , $F_1^* \sim F_6^*$ に変えた式で表される.

容器の振動数方程式は以下のようにして求められる. 例えば両円板の内周が自由な場合は, ラグランジュアンの極小条件

$$\left. \begin{aligned} \partial L / \partial (a_0, b_0, c_0, \bar{c}_0', \bar{d}_0', \bar{f}_0') &= 0 \\ (a_0^* = b_0^* = c_0^* = \bar{c}_0^* = \bar{d}_0^* = \bar{f}_0^* &= 0) \end{aligned} \right\} \dots (48)$$

$\beta=1000$, $\eta=-0.3$, $\bar{\eta}=-0.2$, $\kappa=0.9$

太い実線 (容器), 細い実線 (両端自由単一円筒)

細い鎖線 (両端支持単一円筒), 細い破線 (両端固定単一円筒)

図 3 振動数曲線 (穴なし, 対称振動)

線の区別および β , $\bar{\eta}$, η , κ の値は図3に同じ

図 4 振動数曲線 (穴なし, 反対称振動)

より, $x=0$ に関して対称な振動の振動数方程式が,

$$\left. \begin{aligned} \partial L / \partial (a_0^*, b_0^*, c_0^*, \bar{c}_0^*, \bar{d}_0^*, \bar{f}_0^*) &= 0 \\ (a_0 = b_0 = c_0 = \bar{c}_0' = \bar{d}_0' = \bar{f}_0' &= 0) \end{aligned} \right\} \dots (49)$$

より, 反対称な振動の振動数方程式が求まる. 両円板の内周を固定した場合は, $U(k) = W(k) = U_0(k) = 0$ より, $\bar{c}_0' = \bar{c}_0^* = \bar{d}_0' = \bar{d}_0^* = \bar{f}_0' = \bar{f}_0^* = 0$ となり, ラグランジュアンの極小条件

$$\partial L / \partial (a_0, b_0, c_0) = 0 \quad (a_0^* = b_0^* = c_0^* = 0) \dots (50)$$

より対称振動の振動数方程式が, また

$$\partial L / \partial (a_0^*, b_0^*, c_0^*) = 0 \quad (a_0 = b_0 = c_0 = 0) \dots (51)$$

より反対称振動の振動数方程式がそれぞれ求まる.

6. 数 値 計 算

数値計算では, 種々のパラメータが変厚容器の無次元振動数におよぼす影響を調べた. 使用した計算機の容量の関係で, 級数解は円筒, 円板の場合とも, 40 項~70 項求めて計算した. また, ポアソン比 $\nu = \bar{\nu} = 0.3$, せん断修正係数 k' , $\bar{k}'$ は Mirsky⁽⁵⁾, Mindlin⁽⁶⁾ の使用している値 $\pi^2/12$ を用いた. 各種パラメータとして $\beta = 200 \sim 2000$, $\eta = -0.2, 0.2$, $\bar{\eta} = -0.7 \sim 0.7$, $\alpha_0^*/\beta = 0 \sim 2.5$, $\kappa = 0.4 \sim 2.0$, $k = 0 \sim 0.7$ の範囲の適当な組合せで計算した. 円筒と円板が同材質とすると, 円筒と円板の無次元諸量に関しては, 次の関係が成立する.

$\beta=500$, $\eta=-0.2$, $\kappa=1.0$

太い破線 ($\bar{\eta}=0.3$), 太い実線 ($\bar{\eta}=-0.01$)

太い鎖線 ($\bar{\eta}=-0.3$), 細い実線 ($\bar{\eta}=-0.7$)

細い破線 (両端固定単一円筒)

図 5 振動数曲線 (穴なし, 対称振動)

$$\alpha^4 = \alpha_0^4 / \beta, \quad \bar{\alpha}^4 = \alpha^4 / \zeta, \quad \bar{\alpha}'^4 = \alpha^4 / (\zeta k'), \quad \bar{\alpha}''^4 = \alpha^4 / \beta$$

$$\bar{\beta} = k' \beta / \kappa^2, \quad \bar{\beta}' = \beta / \kappa^2$$

.....(52)

計算では、はじめに $\nu, k', \alpha^4, \beta, k, \eta, \bar{\eta}, \kappa$ などの諸量を与え、次に振動数方程式を満足する円筒部

の無次元長さ μ の値を求めた。

図 3, 4 は穴なし円板のついた容器の対称および反対称振動の振動数曲線を示す。参考のため、両端固定、支持、自由単一円筒の α^4 - μ 曲線もあわせて示している。図 5, 6 でも同様であるが、 μ が零に近づく

線の区別および β, η, κ の値は図 5 に同じ

図 6 振動数曲線 (穴なし, 反対称振動)

$\beta=500, \bar{\eta}=0.5, k=0.5, \kappa=1$

太い実線 (対称 $\eta=0.5$), 太い破線 (対称 $\eta=-0.2$)
 細い実線 (反対称 $\eta=0.2$), 細い破線 (反対称 $\eta=-0.2$)
 $\eta=-0.2$ の一次は $\eta=0.2$ の一次の曲線にほとんど重なる。

図 7 振動数曲線 (内周固定)

$\beta=500, \bar{\eta}=0.5, \eta=0.2, k=0.5$

太い実線 ($\kappa=0.4$), 太い鎖線 ($\kappa=0.5$)
 太い破線 ($\kappa=0.7$), 細い実線 ($\kappa=1.0$)
 細い鎖線 ($\kappa=2.0$), 細い破線 (両端固定円筒)

図 8 振動数曲線 (内周固定, 対称振動)

線の区別および $\beta, \bar{\eta}, \eta, k$ の値は図 8 に同じ

図 9 振動数曲線 (内周固定, 反対称振動)

につれて振動数曲線は対称振動では、周固定円板の曲げ振動数に、反対称振動では周自由円板の曲げ振動数に接近する。図3で α^4 軸上に示した0.1204,

1.4176は周固定円板の一次と二次の曲げ固有振動数であり、図4の α^4 軸上の0.0779, 1.3352は周自由円板の一次と二次の曲げ固有振動数である。なおこの

$\bar{\eta}=0.5, \eta=-0.2, k=0.5, \kappa=1.0$
太い実線 ($\beta=2000$), 太い鎖線 ($\beta=1500$)
太い破線 ($\beta=1000$), 細い実線 ($\beta=700$)
細い鎖線 ($\beta=500$), 細い破線 ($\beta=300$)

図10 振動数曲線 (内周固定, 対称振動)

$\beta=500, \bar{\eta}=0.5, \eta=0.2, \kappa=1.0$
太い実線 (穴なし), 細い鎖線 ($k=0.01$)
太い破線 ($k=0.3$), 細い実線 ($k=0.5$)
太い鎖線 ($k=0.7$), 細い破線 (両端固定単一円筒)

図12 振動数曲線 (内周固定, 対称振動)

$\bar{\eta}=0.5, \eta=-0.2, k=0.5, \kappa=1.0$
太い実線 ($\beta=1500$), 太い鎖線 ($\beta=1000$)
細い実線 ($\beta=700$), 細い鎖線 ($\beta=500$)
細い破線 ($\beta=300$)

図11 振動数曲線 (内周固定, 反対称振動)

$\beta=500, \bar{\eta}=0.5, \eta=0.2, \kappa=1.0$
太い実線 (穴なし), 細い鎖線 ($k=0.01$)
太い鎖線 ($k=0.3$), 細い実線 ($k=0.5$)
太い破線 ($k=0.7$), 細い破線 (両端固定単一円筒)

図13 振動数曲線 (内周固定, 反対称振動)

後図7~13で示す、内周固定円板の付いた容器の場合、対称振動では μ が零に近づくにつれて振動数曲線は内外周固定の、反対称振動では、内周固定、外周自由円板の曲げ振動数にそれぞれ接近する。図4の反対称振動で、 μ が小さいところでは振動数曲線には山や谷が生じ、複雑な振動形態を示していることがわかる。

図5, 6は、円板部の板厚を変化させた場合の穴なし円板の付いた容器の α^4 - μ 曲線である。 $\beta=500$, $\eta=-0.2$, $\kappa=1.0$ の場合で、対称、反対称振動の場合とも一次~五次までの振動数曲線を示した。 $\bar{\eta}$ がマイ

ナスのときは円板の外周部の板厚が中心部より厚くなっている場合で、プラスのときは、薄くなっている場合である。 μ が小さくなる程 $\bar{\eta}=-0.3$, -0.7 の場合の振動数と $\bar{\eta}=-0.01$ (ほぼ一様厚), 0.3 の場合の振動数の差が大きくなることわかる。

図7は、円筒部の板厚 $\eta=0.2$, -0.2 で、 $\beta=500$, $\kappa=1$, $\bar{\eta}=0.5$, $k=0.5$ のときの内周固定容器の α^4 - μ 曲線を示す。反対称振動の一次を除けば図示の範囲では、対称、反対称振動の曲線が交互にほぼ等間隔に現れており、また、板厚の変化は高次になるにつれて

図12の振動数曲線上の点のモードを示す。

図14 振動モード ($k=0.01$)

図13の振動数曲線上の点のモードを示す。

図15 振動モード ($k=0.01$)

大きくなっている。図5, 6の結果と図7を比較すると, μ が大きいところでは円筒部の板厚の変化に, 小さいところでは円板部の板厚の変化に振動数が支配されていることがわかる。

図8, 9は円筒部と円板部の板厚比に $\kappa (=h_0/h_0)$ を変化させたときの $\alpha^4-\mu$ 曲線を示す。 κ が大きくなるにつれて振動数は上昇する。また κ が1より小さい範囲で, 円板の固有値付近で振動数曲線の移行現象がみられ, その付近では, 円筒部の長さの変化に比べて, 振動数は変わらない。

図10, 11は板の薄さを表す量 β による振動数の変化を示す。 $\eta = -0.2$, $\kappa = 1$, $\bar{\eta} = 0.5$, $k = 0.5$, $\beta = 300, 700, 1000, 1500, 2000$ ($R/h_0 = 5.0, 7.6, 9.1, 11.1, 12.9$) の場合である。 β が大きくなるにつれて, 振動数は低く現れている。また, μ が小さいところでは, β による差は大きい, μ が大きくなる(円筒が長くなる)につれてその差は小さくなっている。

図12は内周固定容器の穴の大きさ k を変化させたときの対称振動における $\alpha^4-\mu$ 曲線, 図13は反対称振動の曲線を示す。 $\beta = 500$, $\eta = 0.2$, $\bar{\eta} = 0.5$, $\kappa = 1.0$ で比較のため穴なしの場合も示している。図より, k が大きくなる(穴の径が大きくなる)につれて振動数曲線はしだいに高く求まる。しかし, μ が大きくなるにつれて曲線はほとんど k に無関係に漸近している。 $k = 0.01$ の場合の二次以上の曲線は, 円板の固有値付近またはそれより少し下がった地点において, 移行する現象が見られる。また, それ以外の点では, 穴なし曲線に漸近している。なお, 図中の ①~⑬の数字は, 容器の円筒部のモード w の計算点で, 図14, 15で示す。

図14は, 内周固定容器の対称振動のモード ($\beta = 500$, $\eta = 0.2$, $\kappa = 1$, $\bar{\eta} = 0.5$, $k = 0.01$) を示す。図12の振動数曲線上の点のモード w で, ①は一次, ②~④は二次, ⑤~⑧は三次, ⑨~⑪は四次, ⑫~⑭は五次, ⑮, ⑯は六次の場合である。モードの計算では円筒の境界値 $a_0 = 1$ としてすべて行った。なお, 図では w の大きさはそれぞれ適当に縮尺して示している。これは, 図15でも同じ。図14を見ると, 例えば三次のモード⑤~⑧において, ⑧は④のモード(二次のモード)に近く, それが振動数曲線の移行と共に複雑に変

化し, ⑥は⑪のモード(四次のモード)に近づいている。このように, 同じ次数の振動でも, 振動数曲線の移行現象と共に, モードの移行現象が見られる。また, 異なる次数の振動でも, 振動数曲線が接近するところでは同じようなモードになっている。

図15は, 内周固定容器の反対称振動のモードを示す。図13の振動数曲線上の点のモードで, ①は一次, ②は二次, ③~⑥は三次, ⑦~⑩は四次, ⑪~⑭は五次, ⑮, ⑯は六次の場合である。傾向は対称振動の場合とほとんど同じである。

7. 結 言

本報告では, 厚さが軸方向に変化する円筒殻の上下端に, 厚さが半径方向に変化する円板を接続した系の軸対称振動を修正厚肉理論を用いて解析した。数値例として, 内周を固定した円板および穴なし円板を接続した容器の固有振動数および振動モードを求め, 各種パラメータが振動におよぼす影響を明らかにした。

その結果をまとめると,

(1) 容器の振動数は, 円筒部が短ければ, 対応次数の単一円板の固有振動数に近い。しかし, 長さが増すにつれ振動数は単一円筒の固有振動数に近づく。

(2) 円筒部と円板部の板厚の変化に関しては, 両者の板厚比が大きくなったとき, 円板の穴が大きくなったとき, また板厚が厚くなったとき振動数は一般に高くなり, この傾向は高次になるにつれ, 顕著となる。

(3) 円筒部の長さによっては振動数曲線および振動モードに移行現象が見れる。

が明らかになった。

本報告における数値計算は, すべて東北大学大型計算機センター, ACOS シリーズ 77 NEAC システム 900 により行った。

終わりに, 数値計算を手伝った山形大学工学部技官, 山口たい子さんに謝意を表する。

文 献

- (1) 高橋・平野, 機論, 35-274 (昭 44), 1215.
- (2) 高橋・平野, 機論, 36-285 (昭 45), 731.
- (3) 平野, 機論, 34-266 (昭 43), 1723.
- (4) 鈴木・ほか2名, 機論, 47-416, C (昭 56), 405.
- (5) Mirsky, I., *J. Acoust. Soc. Am.*, 36-1 (1964), 41.
- (6) Mindlin, R.D., *J. Appl. Mech.*, 18-1 (1951), 31.

討 論

〔質問〕 近 藤 尚 夫

(石川島播磨重工業会社技術研究所)

(1) 式 (44) では変位成分と回転の連続条件を考えているが、一般には、軸方向力、せん断力、曲げモーメントの連続条件も併せて考えるべきではないのか。

上記に関する質問者の主張は下記のとおりである。連続条件を表すはん関数として

$$\pi\{\lambda_1(u-W)+\lambda_2(w+U)+\lambda_3(u_0-U_0)\}|\frac{d}{d\mu}$$

を考える。 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ はラグランジュの乗数である。円筒と平板のラグランジュアンに上記のはん関数を加えたものの第1変分をとって、停留条件を求めることにより、例えば、 λ_3 は円筒および平板の曲げモーメントに等しくなるべきであることがでてくる。 λ_1, λ_2 についても同様である。従って、式 (44) に加えて、軸方向力、せん断力、曲げモーメントの連続条件が必要である。

(2) ラグランジュアンの極小条件：式 (48), (49) によって上記の力に関する連続条件は数値的に満足されると考えられるが、数値的に確かめてあるのならば示していただきたい。

(3) 円筒で β が十分大で、 μ が大となると数値解の収束が悪くなると考えられる。このような場合の近似解として、古典理論の膜力解と端末拘束解のような、緩やかに変化する解と急激に変化する解とを、漸近積分法などを用いて、分離することができないのか。

(4) 式 (23), (27) で $\log r$ の特異性をもつ解を仮定しているが、例えば、式 (27) で2個の特性根の差が整数であることが確かめてあるのか。

〔回答〕 (1), (2) ラグランジュアンを未定境界値(境界における変位、傾斜、ねじり角)の二次形式で表し、未定境界値に関するラグランジュアンの極

小条件から振動数方程式を導く方法の理論的根拠については、すでに高橋(付1)(付2)、平野(付3)によって説明がなされている。また、その方法によって著者らはすでに、棒、円板、円筒などの接続系の自由振動に関する多くの論文を発表している。棒、円板、殻の線形自由振動においては(一般の弾性体についてもいえる)、ラグランジュアンはすべて未定境界値の二次形式で表される。そして、未定境界値に関するラグランジュアンの極小条件は、境界における力学的境界条件(端が接続される場合は力学的連続条件)を与えることが、式の上でまた、数値的にすでに証明されている。ただし、接続系の場合、力学的連続条件を式の上で証明することは、棒の場合は簡単だが、円板や円筒の場合は無理なようである。数値的に確かめなかったが、本問の場合も、式 (48), (49) の極小条件のうち、 $\partial L/\partial a_0=0$, $\partial L/\partial b_0=0$, $\partial L/\partial a_0^*=0$, $\partial L/\partial b_0^*=0$ は力の連続条件を、 $\partial L/\partial c_0=0$, $\partial L/\partial c_0^*=0$ は曲げモーメントの連続条件を与えると考える。

(3) ご指摘のように、 μ が大きくなるにつれて解の収束は悪くなり、 $\mu=2$ では数けたしか信用できず、求まる振動数も信用できない。 μ が大きい場合の近似解として、貴説のような解も考えられるが、現時点では検討していないので、なんともいえない。今後研究していきたいと考えている。

(4) 確かめている。 $U/r=\sum_{m=0}^{\infty} C_m r^{m+p}$ とおき、式 (18) の $\bar{E}_z=0$ に代入すると、 $m=0$ で $p(p+2)\times C_0=0$ (特性方程式) となり、2個の特性根は $p=0$, -2 となる。従って2個の特性根の差は整数となる。

(付1) 高橋、機誌、75-640(昭47), 708.

(付2) 谷口・ほか37名、振動工学ハンドブック(昭51), 67, 養賢堂.

(付3) 平野、東北大学学位論文、(昭45).