磁気ばね動吸振器の挙動*

井上 順吉**, 倉掛 幸隆***
Junkichi INOUE, Yukitaka KURAKAKE

Key Words: Theory of Vibration, Magnetic Dynamic Damper, Dynamic Damper

1. ま え が き

磁気ばね動吸振器をとりつけた振動系は既報⁽¹⁾⁽²⁾に示すように非線形振動をする。非線形振動系が周期的外力によって振動しているとき、その共振曲線は左、または右に傾き、その共振点付近において、一つの振動数に対し、一つ以上の定常振動解がある。このような系をある振動数で駆動するとき、上記の定常振動のいずれをとるかは、その系に与える初期条件によって決定される。林⁽³⁾、Tondl⁽⁴⁾は、このことについて述べており、前者は一自由度系について、後者は、二自由度系を取扱っている。これらは初期条件に外乱を与えたとき、いずれの定常解に到達するかをアナログコンピュータで計算し、位相内にそれぞれの定常解に達する初期値の領域をえがき、またこの定常解の発生する確率を求めている。したがって一つの領域内の点に相当する初期値をもつ振動体は同じ定常振動におちつく。

本論文は、磁気ばね動吸振器を周期的外力により振動している振動体（主振動体）にとりつけた系について、上記の手法を用いて定常解に対する位相面上での初期値の領域等をデジタルコンピュータにより解析し、この系の共振点における挙動を求めた。

2. 運動方程式

図1は水平振動する主振動体に磁気ばね動吸振器を取りつけた系の力学系である。①は主振動体で質量 M 、②は磁気ばね動吸振器、③、④はこの動吸振器本体の端面に固定した磁石である。⑤は磁石をもった可動体（吸振質量）でその質量を m とする。この可動体は端面磁石③、④より磁気力をうけながら両端面磁石の間をその軸線に沿って運動する。⑥は動吸振器本体と可動体との間にとりつけた粘性ダンパで、 c をその粘性抵抗係数とする。周期的外力の振幅を P 、 ω

をその角振動数とする。可動体と端面磁石との間に働く磁気力はその磁石の間の間隔の一次関数の二乗に逆比例する。その比例係数を B 、 β で表す。両端面磁石の間隔を L_0 、系の平衡時の端面磁石と可動体との間隔を l_1 、 l_2 とする。主振動体の変位を x_1 、可動体（吸振質量）の変位を x_2 、相対変位を $x_r = x_2 - x_1$ とする。運動方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + kx_1 &= f(x_r) + P \sin \omega t \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -f(x_r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、

$$f(x_r) = c \frac{dx_r}{dt} + \frac{B_1}{(1 + \beta_1 l_1)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{(1 + P_{10} x_r)^2} \right\} - \frac{B_2}{(1 + \beta_2 l_2)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{(1 - P_{20} x_r)^2} \right\}$$

$$X_1 = x_1 / L_0, \quad X_2 = x_2 / L_0 \dots A_0 = P / k L_0, \quad \omega_n = \sqrt{k / M}$$

$$\alpha = m / M, \quad \gamma = c / 2 \sqrt{M k}, \quad \lambda = \omega / \omega_n, \quad \tau = t \omega_n$$

$$K_1 = B_1 / \{k L_0 (1 + \beta_1 l_1)^2\}$$

$$K_2 = B_2 / \{k L_0 (1 + \beta_2 l_2)^2\}$$

$$P_1 = \beta_1 L_0 / (1 + \beta_1 l_1), \quad P_2 = \beta_2 L_0 / (1 + \beta_2 l_2)$$

とすると無次元化方程式は水平振動で左右対称の場合

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + X_1 &= g(X_r) + A_0 \sin \lambda \tau \\ \alpha \frac{d^2 X_2}{d\tau^2} &= -g(X_r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで

図1 力学系

* 昭和56年3月18日 九州支部第34期総会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和55年10月23日。

** 正員、九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎町)。

*** 正員、佐世保工業高等専門学校(〒857-11 佐世保市沖新田1-1)。

$$g(X_r) = 2\gamma \frac{dX_r}{d\tau} + K_1 \left\{ 1 - \frac{1}{(1+P_1 X_r)^2} \right\} - K_2 \left\{ 1 - \frac{1}{(1-P_2 X_r)^2} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

3. 初期値の外乱による発生確率

振動系の運動状態は系の任意の時刻における変位と速度によって決定される。したがって二自由度系は四次元空間（林位相空間）の点として示される。ここで、定常振動は一定の周期 T をもって運動しているから、 $T=2\pi/\omega$ となり、一つの定常振動はこの空間内で一つの、閉ざされた、軌道をえがく。非線形二自由度の共常振点では一つの振動数に対し二つの定常状態が存在するから、この閉ざされた軌道は2個存在する。振幅の大きい定常振動の共振曲線は共振解曲線、振幅の小さい定常振動曲線を非共振解曲線とよぶ。定常状態におけるこの閉曲線上の時刻 $\tau=0$ の点を $\tau=0$ における特異点とよび、この点に初期値をもつ運動は、この閉曲線上を運動する。初期点（初期条件）に外乱を与えたとき、その初期点の位置により、系の運動は二つの軌道のいずれかに到達する。したがってこの一方の軌道に到達する位相空間の初期点の領域があ

る。他の領域は他の軌道に到達する。

一自由度系ではこの位相空間は平面であり、 $\tau=0$ において特異点を中心とする半径 R の円を初期点の外乱円とする。この円周上より出発した運動が一方の定常解（軌道）に到達する円周上の初期点の領域の長さを l とする。

$$P(R) = l/2\pi R \dots\dots\dots (4)$$

が定義される。 P を初期条件の外乱円に対し一つの定常解をもつ確率と名づけられる。実際には有限個の周上の点 n について k 個の点が一つの定常解に到着するとき $P(R)$ は次式となる

$$P(R) = k/n \dots\dots\dots (5)$$

このような確率 P は $\tau=0$ の時刻のみでなく1周期について求められるからその1周期についての平均値を $\bar{P}(R)$ とする。また

$$\left. \begin{aligned} P_{eI} &= (1/R) \left\{ \int_0^R p(x) dx \right\} \\ &= \left\{ 1/2(P_0 + P_n) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k \right\} / n \\ P_{eII} &= (2/R^2) \left\{ \int_0^R x p(x) dx \right\} = P_n/n \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{n-1} K P_k \right) / n^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

を定義する。 P_{eI} は任意の外乱円上の外乱の発生の等価確率で、 P_{eII} は外乱円内の任意の出発点の発生の等価確率である。

多自由度系は多次元空間となり、二自由度系では四次元位相空間となる。Tondlはこの場合各主断面について上記の確率を求める方法を取っている。二自由度系では六つの主断面がある。一つの主断面について、外乱円はその主断面に属する特異点を中心に半径 R の外乱円上に初期値を取り、他の座標の初期値はその時刻における特異点

の値をあたえ、一自由度系と同様、確率関数を求め、各主断面について平均値を取る。

表 1 特異点の座標

	τ	0	$\pi/2\lambda$	π/λ	$3\pi/2\lambda$
共振解	X_1	-0.278	0.446	0.278	-0.446
	X_2	-0.604	0.776	0.604	-0.776
	$\dot{X}_1/\lambda$	0.436	0.270	-0.436	-0.270
	$\dot{X}_2/\lambda$	0.754	0.596	-0.754	-0.596
非共振解	X_1	-0.045	0.014	0.045	0.014
	X_2	-0.068	-0.169	0.098	0.169
	$\dot{X}_1/\lambda$	0.013	0.044	-0.013	-0.044
	$\dot{X}_2/\lambda$	-0.164	0.093	0.164	0.093

図 2 振幅特性曲線

4. 磁気ばね動吸振器への応用

る。

$$g(X_r) = 2\gamma dX_r/d\tau + C_{01}X_r + C_{03}X_r^3 \dots\dots\dots (7)$$

磁気ばね動吸振器の磁気力が対称な水平振動の場合
は、運動方程式の非線形項 $g(X_r)$ は次式で近似でき

ここで

$$C_{01} = 4K_1P_1, \quad C_{03} = 8K_1P_1^3$$

図3 局所的安定な定常解への初期値の外乱領域（共振解）（その1）

図2は $\alpha=0.116$, $\gamma=0.013$, $C_{01}=0.083$, $C_{03}=0.336$, $A_0=0.018$ の場合の λ^2 に対する振幅特性曲線である。この系は二自由度系であるから四次元空間となり6個の主断面をもっている。表1は $\lambda=0.894$ ($\lambda^2=$

0.8) の周波数における1周期の1/4時刻ごとの特異点を示す。

4.1 共振解の特異点よりの外乱 図3は、主断面内にある共振解の特異点より R の外乱円上に初期条件

図3 局所的安定な定常解への初期値の外乱領域（共振）（その2）

をもち、初期時刻に出発した系が定常振動に到達する初期条件に相当する位相面内の領域を求めたものである。これは同一円周上に等間隔で72点、15個の円についてルンゲ・クッタ・ギル（自動きざみ）法により求めた。

図3(a)~(d)は初期時刻 $\tau=0, 1/2(\pi/\lambda), \pi/\lambda,$

$3/2(\pi/\lambda)$ に対するものである。斜線の領域は非共振解曲線に到達する初期点（条件）の領域である。図4はおおのこの主断面について共振解曲線に達する確率 $P(R)$ を、図5は全断面についての平均確率 $\bar{P}$ と P_{cI} P_{cII} を示す。

4.2 非共振解の特異点よりの外乱 図6は非共振

図4 確率曲線

図5 平均確率

*1 図には、 $\tau=0, \tau=\pi/2\lambda$ に対する場合を示す。 $\tau=\tau/\lambda, (3/2)(\tau/\lambda)$ は運動方程式の復元力が対称性をもっているため、それぞれ $\tau=0, \tau=\pi/2\lambda$ の図と点（中心点）対称な図形である。

解の特異点を中心とした初期値の領域である。斜線の部分は非共振解曲線に到達する領域である^{*1}。図7はおのこの主断面について、非共振解曲線に達する確率 $P(R)$ を示し、4.1 節の場合と同称 $\bar{P}(R)$, $\bar{P}_{01}$,

$\bar{P}_{01}$ を図8に示す。図9は図3の共振解曲線に到達する初期条件の領域の三次元的標示で、 $\tau=0$ における $X_1 - \dot{X}_1/\lambda$, $X_1 - X_2$, $X_2 - \dot{X}_1/\lambda$ 断面を組み立てたものである。

図6 局所的安定な定常解への初期値の外乱領域（非共振解）

5. む す び

磁気ばね動吸振器をとりつけた振動系が周期的外力によって振動されているときは、非線形特性のため、その共振周波数域の一つの振動に対し二つの定常振動をもつ。どの定常状態を取るかは、その初期値によ

る。この初期値の外乱による定常状態の移行を、A. Tondl の手法で求めた。 $\lambda=0.894$ の場合、特異点の外乱半径 $R=0.6$ までは、もとの定常解をとる。それより R が大きくなると急激に他の定常解に移る確率が大きくなる。その確率は非共振特異点の場合が共振より大きい。非線形の実験は実際面倒であるがこれら

図 7 確率曲線

図 8 平均確率

図 9

の情報は、実験の解明にも有用と思われる。

最後にこの論文の作成にご協力いただいた佐世保工業高等専門学校溝口、野中、長嶋、松尾の諸氏に謝意を表します。

文 献

- (1) 倉掛・原, 機論, 45-399, C (昭 54) 1217.
- (2) 倉掛・ほか 2 名, 機論, 46-411, C (昭 55), 376.
- (3) Hayashi, Ch., *Non-linear Oscillations in Physical Systems*, (1964), McGraw Hill.
- (4) Tondl, A., *National Research Institute for Machine Design*, No. 15 (1973), 7, Svuss Bechovice.

討 論

〔質問〕 前沢成一郎 (明星大学理工学部)

(1) Tondl の確率解析法を克明に磁気ばね動吸振器に適用されたことに敬意を表す。この確率解析の結果からの磁気ばね動吸振器の性能改善についてのお見通しをお伺いしたい。

(2) 無次元化の際の長さの単位として L_0 が用いられているが, L_0 は物理的に意義のある長さではない (したがって原方程式に含まれていない) ので, Duffing 方程式の場合と同様に P/k を取る方法と $(C_{01}/C_{03})^{1/2}L_0 \equiv x_0$ を取る方法と二つの方法があると思うが, 例えば後者を取って無次元化すれば貴結論がよりいっそう一般化すると思う。たとえば 355 ページの $R=0.6$ (数値は変わるが) までは皆もとの定常解にもどるという結論などである。ちなみに x_0 は $C_{01}(x/L_0)$

$=C_{03}(x/L_0)^3$ を与える長さ x_0 である。

(3) 表 1 の特異点の座標は X_1, X_2 だけでなく, $\dot{X}_1, \dot{X}_2$ も必要なのではないか。

(4) 図 2 (a), (b) に対する A_0 の値はいくらか。非線形系では共振曲線は励振の大きさによって形状が変わる。また同図の共振曲線の第一の共振点付近の分枝は頭が切れたような形になっているが, これは無限に伸びるものの頭を切ったものか, それともこのまま共振曲線自身の形なのか。

(5) 349 ページ左欄 6 行 および 350 ページ左欄 10 行に Tondl の原論文にあるように「局所的に安定な」という形容詞を付け加えていただきたい。ただ定常振動解ということであれば図 2 の場合 3 個あるわけで, その内局所的に安定な 2 個の解が今問題になっているので, 誤解を生じかねないと思われる。

〔回答〕 (1) いまのところ性能改善についての対策はたっていない。運動方程式の解法には近似法によるものと, 位相面法によるものと考えられている。前者は係数の間の関係式をうるには都合がよく, 後者の方が簡単により正確な値をえられるようだが, 位相面法では初期値の取扱いが問題であったが, Tondl は

付表 1

	τ	0	$\frac{1}{2}\frac{\pi}{\lambda}$	$\frac{\pi}{\lambda}$	$\frac{3}{2}\frac{\pi}{\lambda}$
共振解	$\dot{X}_1/\lambda$	0.436	0.270	-0.436	-0.270
	$\dot{X}_2/\lambda$	0.754	0.596	-0.754	-0.596
非共振解	$\dot{X}_1/\lambda$	0.013	0.044	-0.013	-0.044
	$\dot{X}_2/\lambda$	-0.146	0.093	-0.164	-0.093

付図 1

うまくこれを処理した。位相面法と近似法と実験値とを比較検討することによって性能改善ができるものとする。実験をおこなうにあたって初期値に関する情報は重要であって、初期値に対する考察は有効であるとする。また系の運動時におけるインパルス外乱などに対する対策にも有効であるとする。

(2) ご指摘のような無次元化の単位の取り方はたいへん有意義であるが、 L_0 は動吸振器の両端面磁石の間隔で、相対変位 X_r に対し $|X_r|=1$ は吸振器(可動体)が両端面磁石と衝突する条件⁽¹⁾であり、 L_0 を単位に取ることも意義がある。また従来統一的に無次元化のための基準量として使用している。

(3) ご指摘のとおりである。本論の例の場合、水平振動で、磁気ばね動吸振器の磁気力が左右等しい場合には、たとえば、 $X_1 - \dot{X}_1/\lambda$, $X_2 - \dot{X}_2/\lambda$ のトラジェクトリはほとんど円になる。

(4) A_0 の値は 0.018 である。図 2 については曲線は上の方に伸びている。縦軸を縮少して付図 1 のように訂正させていただくが、なお、曲線は上方に伸びているが、 $\gamma=0$ でないので有限である。

(5) ご指摘のように訂正する。

〔質問〕 陣内 靖介(九州工業大学)

Tondl の手法の具体的適用例、興味深く拝見した。

(1) 355 ページ「 $\lambda=0.894$ の場合、特異点の外乱半径 $R=0.6$ までは、もとの定常解をとる」とされた理由を具体的にご説明願いたい。

(2) 図 3 の計算で、与えられた初期値が共振解の引込み領域に属するか否かはどのような方法で判定されたか。

(3) 表 1 の定常解を図 2 中に示してほしい。

〔回答〕 (1) 「外乱半径 $R=0.6$ まではもとの定常解をとる」を外乱半径 $R=0.4$ まではもとの定常解にもどる確率が 1.0 である」と訂正する。もとの定常解とは特異点(局部的安定な解に相当する位相面上の点)より外乱をあたえた初期値(点)から出発した系の運動はその特異点に相当する定常運動をするとの意味である。

(2) あたえられた初期点から出発した位相面上のトラジェクトリは終局において、局部的安定な定常解に相当する閉曲線に巻きつくが、共振定常解と非共振定常解に対する閉曲線の径は異なるので、径の大きさで判別する。たとえば、 X_1 と $\dot{X}_1/\lambda$ の場合には、初期時刻より相当長い時間後の $\sqrt{X_1^2 + (\dot{X}_1/\lambda)^2}$ の大きさを判定する。また相当長い時間はあらかじめトラジェクトリをえがかせて定常解がえられる時間を求めておき、これより決定する。

(3) 図 2 は縦標を縮少して、○印を付した。図 2 は実は原方程式の一次近似解より求めた振幅特性曲線である。この計算例は水平振動で、磁気力が左右対称の場合なので、本論文の方法で求めたものとほとんど同じ値がえられた。ただ本論による方法では不安定曲線はえられない。